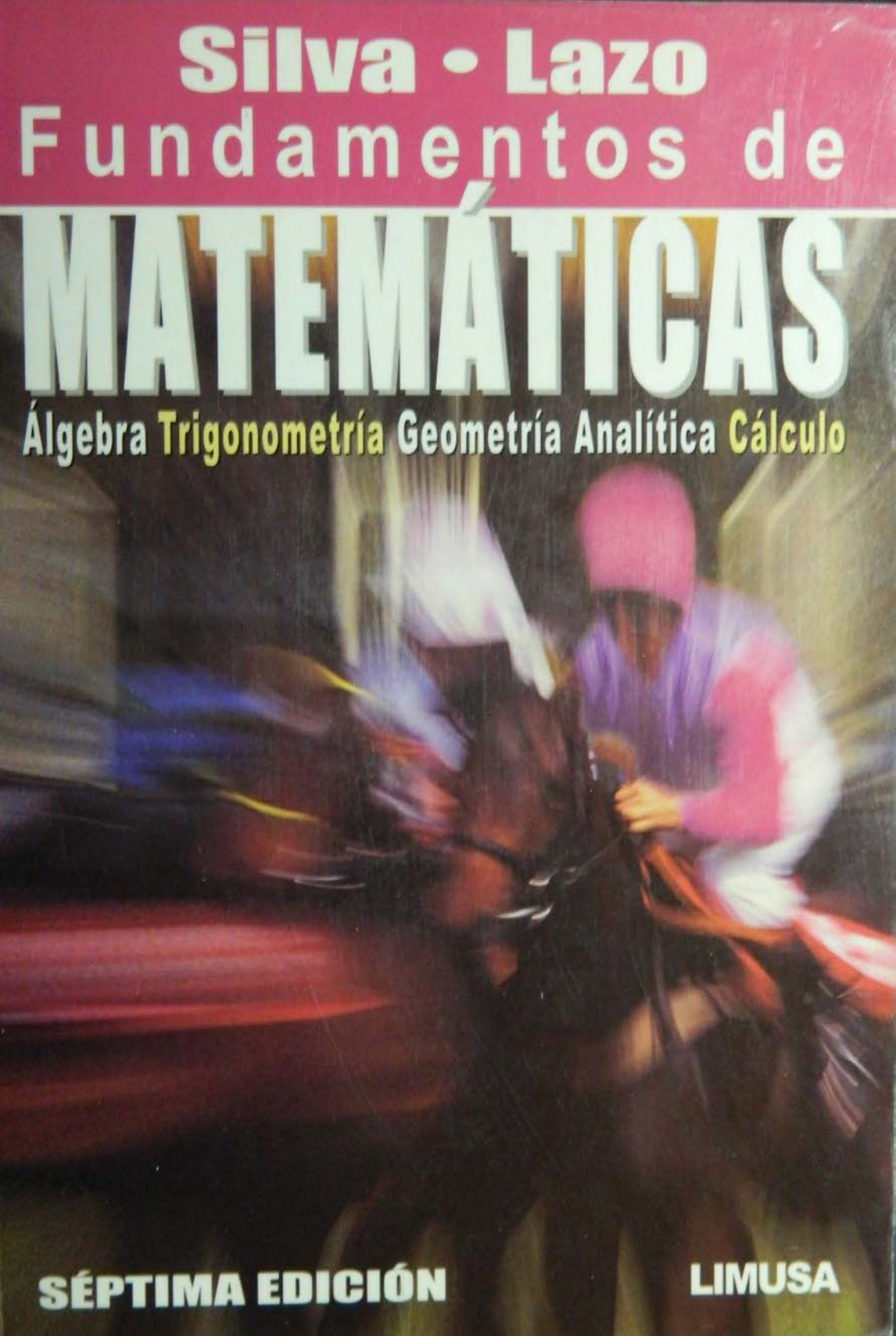
Silva • Lazo

Fundamentos de

MATEMÁTICAS

Álgebra Trigonometría Geometría Analítica Cálculo



SÉPTIMA EDICIÓN

LIMUSA

Acerca de los autores:

Adriana Lazo de Sánchez

Obtuvo el grado de licenciada en Matemáticas por la Universidad de Nuevo León, y de maestra en Ciencias de la Educación por la Universidad de Monterrey.

Obtuvo el Premio a la Labor Docente del ITESM, después de haber sido maestra asociada y de tiempo completo desde 1974 en el Departamento de Matemáticas del ITESM, Campus Monterrey.

Ha sido coordinadora de los Cursos Remediales del Departamento de Matemáticas y de los exámenes de selección que se aplican a los alumnos de nuevo ingreso. Fue senadora académica del ITESM en tres periodos diferentes. Participó en el Sistema de Evaluación de Matemáticas de este instituto, tanto en su diseño como en su implementación, desde que inició en 1980. Siete años después, participó en la reestructuración del Programa de Asesoría Académica (PAA), del que fue coordinadora desde 1988 hasta 1997. En 1997 se trasladó a la capital de Jalisco como directora académica de la Vicerrectoría de Enseñanza Media del ITESM, Campus Guadalajara.

Juan Manuel Silva Ochoa

Obtuvo la licenciatura en Matemáticas por la Universidad Autónoma de Nuevo León en 1966, y cursó la maestría en el Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (IPN). También realizó estudios de maestría sobre Administración de la Calidad en la Universidad de Monterrey.

Fue maestro en la Universidad de Nuevo León de 1969 a 1972, desempeñándose como secretario de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas. Ha sido maestro asociado del ITESM, Campus Monterrey, en el Departamento de Matemáticas, del que fue director desde 1985 hasta 1997. Actualmente es director académico de la Vicerrectoría de Enseñanza Media del ITESM, Campus Monterrey.

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA, TRIGONOMETRÍA, GEOMETRÍA ANALÍTICA Y CÁLCULO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA, TRIGONOMETRÍA, GEOMETRÍA ANALÍTICA Y CÁLCULO

SÉPTIMA EDICIÓN

JUAN MANUEL SILVA

ADRIANA LAZO

Maestros Asociados del Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.

LIMUSA

Silva, Juan Manuel
Fundamentos de matemáticas . Álgebra, Trigonometría, Geometría analítica y Cálculo / Juan Manuel Silva. --
7a. ed. -- México Limusa, 2008.
1 364 p. : il., gráficas, tablas ; 25.5 x 17 cm.
ISBN-13: 978-968-18-6759-1
Rústica

1. Matemáticas - Estudio y enseñanza
I Lazo, Adriana, coaut

Dewey: 510 | 22 / S5861f LC: QA11

LA PRESENTACIÓN Y DISPOSICIÓN EN CONJUNTO DE

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

SON PROPIEDAD DEL EDITOR. NINGUNA PARTE DE ESTA OBRA PUEDE SER REPRODUCIDA O TRANSMITIDA, MEDIANTE NINGÚN SISTEMA O MÉTODO, ELECTRÓNICO O MECÁNICO (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO, LA GRABACIÓN O CUALQUIER SISTEMA DE RECUPERACION Y ALMACENAMIENTO DE INFORMACIÓN), SIN CONSENTIMIENTO POR ESCRITO DEL EDITOR.

DERECHOS RESERVADOS:

© 2008, EDITORIAL LIMUSA, S.A. DE C.V.
GRUPO NORIEGA EDITORES
BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C.P. 06040
5130 0700
5512 2903
limusa@noriega.com.mx
www.noriega.com.mx

CANIEM NUM. 121

HECHO EN MÉXICO
ISBN-13: 978-968-18-6759-1
3.7

A mi esposo VÍCTOR MANUEL

ADRIANA

A NUESTROS PADRES

A mi esposa ARGELIA LUZ

JUAN MANUEL

Prólogo a la primera edición

Nuestra experiencia en la docencia nos ha llevado a cursos en los cuales se tienen que cubrir diferentes disciplinas de las matemáticas, como son el álgebra, la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo. Otros cursos no cubren estas cuatro disciplinas en un solo ciclo escolar, pero mediante materias seriadas se llegan a estudiar los temas antes mencionados a través de varios ciclos escolares.

En cualquiera de las dos situaciones anteriores, el maestro se ve obligado a usar más de un libro de texto, por carecer de uno que contenga todo el material. Esto produce un desconcierto, tanto en el alumno como en el maestro, puesto que al cambiar de texto de una rama a otra, generalmente se tiene que cambiar de autor, lo cual conduce a la necesidad de enfrentarse a diferentes estilos, diferentes enfoques y en ocasiones existe repetición de material, o un autor presupone material no cubierto en el texto anterior.

Éstas fueron las causas que nos motivaron a escribir una obra que contuviera las matemáticas básicas fundamentales preuniversitarias, buscando una correlación lógica entre los temas y diferentes disciplinas, conservando un mismo enfoque, formato y grado de dificultad a través de las cuatro áreas.

Actualmente, el contenido científico de un libro no es la única preocupación de los autores. El aspecto didáctico con que se presenta el material es tan importante como el contenido mismo. Haciendo nuestra etapa esta preocupación, el material de este libro está escrito pensando en el sistema de instrucción personalizada, por lo cual se dividió en pequeñas unidades que facilitan el aprendizaje. Cada unidad contiene una lista de objetivos específicos de aprendizaje, con el objeto de que el estudiante tenga claro cuáles son las exigencias mínimas que debe cubrir. Además, en cada unidad se da una cantidad amplia, tanto de ejemplos resueltos como ejercicios, de tal manera que en todo el libro se presentan más de 680 ejemplos y más de 2600 ejercicios.

Esta obra pretende buscar un equilibario entre lo formal y lo intuitivo, de tal forma que se prefirió, en algunos casos, ser menos riguroso de lo deseado si se pensaba que esto produciría un mayor beneficio pedagógico; sin embargo, se trató de ser formal y preciso en la medida posible.

Este libro está básicamente enfocado a cualquier persona que desee adquirir los fundamentos básicos de las matemáticas, así es que pensamos que puede ser un buen auxiliar para los estudiantes de preparatoria, de las Escuelas Normales y de cualquier curso cuyo objetivo sea capacitar a los estudiantes para iniciarse en los estudios universitarios.

Las unidades sobre cálculo reciben un tratamiento más intuitivo que el resto de la obra, por pensar que existen cursos en la educación superior, dedicados exclusivamente al cálculo, donde se debe ser más preciso; sin embargo, estas unidades contienen la rigurosidad necesaria para obtener los conocimientos mínimos.

No sería justo de nuestra parte desaprovechar esta oportunidad para agradecer las valiosas observaciones de nuestros compañeros del Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Monterrey, así como la entusiasta colaboración de la Srita. Rosario Pérez, que llevó a cabo la ardua tarea de mecanografiar el original.

Los autores.

Prólogo a la séptima edición

En 1980 se publicó la primera edición de este libro y a partir de ese año se han publicado cinco ediciones más. El contenido del texto original ha sufrido modificaciones, correcciones y agregados, los cuales han sido producto de las experiencias de los autores en el salón de clases, así como de los comentarios de algunos maestros que en alguna forma emplean este material.

Para la séptima edición se modificó el capítulo 4, "Expresiones Algebraicas", con la intención de distribuir el material en más secciones con más ejemplos y ejercicios por sección. También se modificó el capítulo 11, "Funciones en los reales", con el objetivo de explicar mejor el concepto de función y sus gráficas, en especial el concepto de función y función lineal aplicado a la realidad, y se creó un nuevo capítulo, el 12 titulado "Cálculo".

Afortunadamente nos toca estar cerca de los alumnos, maestros de matemáticas, directores de carrera y maestros de otras áreas que requieren las bases de las matemáticas, pues esto nos permite detectar áreas de oportunidad que conduzcan a la mejora de esta obra desde el enfoque del lector.

Los autores.

Contenido

Capítulo 1 Lógica y conjuntos 21

1.1. Conjuntos 23
1.2. Conjunción y disyunción 31
1.3. Implicación y negación 42
1.4. Bicondicional 61
1.5. Tipos de conjuntos y diagramas de Venn 78

Capítulo 2 Reales 107

2.1. Reales 109

Capítulo 3 Funciones 121

3.1. Producto cartesiano 124
3.2. Relaciones y funciones 128
3.3. Clasificación de funciones 142
3.4. Operaciones binarias 151

Capítulo 4 Expresiones algebraicas 159

4.1. Introducción a las expresiones algebraicas 161
4.2. Suma de expresiones algebraicas 176
4.3. Producto de expresiones algebraicas 182
4.4. Productos especiales o notables 189
4.5. Factorización 197
4.6. División de expresiones algebraicas 211
4.7. Simplificación, multiplicación y división de fracciones algebraicas 223
4.8. Suma y resta de fracciones algebraicas 235
4.9. Fracciones complejas 243
4.10. Exponentes enteros 248
4.11. Raíces y exponentes fraccionarios 257
4.12. Radicales 264
4.13. Operaciones con radicales 274
4.14. Inducción matemática 282
4.15. Teorema del binomio 289

Capítulo 5 Números complejos 297

5.1. Álgebra de los números complejos 299

Capítulo 6 Ecuaciones 317

6.1. Ecuaciones lineales 319
6.2. Sistemas de ecuaciones lineales 355
6.3. Ecuaciones cuadráticas 369
6.4. Relaciones entre soluciones y coeficientes de una ecuación cuadrática 382
6.5. Ecuaciones con radicales y de forma cuadrática 386
6.6. Sistemas de ecuaciones con cuadráticas 391
6.7. Funciones polinomiales 398
6.8. Raíces irracionales 420

Capítulo 7 Determinantes 423

7.1. Determinantes 425

Capítulo 8 Desigualdades 475

8.1. Desigualdades 477
8.2. Valor absoluto 512

Capítulo 9 Trigonometría 527

9.1. Ángulos 529
9.2. Funciones trigonométricas 542
9.3. Identidades fundamentales 553
9.4. Funciones trigonométricas de ángulos especiales 565
9.5. Funciones trigonométricas de cualquier ángulo 573
9.6. Funciones trigonométricas de ángulos compuestos 578
9.7. Gráficas de funciones trigonométricas 598
9.8. Logaritmos 618
9.9. Triángulos oblicuángulos 637
9.10. Ecuaciones trigonométricas 666
9.11. Raíces de números complejos 673

Capítulo 10 Geometría analítica 685

10.1. Pendientes de una recta 687
10.2. Ecuaciones de la recta 707
10.3. Circunferencia 738
10.4. Parábola 761
10.5. Elipse 794

10.6. Hipérbola 822
10.7. Ecuación general de segundo grado 839
10.8. Excenticidad de una cónica 844

Capítulo 11 Funciones en los reales 855

11.1. Funciones en los reales 857
11.2. Funciones evaluadas en valores de su dominio 885
11.3. Gráficas de funciones 891
11.4. Función lineal 901
11.5. Gráfica de funciones polinomiales 919
11.6. Gráfica de funciones algebraicas y trigonométricas 941
11.7. Efectos en las gráficas de funciones 973
11.8. Álgebra de funciones 994
11.9. Inversa 1015

Capítulo 12 Cálculo 1027

12.1. Límites 1029
12.2. Teoremas de límites 1067
12.3. Límites especiales 1090
12.4. Continuidad 1109
12.5. Derivadas 1125
12.6. Teoremas de derivadas 1137
12.7. Regla de la cadena para derivadas 1155
12.8. Derivación implícita y derivadas de orden superior 1163
12.9. Aplicación de derivadas 1173
12.10. La integral 1197

Bibliografía 1227

Apéndice A 1231

Apéndice B 1253

Respuestas a los ejercicios 1267

Tablas 1353

CAPÍTULO 1

Lógica y conjuntos

INTRODUCCIÓN

Si nos proponemos realizar una excursión para subir al Pico Norte del Cerro de la Silla, antes de emprender dicha excursión debemos conocer todo el equipo que llevaremos a la excursión y que nos permitirá lograr nuestro propósito de una manera más eficiente. También es preciso que atendamos a una serie de indicaciones que nos dará la persona responsable de la excursión y que nos servirán para evitar algunos contratiempos.

Así como en el excursionismo, el estudio de las matemáticas se debe iniciar conociendo una serie de conceptos que constituirán la herramienta básica que nos permita excursionar en el mundo de las matemáticas. En este primer capítulo estudiaremos algunos conceptos elementales de la teoría de conjuntos y de la lógica matemática, que nos permitirán introducirnos en el estudio del Álgebra, Trigonometría, Geometría y Cálculo.

Sección 1.1

CONJUNTOS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Explicar lo que se entiende por Conjunto y por Universo.
2. Distinguir cuándo un conjunto está denotado por enumeración y cuándo por comprensión.
3. Usar en forma correcta los símbolos: $\in$ y $\notin$.
4. Definir proposición.
5. Reconocer cuándo una expresión es proposición y cuándo no lo es.
6. Definir proposición abierta.
7. Encontrar el conjunto solución de una proposición abierta.
8. Usar la notación $\{ x \mid P(x) \}$

Decimos el Congreso del Estado para referirnos a los diputados y senadores estatales. Cuando nos referimos a la familia Pérez García, pensamos en las personas que la integran; hablamos de los 10 Mandamientos y recordamos a las 10 normas morales que los constituyen, de igual modo sabemos que una orquesta está formada por varios profesionales de la música.

En todas estas situaciones, a pesar de referirse a entes distintos, encontramos algo en común y esto es el hecho de que en todos los casos nos referimos a una colección de objetos con determinadas características, así por ejemplo, una colección de ciudadanos que han sido elegidos en un Estado, llegan a constituir el Congreso del Estado; la colección formada por el señor Pérez, su esposa y sus hijos, forma la familia Pérez García; la colección de las 10 normas morales mencionadas en el Antiguo Testamento son los 10 man-

damientos y, finalmente, una orquesta consiste de una colección de personas que se unen con el propósito de integrarla.

> Llamamos *conjunto* a una colección de objetos y a los objetos que lo forman se les llama *elementos del conjunto*.

Nos damos cuenta de que en cada uno de los ejemplos anteriores se puede considerar un conjunto de referencia, así, si hablamos del conjunto de diputados y senadores del Estado, el conjunto de referencia será el conjunto de ciudadanos de ese Estado. El conjunto de personas, el conjunto de normas morales y el conjunto de profesionales de la música pueden ser los respectivos conjuntos de referencia para cada uno de los ejemplos dados.

> Llamaremos *universo* al conjunto que en un momento dado es usado como marco de referencia para formar conjuntos.

Un conjunto queda determinado por una colección de atributos que los elementos del universo pueden o no poseer. Así, los elementos del universo que sí posean los atributos requeridos forman el conjunto.

Observación: Hemos dicho que un conjunto es una colección de objetos, lo cual no constituye una definición, pues conjunto y colección son palabras sinónimas, de tal manera que el término conjunto lo usaremos como un término no definido, aceptando la idea intuitiva que de él tenemos, de igual manera universo será un término no definido, pues sería difícil dar una definición de universo que a todos satisfaciera. La experiencia ha probado que tratar de dar una definición de conjunto y de universo traerá más perjuicios que beneficios.

Notación:

Generalmente, usaremos letras mayúsculas para representar conjuntos; la letra U representa el universo. A los elementos que forman el conjunto los denotaremos con letras minúsculas.

Para escribir un conjunto emplearemos paréntesis llave, abriendo la llave por el lado izquierdo y cerrándolo por el lado derecho, entre estas dos llaves estarán los elementos del conjunto.

Así por ejemplo, si $X = \{a,e,i,o,u\}$; entonces X es el conjunto de las vocales y a es un elemento del conjunto X. También si,

$$Y = \{\text{Estados de la República Mexicana}\}$$

que se lee: Y es el conjunto de todos los Estados de la República Mexicana, podemos decir que Yucatán es un elemento de Y.

En el conjunto $X = \{ a, e, i, o, u \}$ enumeramos totalmente a los elementos del conjunto, en cambio en el conjunto $Y = \{$ Estados de la República Mexicana $\}$ lo que hicimos fue dar una frase que describe a los elementos de Y, y que es más cómodo que escribirlos todos.

Entonces diremos que X es un conjunto descrito por enumeración y Y es un conjunto descrito por comprensión. Formalizaremos ésto con la siguiente definición:

> **Definición.** Diremos que un conjunto está descrito por *enumeración* si se han dado explícitamente todos sus elementos y está descrito por *comprensión* si sus elementos están dados en forma implícita mediante una frase que los describa.

Ejemplos.

Determinaremos cuáles de los siguientes conjuntos están descritos por enumeración y cuáles por comprensión.

1. $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$
2. $B = \{$ Obreros mexicanos que trabajan en Estados Unidos $\}$
3. $C = \{$ Países latinoamericanos $\}$
4. $D = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \}$
5. $E = \{$ José, Dantón, Berta, Rafael, Roberto $\}$
6. $F = \{$ Manzanas producidas en México $\}$
7. $G = \{$ Personas que se les ha otorgado el Premio Nobel $\}$
8. $H = \{$ Guatemala, Belice, Estados Unidos $\}$

Los conjuntos A, D, E y H están expresados por enumeración y los conjuntos B, C, F, y G están expresados por comprensión. Además, podemos verificar las siguientes afirmaciones:

Berta es un elemento del conjunto E; Honduras no es un elemento de H; el número 3 es elemento del conjunto A y también es elemento del conjunto D; Rusia no es un elemento del conjunto C.

Para decir que un elemento está o no en un conjunto dado usaremos el símbolo $\in$ y $\notin$ respectivamente. Así escribimos:

$x \in A$ (que se lee: x pertenece al conjunto A) para indicar que x tiene los atributos que determinan al conjunto A.

$x \notin A$ (que se lee: x no pertenece al conjunto A).

Entonces, las afirmaciones presentadas anteriormente las podemos escribir como:

Berta $\in E$; Honduras $\notin H$; $3 \in A$; $3 \in D$;
Rusia $\notin D$

Algunos conjuntos de números que utilizaremos en la parte complementaria del presente capítulo son:

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ = Dígitos.
$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ = Naturales = Enteros positivos.
$M = \{-1, -2, -3, -4, -5, \ldots\}$ = Enteros negativos.
$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ = Enteros no negativos.
$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ = Enteros.
$\{x/x = 2K, K \in Z\}$ = Enteros pares.
$\{x/x = 2K + 1, K \in Z\}$ = Enteros impares.

Un número n sólo será número primo si tiene cuatro divisores ($+n$, $-n$, $+1$ y -1). Algunos números primos positivos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc. El número 1 no es primo, ya que tiene solamente dos divisores ($+1$ y -1). Estos conjuntos de números se verán con mayor detalle en el capítulo 2.

Proposiciones

Nos damos cuenta que en el estudio de los conjuntos intervienen frases y expresiones. Es en la Lógica Matemática donde se estudian las frases, afirmaciones y el comportamiento de éstas y es por esta razón que en forma paralela a los conjuntos, estudiaremos algunos conceptos elementales de Lógica Matemática.

Definición. Una expresión que deba ser verdadera o falsa pero no ambas, la llamaremos una *proposición*.

Ejemplos.

Consideremos las siguientes expresiones:

9. 3 + 8 es menor que 2 + 10
10. Es más interesante Oceanía que América.
11. Amado Nervo fue un gran arquitecto francés.

12. En México la educación es gratuita y obligatoria.
13. El petróleo es un recurso renovable.
14. El licenciado Benito Juárez fue el Primer Presidente Constitucional de México.
15. Es más fácil el estudio de la música que el de las Matemáticas.
16. La cosecha del año entrante se helará.

Los ejemplos 9, 11, 12, 13 y 14 son proposiciones, mientras que los ejemplos 10, 15, y 16 no son proposiciones.

Las proposiciones las denotaremos con letras minúsculas (p, q, r, s, etc.). Si una proposición es falsa, lo indicaremos con la letra (F) y diremos que tiene un valor de verdad falso; en caso contrario diremos que tiene un valor de verdad verdadero y lo indicaremos con la letra (V). Entonces, 9), 12) y 14) son proposiciones con un valor de verdad verdadero y 11) y 13) son proposiciones con un valor de verdad falso.

Proposiciones abiertas

Existen algunas afirmaciones de las cuales no podemos decir inicialmente si son falsas o verdaderas por intervenir en ellas una variable:

Ejemplos.

17. x es un número primo.
18. El es el profesor fundador del IPN.
19. Este país está en América Latina.

Entonces, si en el ejemplo 17) reemplazamos x por el número 8, tendremos una proposición falsa; si en cambio $x = 3$, la proposición resultante es verdadera.

En el ejemplo 18) si el pronombre "él" es reemplazado por el nombre de un profesor fundador del IPN, tendremos una proposición verdadera, cualquier otro nombre de un profesor que no sea fundador del IPN en lugar de "él" hará falsa la proposición.

Finalmente, Francia y El Salvador hacen que la afirmación del ejemplo 19) se convierta en una proposición falsa y verdadera respectivamente.

A este tipo de proposiciones les llamaremos *proposiciones abiertas.*

Definición. Una proposición abierta es una expresión que contiene una variable y que al ser sustituida dicha variable por un valor determinado, hace que la expresión se convierta en una proposición.

Definición. El conjunto que consiste de los elementos que pueden reemplazar a la variable de una proposición abierta, lo llamaremos el Dominio de la variable.

Entonces:

A = {Números enteros } B = { Profesores del IPN }
y C = { Países }

son los respectivos dominios de la variable que aparecen en los ejemplos 17, 18 y 19.

Siempre que demos ejemplos de proposiciones abiertas, tenemos que especificar cuál es el dominio de la variable y escribiremos "p(x); $x \in D$", en donde D es el dominio de la variable x.

Entonces el ejemplo 17) quedará:

"x es un número primo"; $x \in$ Enteros. Es decir, p(x): "x es un número primo" y D = { Enteros }(Dominio de x).

Definición. El conjunto formado por aquellos elementos del dominio de la variable que hacen verdadera la proposición abierta p(x), lo llamaremos el conjunto solución de la proposición abierta p(x).

Usando proposiciones abiertas podemos escribir un conjunto por comprensión de la siguiente manera:

$A = \{x \mid p(x)\}$ que se lee: A es el conjunto de elementos x, tal que p(x) es una proposición verdadera (la raya vertical significa tal que). Entonces, los ejemplos 2), 3), 6), y 7) quedan de la siguiente manera:

B = {x | p(x) } donde p(x) es "x es un mexicano que trabaja en Estados Unidos"; $x \in$ { Personas }

C = { x | q(x) } donde q(x) es "x es un país latinoamericano"; $x \in$ {Países }

F = { x | s(x) } donde s(x) es "x es una manzana producida en México" $x \in$ { Manzanas }

G = {x | h(x) } donde h(x) es "x es un premio Nobel"; $x \in$ { Personas }

o bien,

B = { x | x es un mexicano que trabaja en Estados Unidos }
C = { x | x es un país latinoamericano }
F = {x | x es una manzana producida en México }
G = { x | x es premio Nobel }

Así es que después del símbolo | (tal que) escribimos la proposición abierta p(x), la cual describe los atributos que definirán al conjunto.

Ejercicios

1. Dar en cada caso un conjunto que pueda ser usado como universo.

a) { Ginecólogos }
b) { Estudiantes de Ingeniería }
c) { . . . −5, −4, −3, −2, −1 }
d) {Africa, Asia }
e) { x | x es un número múltiplo de 3 }
f) { x | x es una ciudad de México con más de un millón de habitantes }
g) { x| x es un auto europeo }
h) {x |x es un artículo de la Constitución Mexicana }
i) { x | x es un ex-presidente de México }

2. Indique en cada ejercicio si la proposición es verdadera o falsa.

a) $x \in A$, A = { Estados de la República }; x = Saltillo.
b) $x \in B$, B = { Ex presidente de México }; x = Lázaro Cárdenas.
c) $x \in C$, C = { x | x es divisible por 5 }, $x = -35$.
d) $x \in D$, D = { Ciudades capitales de México }; x = Jalisco.
e) $x \in E$, E = {x | x es mayor que 2 y menor que 4 }; $x = 0$.
f) $x \notin F$, F = { Dígitos pares menores que seis } ; $x = 4$.
g) $x \notin G$, G = { Dígitos primos menores que 7 } ; $x = 4$.
h) $x \in H$, H = { ○ , □ , △ , ▭ , ⏢ }; x = ○.
i) $x \in I$, I = { 5, □ , *,α , 3 }; x = *
j) $x \in J$, J = { #, ?, ¡, ; } ; x = *

3. Expresar los siguientes conjuntos en la forma por enumeración.

a) A = { x| x es un niño héroe }
b) B = { x| x es un par positivo menor que 20 }
c) C = { x| x es un mes del año }
d) D = { x | x es una letra de la palabra Patricia }
e) E = { x| x es un país colindante con Panamá }
f) F = {x | x es un dígito par }

g) $G = \{ x \mid x$ es una vocal consonante $\}$
h) $H = \{ x \mid x$ es un número primo entre 10 y 20 $\}$
i) $I = \{ x \mid x$ es un múltiplo de 4 menor que 50 $\}$
j) $J = \{ x \mid x$ es una letra de la palabra México $\}$

4. Expresar los siguientes conjuntos en la forma por comprensión:

a) $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 \}$
b) $B = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots \}$
c) $C = \{ b, c, d, f, g, h, j, k, l, m \}$
d) $D =$ {Gustavo Díaz Ordaz, Luis Echeverría Álvarez}
e) $E =$ { Septiembre, Octubre, Noviembre y Diciembre }
f) $F = \{ i, u \}$
g) $G = \{2, 3, 5, 7 \}$
h) $H =$ {México, Canadá }
i) $I = \{u, v, w, x, y, z \}$
j) $J =$ { México, Estados Unidos, Canadá }
k) $K = \{ 8, 16, 24, 32, 40 \}$

5. Decir cuál de las siguientes expresiones es una proposición.

a) El año 2,000 será un año muy próspero para América Latina.
b) El 27 no es un número primo.
c) La Sierra Madre está en Africa.
d) Es más agradable el invierno que el verano.
e) Levántate.
f) John F. Kennedy es un ex presidente de Estados Unidos.
g) $5 + 3 = 8$
h) $\sqrt{2}$ es un número entero.
i) Corre.
j) Un círculo es menor que un cuadrado.
k) Una ecuación de segundo grado tiene 2 raíces.
l) La gráfica de la ecuación $y = mx + b$ es una recta.
m) 5 es factor de 10
n) Los árboles son más hermosos que el mar.
o) Las canciones son más hermosas que las poesías.
p) Jalapa es la capital de México.
q) $\sqrt{5}$ es un número entero.
r) El cálculo es fácil.
s) La física es difícil.
t) El comunismo es mejor que el capitalismo.
u) Son más agradables las montañas que las playas.
v) Durango está en el Estado de México.

w) $\sqrt{4} = \pm 2$
x) Estudiaremos.
y) El 24 de diciembre nevará.

En cada uno de los siguientes ejercicios, encontrar el conjunto solución de la proposición abierta dada.

a) p(x) : x es uno de los 3 últimos ex-presidentes de México; $x \in$ {Ex-presidentes de México }
b) p(x) : $x + 8$ es menor que 12; $x \in$ {Enteros positivos }
c) p(x) : $\frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1}$; $x \in \{ -1, 0, 1, 2, 3 \}$
d) p(x): $-10 + 2 = -2x$; $x \in$ { Enteros }
e) p(x) : x no es un número primo; $x \in \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$
f) p(x) : x es un país africano; $x \in$ {Países del mundo }
g) p(x) : x es un dígito; $x \in$ {Enteros }
h) p(x) : $x - 10$ es mayor que -20; $x \in$ { dígitos }
i) p(x) : $x^2 - 6x = 0$; $x \in \{2, 4, 6, 8, 10 \}$
j) p(x): $\frac{1}{x}$ menor que 0, $x \in \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$
k) p(x) : x es divisible por 5; $x \in \{ 1, 2, 3, \ldots, 20 \}$
l) p(x) : x es un factor de 7;
$x \in$ {naturales menores que 30 }
m) p(x) : x es un dígito primo par;
$x \in$ {naturales entre 1 y 20 }
n) p(x) : $7x - 1 = 0$; $x \in$ {naturales entre 1 y 10 }
o) p(x) : x es una ciudad capital; $x \in$ { Monterrey, Veracruz, Matamoros }

Sección 1.2

CONJUNCIÓN Y DISYUNCIÓN

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir proposición conjuntiva.
2. Escribir la tabla de verdad para la conjunción.
3. Dadas dos proposiciones abiertas, formar la conjunción y encontrar el conjunto solución de la proposición conjuntiva.
4. Definir la intersección.
5. Dados dos conjuntos, encontrar la intersección de ellos.
6. Definir proposición disyuntiva.
7. Escribir la tabla de verdad de la disyunción.

8. Dadas dos proposiciones abiertas, formar la disyunción y encontrar el conjunto solución de la proposición disyuntiva.
9. Definir la unión de dos conjuntos.
10. Dados dos conjuntos, encontrar la unión de ellos.
11. Definir conjunto vacío.

En la sección 1.1 estudiamos los conceptos de conjunto y de proposición, de tal manera que podemos pensar que ellos son los elementos básicos. Ahora vemos algunas formas de relacionar proposiciones para formar nuevas proposiciones haciendo uso de ciertas "operaciones" que llamaremos *conectivos*.

Nos daremos cuenta que estos conectivos nos permitirán definir "operaciones" en los conjuntos para obtener nuevos conjuntos.

Proposición conjuntiva

Es común tener expresiones como las siguientes:

a) "Adolfo López Mateos es un ex presidente de México" y "Charles de Gaulle es un ex presidente de Francia".
b) "Saltillo es la capital de Coahuila" y "Jalapa es la capital de Jalisco".
c) "Isaac Newton es el creador de la Teoría de la Relatividad" y "Aristóteles de Estagira es uno de los primeros hombres que hizo estudios de lógica".
d) "3 + 2 = 15" y "8 es un número primo".

En cada una de estas expresiones encontramos dos proposiciones conectadas por medio de la letra y, por ejemplo, en el inciso *a*) tenemos:

p: "Adolfo López Mateos es un ex presidente de México".
q: "Charles de Gaulle es un ex presidente de Francia".
p y q: "Adolfo López Mateos es un ex presidente de México" y "Charles de Gaulle es un ex presidente de Francia".

La nueva proposición "p y q" la denotaremos $p \wedge q$, es decir, hemos introducido el símbolo $\wedge$ para reemplazar la letra y, el símbolo $\wedge$ será llamado el conectivo conjunción.

Diremos que $p \wedge q$ es la conjunción de p y q, también llamaremos a la nueva proposición $p \wedge q$ *proposición conjuntiva*.

Definición. A la proposición que resulta de unir dos proposiciones por medio del conectivo conjunción ($\wedge$), la llamaremos proposición conjuntiva.

Ahora lo que nos interesa es establecer una técnica para averiguar el valor de verdad de la conjuntiva $p \wedge q$, conociendo los valores de verdad de p y de q; el valor de verdad de $p \wedge q$ queda establecido de acuerdo al siguiente axioma que en forma intuitiva podemos deducir de las expresiones *a*, *b*, *c* y *d*.

> $p \wedge q$ tendrá un valor de verdad verdadero, sólo cuando ambas componentes sean verdaderas, es decir, si al menos una de las componentes es falsa, entonces $p \wedge q$ es falsa.

Este axioma lo podemos indicar mediante la siguiente tabla:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esta tabla será llamada la tabla de verdad de la conjunción.

De acuerdo a esta tabla de verdad, los incisos *b*), *c*) y *d*) son proposiciones conjuntivas falsas, mientras que *a*) es una proposición conjuntiva verdadera.

Observaciones: Esta tabla se interpreta de la siguiente manera:

a) *Primer renglón.* Si las proposiciones p y q son verdaderas, entonces la proposición $(p \wedge q)$ es verdadera.
b) *Segundo renglón.* Si la proposición p es verdadera y q es falsa, entonces la proposición $(p \wedge q)$ es falsa.
c) *Tercer renglón.* Si la proposición p es falsa y q es verdadera, entonces la proposición $(p \wedge q)$ es falsa.
d) *y Cuarto renglón.* Si las proposiciones p y q son falsas, entonces la proposición $(p \wedge q)$ es falsa.

Ejemplos.

1. $\underset{\text{"El Sol sale de día}}{\overset{\text{V}}{}}$ y $\underset{\text{la Luna sale de noche".}}{\overset{\text{V}}{}}$
2. $\underset{\text{"9 es un número impar}}{\overset{\text{V}}{}}$ y $\underset{\text{es un número primo".}}{\overset{\text{F}}{}}$
3. $\underset{\text{"Pelé es un científico}}{\overset{\text{F}}{}}$ y $\underset{\text{Cantinflas es un futbolista".}}{\overset{\text{F}}{}}$
4. $\underset{\text{"Un triángulo tiene dos ángulos}}{\overset{\text{F}}{}}$ y $\underset{\text{un cuadrado tiene cuatro ángulos".}}{\overset{\text{V}}{}}$

5. $\underset{\text{"Roma está en Italia}}{\text{V}}$ y $\underset{\text{Londres en Inglaterra".}}{\text{V}}$

6. $\underset{\text{"Enero tiene 29 días}}{\text{F}}$ y $\underset{\text{febrero 31 días".}}{\text{F}}$

El valor de verdad de la proposición del ejemplo 1 es "verdadero", ya que "El Sol sale de día" es verdadero y "la Luna sale de noche" también es verdadero, y según el axioma de la conjunción "V y V" es V, y para cada una de las proposiciones de los ejemplos del 2 al 6 sus valores de verdad son:

Ejemplo	*Valor de verdad*
2	F
3	F
4	F
5	V
6	F

Formemos ahora la conjunción de dos proposiciones abiertas. Si:

$p(x)$: "$x^2 - 49 = 0$" ; $x \in$ { Enteros }
$q(x)$: "x es un número primo mayor que 3 y menor que 15" ;
$x \in$ { Enteros }

entonces,

$p(x) \wedge q(x)$ es la proposición.
"$x^2 - 49 = 0$ y x es un número primo mayor que 3 y menor que 15" ;
$x \in$ { Enteros }

De acuerdo a la tabla de verdad de la conjunción, esta proposición es verdadera cuando ambas sean verdaderas. Nos damos cuenta que $P = \{ 7, -7 \}$ es el conjunto solución de $p(x)$, también observamos que $Q = \{ 5, 7, 11, 13 \}$ es el conjunto solución de la proposición $q(x)$, de donde concluimos que el conjunto solución de la proposición "$p(x) \wedge q(x)$" es $R = \{ 7 \}$ el cual es el conjunto formado por los elementos que están simultáneamente en P y Q.

Ejemplos.

7. $p(x)$: "x es un país de los 10 países con mayor área" $x \in$ { Países }
   $q(x)$: "x es un país de los 10 países con mayor población" ;
   $x \in$ { Países }
   $p(x) \wedge q(x)$: "(x es un país de los 10 con mayor área) $\wedge$ (x es un país de los 10 con mayor población)" ; $x \in$ { Países }

   Entonces, el conjunto solución de $p(x)$ es:

   P = { URSS, Canadá, China, EUA, Australia, Brasil, India, Argentina, Sudán, Zaire. }

   El conjunto solución de $q(x)$ es:

   Q = { China, India, URSS, EUA, Indonesia, Japón, Brasil, Nigeria Bangladesh, Alemania Occidental. }

   Conjunto solución de $p(x) \wedge q(x)$ es:

   R = { China, India, URSS, EUA, Brasil }

8. $p(x) : x^2 - 2x - 15 = 0 \; ; x \in$ { Enteros }
   $q(x) : 2x - 10 = 0 \; ; x \in$ { Enteros }
   $p(x) \wedge q(x)$: "$x^2 - 2x - 15 = 0 \wedge 2x - 10 = 0$" ;
   $x \in$ { Enteros }

   Conjunto solución de $p(x)$: P = { -3, 5 }
   Conjunto solución de $q(x)$: Q = { 5 }
   Conjunto solución de $p(x) \wedge q(x)$ es R = { 5 }

Usaremos el conectivo $\wedge$ para encontrar un conjunto a partir de dos conjuntos dados.

Definición. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, entonces definiremos el conjunto A intersección B, que denotaremos por $A \cap B$ como sigue:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

Ejemplos.

9. P = { 7, -7 } y Q = { 5, 7, 11, 13 }, entonces $P \cap Q$ = { 7 }

10. P = { x | x es un país de los 10 de mayor área }
Q = { x | x es un país de los 10 de mayor población }
$P \cap Q$ = { China, India, URSS, EUA, Brasil }

11. $P = \{ -5, 5 \}$ y $Q = \{ 5 \}$; $P \cap Q = \{ 5 \}$

De estos ejemplos podemos damos cuenta que el conjunto solución de una proposición conjuntiva $p(x) \wedge q(x)$ es la intersección de los conjuntos solución de las proposiciones $p(x)$ y $q(x)$.

Es decir:

> Si P es el conjunto solución de la proposición $p(x)$ y Q el de la proposición $q(x)$, entonces el conjunto solución de "$p(x) \wedge q(x)$" es $P \cap Q$.

Ejemplo.

12. A = { Habitantes de México que son mayores de edad }
B = { Habitantes de México que son menores de edad }

Si $x \in A \cap B$, debemos tener que x es un mexicano que es simultáneamente menor de edad y mayor de edad, lo cual es imposible, es decir, no existe ningún elemento x que pertenece al conjunto $A \cap B$, de donde concluimos que:
$A \cap B$ no tiene elementos. Por continuidad de las ideas y de los conceptos definimos el conjunto vacío como sigue:

> **Definición.** El conjunto vacío que denotaremos por ϕ es el conjunto que no tiene elementos. Podemos decir que:
> $$\phi = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin A \}$$
> $$\phi = \{ \quad \}$$

Ejemplos.

13. ϕ = { x | x es un entero par y x es un entero impar }
14. ϕ = { vocales que son consonantes }
15. ϕ = { enteros primos que son divisibles entre 4 }

Proposición disyuntiva

Consideremos las siguientes expresiones:

a) "Jorge Bool muere en 1864" o "Gottfried W. Leibinz fue un filósofo y matemático alemán".
b) "Chile es un país sudamericano" o "España es un país europeo".
c) "$(3)(5) \neq 15$" o "$(-128)^2$ es un número positivo".
d) "Enero tiene 29 días" o "el 10 de mayo se celebra la independencia de México".

En cada una de estas expresiones, encontramos dos proposiciones conectadas por medio de la letra "o", por ejemplo, en el inciso *c*) tenemos:

p : "$(3)(5) \neq 15$" q : "$(-128)^2$ es un número positivo".
p o q :"$(3)(5) \neq 15$ o $(-128)^2$ es un número positivo".

La nueva proposición la denotaremos por $p \vee q$, es decir, hemos introducido el símbolo $\vee$ para reemplazar a la letra "o". Diremos que $p \vee q$ es la disyunción de p y q, también llamaremos a la nueva proposición $p \vee q$ *proposición disyuntiva*.

Definición. A la proposición que resulta de unir dos proposiciones por medio del conectivo ($\vee$) le llamaremos proposición disyuntiva.

De la misma manera que para la conjunción ($\wedge$) daremos el axioma que determina el valor de verdad de la disyunción ($\vee$).

$p \vee q$ tendrá un valor de verdad falso sólo cuando ambas componentes sean falsas, es decir, si al menos una de las componentes es verdadera, entonces $p \vee q$ es verdadera.

La tabla de verdad de $p \vee q$ está dada por:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Usando esta tabla podemos decir que el inciso *d*) de los ejemplos anteriores es falso, mientras que *a*, *b* y *c* son verdaderos.

El renglón 3 de esta tabla se interpreta diciendo que si p es falsa y q es verdadera, entonces $p \vee q$ es verdadera.

Ejemplos.

16. $\overset{F}{\text{"El Sol sale de noche}}$ o $\overset{F}{\text{la Luna sale de día"}}$.

17. $\overset{V}{\text{"8 es un número par}}$ o $\overset{V}{\text{5 es un número primo"}}$

18. $\overset{V}{\text{"}\sqrt{2}\text{ es un número irracional}}$ o $\overset{F}{\sqrt{2}\text{ es un número entero"}}$.

19. $\overset{F}{\text{"La semana tiene 12 días}}$ o $\overset{F}{\text{el año tiene 6 meses"}}$.

20. $\overset{F}{\text{"3 es menor que 1}}$ ó $\overset{V}{\text{3 es mayor que 1"}}$.

El valor de verdad de cada una de las proposiciones de los ejemplos del 15 al 19, de acuerdo al axioma de verdad de la disyunción, son:

Ejemplo	*Valor de verdad*
16	F
17	V
18	V
19	F
20	V

Observación. En el lenguaje común en ocasiones la "o" indica exclusividad, es decir, que sucede una cosa u otra, pero no ambas; sin embargo, de la tabla de verdad para $\vee$ nos daremos cuenta que en lógica, la disyunción significa y/o.

Ahora mediante el conectivo disyunción definiremos la unión de dos conjuntos.

Definición. Sean A y B dos conjuntos, entonces definimos el conjunto A unión B, que denotaremos por $A \cup B$ como sigue:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

Ejemplos.

21. Si $P = \{ 2, -2 \}$ y $Q = \{ 5, 7, 11, 13 \}$
Entonces, $P \cup Q = \{ -2, 2, 5, 7, 11, 13 \}$

22. Si $P = \{ -3, 5 \}$ y $Q = \{ -3, -2, 5 \}$
Entonces, $P \cup Q = \{ -3, -2, 5 \}$

23. $P = \{ x | x$ es un mexicano mayor de edad $\}$
$Q = \{ x | x$ es un mexicano menor de edad $\}$
$P \cup Q = \{ x | x$ es un mexicano $\}$

24. Sean $A = \{1, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4\}$ y $C = \{0, 4, 5, 7, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 7, 9\}$; $A \cap B = \{ \}$
$A \cup C = \{0, 1, 4, 5, 7, 8, 9\}$; $A \cap C = \{5, 7\}$
$B \cup C = \{0, 2, 4, 5, 7, 8\}$; $B \cap C = \{4\}$
$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$
$(A \cup B) \cap (B \cap C) = \{2, 4, 5, 7\}$
$(A \cap C) \cap (B \cap C) = \{ \}$
$(A \cup B) \cap C = \{4, 5, 7\}$

25. Sean $A = \{a, b, c, d, x, y, z\}$
$B = \{a, d, y\}$
$C = \{b, d, y, z\}$

$A \cup B = \{a, b, c, d, x, y, z\}$
$B \cup C = \{a, b, d, y, z\}$
$B \cap C = \{d, y\}$
$A \cup (B \cap C) = \{d, y\}$
$(A \cap B) \cup C = \{a, d, y, b, z\}$
$(A \cap B) \cap C = \{d, y\}$

Es claro que si formamos la disyunción de dos proposiciones abiertas, tendremos una proposición abierta cuyo conjunto solución es la unión de los dos conjuntos solución de las proposiciones dadas.

Es decir:

> Si P es el conjunto solución de la proposición $p(x)$ y Q el de la proposición $q(x)$, entonces $P \cup Q$ es el conjunto solución de la proposición $p(x) \vee q(x)$.

Ejemplos.

26. $p(x)$: "$x^2 - 4 = 0$" ; $x \in$ { Enteros }
$q(x)$: x es un número primo mayor que 3 y menor que 15; $x \in$ { Enteros }
$p(x) \vee q(x)$: "$x^2 - 4 = 0 \vee x$ es un número primo mayor que 3 y menor que 15".

Conjunto solución de $p(x)$: { $-2, 2$ } $= P$
Conjunto solución de $q(x)$: { $5, 7, 11, 13$ } $= Q$
Conjunto solución de $p(x) \vee q(x)$: { $-2, 2, 5, 7, 11, 13$ } $= P \cup Q$.

27. $p(x)$: $(x + 2)(x-2) = 0$; $x \in$ { Enteros }
$q(x)$: $(x + 3)(x + 2)(x - 5) = 0$; $x \in$ { Enteros }
$p(x) \vee q(x)$: "$(x + 2)(x - 2) = 0 \vee (x + 3)(x + 2)(x - 5) = 0$"
$P =$ { $-2, 2$ } , Conjunto solución de $p(x)$.
$Q =$ { $-3, -2, 5$ } , Conjunto solución de $q(x)$.
$P \cup Q =$ { $-2, 2, -3, 5$ } , Conjunto solución de $p(x) \vee q(x)$.

28. $p(x)$: x mexicano mayor de edad; $x \in$ { Mexicanos }
$q(x)$: x mexicano menor de edad; $x \in$ { Mexicanos }
$p(x) \vee q(x)$: "x mexicano mayor de edad $\vee$ x mexicano menor de edad".

$P =$ { Mexicanos mayores de edad }
$Q =$ { Mexicanos menores de edad }
$P \cup Q =$ { Mexicanos } = U (universo).

Ejercicios.

1. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) No es verdad que $3 + 2 = 5 \wedge 8 - 2 = 6$
b) $9 - 16 = (3 - 4)(3 + 4) \vee (-5)(-2)$ es positivo
c) "Lima es la capital de Argentina" $\vee$ "Buenos Aires es la capital de Perú".
d) "5 es menor que 10" $\wedge$ "8 no es número primo"
e) "Leonhard Euler fue un matemático suizo" $\vee$ "Bertrand Russell nació en 1872".
f) "Cuba obtuvo 3 medallas de oro en Munich" $\wedge$ "Francia obtuvo 4 medallas de oro en Munich".
g) "Un triángulo rectángulo tiene dos ángulos rectos" $\vee$ "Un triángulo equilátero tiene 3 lados desiguales".

h) "25 es un número divisible por 5" $\wedge$ "8 no es par".
i) "El mundial de Futbol en 1970 fue en Brasil" $\vee$ "Los Juegos olímpicos de 1976 fueron en Montreal".

2. En cada uno de los ejercicios siguientes forme la proposición conjuntiva y la disyuntiva; encuentre el conjunto solución de las componentes, también encuentre el conjunto solución de la conjunción y de la disyunción (el dominio en cada caso es el conjunto $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$).

a) "$x^2 - 4 = (x + 2)\ (x - 2)$" ; "$x^2$ es mayor que cero"
b) "$x - 1 = 0$" ; "$x^2 - 1 = 0$"
c) "$(x + 3)^2 = 0$" ; "$(x + 3) = 0$"
d) $x - 8$ es menor que cero; $x - 8$ es mayor que cero.
e) x^2 es mayor que cero; $x + 8 = 2$
f) $x^3 - 1 = 1$; x es un positivo
g) $x^2 - 10x + 25 = 0$; $x^2 - 25 = 0$

3. Sea $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$
$C = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$

Encuentre:

a) $A \cup B$
b) $A \cup C$
c) $A \cap B$
d) $A \cap C$
e) $A \cup (B \cup C)$
f) $(A \cup B) \cup C$
g) $A \cup (B \cap C)$
h) $B \cap C$
i) $B \cup C$
j) $A \cap (B \cap C)$
k) $(A \cap B) \cap C$
l) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. Sean $A = \{a, e, i, o, u\}$
$B = \{a, b, o, p, u, v\}$
$C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$

Encuentre:

a) $A \cup B$
b) $A \cup C$

c) $B \cup C$
d) $A \cap B$
e) $A \cap C$
f) $B \cap C$
g) $(A \cup B) \cup C$
h) $A \cup (B \cup C)$
i) $(A \cap B) \cap C$
j) $A \cap (B \cap C)$
k) $A \cup (B \cap C)$
l) $B \cup (A \cap C)$
m) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
n) $(B \cup A) \cap (B \cup C)$
o) $A \cap (B \cup C)$
p) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
q) $C \cup (B \cap C)$
r) $C \cap (B \cup A)$

Sección 1.3

IMPLICACIÓN Y NEGACIÓN

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Encontrar el valor de verdad de proposiciones condicionales.
2. Encontrar el valor de verdad de proposiciones cuantificadas existencial y universalmente.
3. Dada una proposición, escribirla usando cuantificadores.
4. Definir subconjunto de un conjunto dado.
5. Definir subconjunto propio de un conjunto dado.
6. Encontrar el valor de verdad de proposiciones condicionales abiertas.
7. Escribir la negación de una proposición dada.
8. Definir complemento de un conjunto.
9. Encontrar el complemento de un conjunto dado.
10. Definir diferencia entre dos conjuntos.
11. Encontrar la diferencia de conjuntos dados.

Implicación

En Matemáticas nos encontramos con expresiones como: Si "a y b son números pares", entonces "$a + b$ es un número par": si "$x \in (A \cap B)$ entonces $x \in A \wedge x \in B$".

En general si p y q son dos proposiciones, podemos formar una nueva proposición de la siguiente manera: "si p entonces q", que llamaremos proposición condicional y que será denotada mediante el símbolo $p \Rightarrow q$. El símbolo

$\Rightarrow$ lo llamaremos conectivo condicional; p es llamada antecedente o hipótesis y q consecuente o conclusión.

Definición. A la proposición que resulta de unir dos proposiciones por medio del conectivo condicional, le llamaremos *proposición condicional.*

Antes de dar la tabla de verdad (axioma) para la implicación, consideremos la siguiente proposición: Si "Juan obtiene un promedio de nueve o más, entonces se le otorgará beca".

Veamos todas las posibilidades.

1. Si Juan obtiene nueve o más de promedio y se le otorga beca se habrá cumplido lo prometido.
2. Si Juan obtiene nueve o más de promedio y no se le otorga beca, no se habrá cumplido lo prometido.
3. Si Juan obtiene un promedio menor que nueve y se le otorga beca, no se falta a la promesa.
4. Si Juan obtiene un promedio menor que nueve y no se le otorga beca, se sigue cumpliendo lo prometido.

De esto podemos concluir que sólo en el segundo caso no se cumple la promesa. Entonces el valor de verdad de $p \Rightarrow q$ queda establecido de acuerdo al siguiente axioma:

$p \Rightarrow q$ tendrá un valor de verdad falso solamente cuando el antecedente p es verdadero (V) y el consecuente q es falso (F); en los demás casos diremos que $p \Rightarrow q$ es verdadero.

Entonces la tabla de verdad de la implicación es la siguiente:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplos.

5. F
"Si Roma está en Estados Unidos entonces
F
Washington está en Italia".

6. V V
"Si 4 es un múltiplo de 2 entonces 4 es un número par".

7. V
"Si un triángulo tiene tres ángulos entonces
F
un cuadrado tiene dos ángulos".

8. F F
"Si el Sol sale de noche entonces la Luna sale de día".

9. F
"Si 2 y 4 son números impares entonces
V
la suma (2 + 4) es un número par".

El valor de verdad de cada una de las proposiciones de los ejemplos anteriores de acuerdo al axioma de verdad de la implicación es:

Ejemplo	*Valor de verdad*
5	V
6	V
7	F
8	V
9	V

Cuantificadores

Consideremos las siguientes afirmaciones:

a) Para algún dígito x; $x - 1 = 10$.
b) Todas las canicas ruedan.

c) Existe por lo menos un estudiante que es excelente en el ITESM.
d) Ninguna ave camina.
e) Ningún número entre 0 y 1 es entero.

En estas afirmaciones se observa una palabra o una frase como:

Para algún, todos, existe por lo menos, ningún; que indican cuántos objetos o cosas cumplen con una determinada condición.

Definición. Una palabra o frase que indique cuántos objetos o cosas cumplen con determinada propiedad, se llama un CUANTIFICADOR.

Algunos cuantificadores son: existe, existe por lo menos uno, algún o algunos, para todos, por lo menos un, cualquiera.

Estos cuantificadores se pueden reducir a dos: "Existe" y "Para todo".

Definición. Al cuantificador "Existe" se le llamará "Cuantificador existencial" que se denotará por "$\exists$".

Es decir, la palabra "existe" o la frase "existe por lo menos" se sustituye por el símbolo "$\exists$", y la proposición cuantificada existencialmente se representará por

$$\text{"}\exists\ x \in D;\ p\ (x)\text{"}$$

que se lee "Existe un elemento x que pertenece al conjunto D, tal que la proposición $p\ (x)$ se satisface.

Definición. Al cuantificador "Todo", "Todos", "Ninguno", "Para todo" se le llamará "Cuantificador Universal" que se denotará por "$\forall$".

Es decir, la palabra "Todos" o la frase "Para todos" se sutituye por el símbolo "$\forall$" y la proposición cuantificada universalmente se representará por

$$\text{``}\forall x \in D;\ p\ (x)\text{''}$$

que se lee "Para todo elemento x del conjunto D, la proposicion p (x) se satisface".

Las expresiones cuantificadas universal o existencialmente es una nueva PROPOSICIÓN que tiene un valor de verdad que se establece en los siguientes axiomas de verdad.

La proposición "$\forall x \in D\ p\ (x)$" es falsa si al menos un elemento del dominio D, hace falsa la proposición p (x)

La proposición "$\forall x \in D,\ p\ (x)$" es verdadera cuando hay al menos un valor x en el dominio D que haga verdadera la proposición p (x) y será falsa si no existe un solo elemento del dominio que haga verdadera a p (x)

Las afirmaciones cuantificadas anteriormente se pueden reescribir simbólicamente.

a) Para algún dígito x; $x - 1 = 10$
$\exists\ x \in \{\text{dígitos}\};\ x - 1 = 10$

b) Todas las canicas ruedan
$\forall x \in \{\text{canicas}\}$; x puede rodar

c) Existe por lo menos un estudiante que es excelente en el ITESM.
$\exists\ x \in \{\text{estudiantes del ITESM}\};\ x$ es excelente

d) Ninguna ave camina.
$\forall\ x \in \{\text{aves}\};\ x$ no camina.

Observación. El que se afirme que ninguna ave camina, quiere decir que de la totalidad del conjunto de aves, ninguna de ellas camina.

e) Ningún número entre 0 y 1 es entero.
$\forall\ x \in \{\text{números entre 0 y 1}\};\ x$ no es entero.

Utilizando los axiomas de verdad anteriores se tiene que la proposición (*a*) y (*d*) son falsas y (*b*), (*c*) y (*e*) son verdaderas.

Ejemplos.

10. "Existe un expresidente de México que es originario de Puebla".
En simbología se expresa:

$\exists\, x \in$ {Expresidente de México} ; es originario de Puebla.

Esta proposición es verdadera ya que si x = Gustavo Díaz Ordaz, hace verdadera la proposición de que es originario de Puebla aunque existan otros expresidentes que no son de Puebla.

11. "para todo número entero, su cuadrado es positivo o cero".
En simbología se expresa:

"$\forall\, x \in$ {enteros}; $x^2 \geq 0$" que es verdadera.

12. "Para todo número entero, su raíz cuadrada es entero".
En simbología:

"$\forall\, x \in$ {enteros}; $\sqrt{x}$ es entero",

que es falsa ya que si $x = 3$, $\sqrt{3}$ no es entero.

13. "Al menos existe un número entero, que sumado con tres es dos".
En simbología se expresa:

"$\exists\, x \in$ {enteros}; $x + 3 = 2$",

que es verdadera, ya que si $x = -1$, hace verdadera la expresión $x + 3 = 2$, aunque existan otros valores del dominio que la hagan falsa.

14. "Existe por lo menos un número entero tal que su cuadrado es 1".
En simbología se tiene:

"$\exists\, x \in$ {enteros}; $x^2 = 1$",

que es verdadera, ya que si $x = 1$ o $x = -1$ hacen verdadera a $x^2 = 1$.

15. "Todo deportista de la Delegación Olímpica Mexicana es gimnasta".
En simbología:

"$\forall\, x \in$ {deportistas Delegación Olímpica Mex. } x es gimnasta",

que es falsa, puesto que la Delegación no está integrada únicamente por gimnastas.

16. "Existe un deportista en la Delegación Olímpica Mexicana de 1976 que obtuvo medalla de oro".

"$\exists\, x \in$ {deportistas de la Delegación Olímpica Mexicana de 1976} ; x obtuvo medalla olímpica", que es verdadera, ya que si x = {Daniel Bautista}, éste obtuvo una medalla olímpica.

17. "Ningún mes del año tiene 35 días que en simbología se tiene $\forall\, x \in$ {meses}; x no tiene 35 días, que es verdadera.

18. "$\exists x \in$ {países}; x es país americano o x es europeo".

Esta proposición es verdadera puesto que si x = Colombia se satisface $p\ (x)$.

19. "$\forall x \in$ {enteros}; $x + 1 > x$, que es verdadera.
20. "$\exists\, x \in$ {naturales}; $|\ x\ | < 0$", que es falsa.
21. "$\exists\, x \in$ {reales}; $x^2 < 0$", que es falsa.
22. "$\forall\, x \in$ {enteros}; $x + 2 \geq 10$, que es falsa.

Subconjunto

Haremos uso del cuantificador universal para definir el concepto de subconjunto.

Definición. Sean A y B dos conjuntos, diremos que A es un subconjunto de B que escribiremos $A \subset B$, si para toda x que pertenece a A se tiene que x también pertenece a B. Es decir, todos los elementos de A lo son también de B.

Si A no es subconjunto de B, lo denotaremos por $A \not\subset B$

Ejemplos.

23. A = { 2, 4, 6, 8 } B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 } Es claro que $A \subset B$, puesto que $\forall\, x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$.
24. A = { Divisibles entre 4 } ; B = { Divisibles entre 2 } $A \subset B$ porque $\forall\, x$, si $x \in A \Rightarrow x \in B$ (si x es divisible entre 4, también será divisible entre 2).

Consideremos los siguientes conjuntos:

A = Enteros
$B = \{\ x \in A \mid x = 2n\ \}$

$C = \{ x \in A \mid x^2 \geqslant 0 \}$
$D = \{ x \in A \mid x^2 < 0 \}$

Puesto que B, C y D son conjuntos formados por elementos que están en A es claro que $B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$.

Sin embargo, veamos las características de cada uno de estos subconjuntos:

a) Para el caso $B \subset A$ tenemos que existen elementos x en A (x es impar) tales que $x \notin B$. Es decir, $A \neq B$.
b) Para el caso $C \subset A$, tenemos que todo elemento de A, también lo es de C, es decir, $A = C$.
c) Y finalmente, el caso $D \subset A$ se reduce a decir que el conjunto vacío es subconjunto de A ($\phi \subset A$), puesto que $D = \phi$.

Afirmamos que el vacío es subconjunto de A, porque decir que el vacío no es subconjunto A equivale a afirmar que existe un elemento en el conjunto vacío que no pertenece a A. Pero sabemos que el vacío no tiene elementos. Este razonamiento es válido para cualquier conjunto A, o sea, $\phi \subset A$ para todo conjunto A.

Definición. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es un subconjunto propio de B si sólo si:

a) $A \subset B$.
b) $A \neq B$.

y lo denotaremos por $A \subsetneq B$.

Ejemplos.

25. Si $A = \{ x \mid x$ es una letra del abecedario $\}$ y $B = \{ x \mid x$ es una vocal $\}$, entonces $B \subsetneq A$, ya que $B \subset A$ y $A \neq B$.
26. Si $A = \phi$ y $B = \{1, 2, 3\}$, entonces $A \subsetneq B$, ya que $\phi \subset B$ y $\phi \neq B$
27. Si $A = \{ a, b, c \}$ y $B = \{ a, b, c \}$, entonces A no es subconjunto propio de B, ya que: $A \subset B$ pero $A = B$.

Ahora veamos cuándo una proposición condicional cuantificada universalmente tiene valor de verdad vedadero.

28. p (x) : $x^3 = 0$; el conjunto solución de p (x) es p $= \{ 0 \}$ q (x) ; $x(x + 2) = 0$; el conjunto solución de q (x) es $Q = \{ 0, -2 \}$. Si

formamos la proposición condicional: $\forall x \in D\ p(x) \Rightarrow q(x)$, nos damos cuenta que ésta es una proposición que no es abierta y por lo tanto puede ser verdadera o falsa. Entonces, podemos dar las condiciones que se le exigirán para que sea verdadera, es decir, definiremos cuándo una proposición condicional cuantificada universalmente es verdadera y puesto que las definiciones no requieren demostraciones, podemos dar la definición que nos parezca más intuitiva.

En el ejemplo 26 que intuitivamente aceptamos como verdadero, observamos que $P \subset Q$ (el conjunto solución de p (x) es un subconjunto del conjunto solución de q (x).

Definición. La proposición $\forall x \in D$, p $(x) \Rightarrow$ q (x) es verdadera si y sólo si $P \subset Q$ donde P es el conjunto solución de p (x) y Q es el conjunto solución de q (x).

Ejemplos.

29. $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 \}$
p (x) : x es divisible por 6 ; $x \in U$
q (x) : x es divisible por 2 ; $x \in U$
$P = \{ 6, 12, 18 \}$; $Q = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 \}$
y $P \subset Q$ por lo tanto $\forall x$, p $(x) \Rightarrow$ q (x) es verdadera.

30. $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$
p (x) : x es un número primo, $x \in U$
q (x) : x es par , $x \in U$
$P = \{ 2, 3, 5, 7 \}$ $Q = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$
$P \not\subset Q$, por lo tanto $\forall x$; p $(x) \Rightarrow$ q (x) es falsa.

Negación

Expresiones como "$8 \neq 10$", "15 es mayor o igual que 10", España no está en América" o "Leonard Euler no es italiano", pueden ser escritas de la manera siguiente: no es verdad que "$8 = 10$", no es verdad que "15 es menor que 10"; no es verdad que "España está en América" y no es verdad que "Leonard Euler es italiano". Es decir, en cada caso estamos negando una proposición. Entonces, si p es la proposición $8 = 10$, la proposición $8 \neq 10$ es la negación de p y la escribimos como $\sim P$ que se lee no p (o no es verdad que P) de igual manera.

Si q : "15 es menor que 10", entonces $\sim q$: "15 no es menor que 10".
Si r : "España está en América", entonces $\sim r$: "España no está en América".
Si s : "Leonard Euler es italiano", entonces $\sim s$: "Leonard Euler no es italiano".

Así es que el símbolo $\sim$ se escribe para indicar la negación de la proposición y es llamado el conectivo negación.

Definición . Sea p una proposición, entonces "no p" que escribiremos $\sim p$, es la proposición negativa o negación de p.

Veamos las siguientes proposiciones:

p : $8 = 10$ es falsa, entonces $\sim p$: $8 \neq 10$ es verdadera.
p : Santiago de Chile está en Sudamérica que es verdadera, entonces,
$\sim p$: Santiago de Chile no está en Sudamérica, que es falsa.

Podemos concluir que el valor de verdad de la negativa $\sim p$ está dado por el siguiente axioma:

$\sim p$ es una proposición falsa si p es una proposición verdadera, y $\sim p$ es una proposición verdadera si p es una proposición falsa.

La tabla de verdad de ($\sim p$) está dada de la siguiente manera:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Ejemplos.

31. p : **Cristóbal Colón descubrió América (verdadero).** $\sim p$: **Cristóbal Colón no descubrió América (falso).**
32. q : 2^{2^5} **es un número primo (falso).** $\sim q$: 2^{2^5} **no es un número primo (verdadero).**

NEGACIÓN DE PROPOSICIONES CUANTIFICADAS

Consideremos las siguientes proposiciones para escribir enseguida su negación.

a) p : "Todos los estudiantes del TEC estudian Ingeniería".
b) q : "Ningún estudiante del TEC estudia Ingeniería".
c) r : "Algunos estudiantes del TEC estudian Ingeniería".
d) s : "Algunos estudiantes del TEC no estudian Ingeniería".

$\sim p$: Es falso que: Todos los estudiantes del TEC estudian Ingeniería.

o bien

$\sim p$: Al menos uno de los estudiantes del TEC no estudia Ingeniería.
$\sim q$: Al menos un estudiante del TEC estudia Ingenieria.
$\sim r$: Todos los estudiantes del TEC no estudian Ingeniería.
$\sim s$: Todos los estudiantes del TEC estudian Ingeniería.

Algunas negaciones más comunes de proposiciones cuantificadas.

Proposición		*Negación*
Todos	⟶	algunos. . . no
Algunos	⟶	Ningún
Algunos . . . no	⟶	Todos
Ningún	⟶	Algunos

En simbología expresaremos las proposiciones p, q, r y s con sus negaciones, donde D = {Estudiantes del TEC}

$p : \forall\, x \in D$; x estudia Ingeniería
$q : \forall\, x \in D$; x no estudia Ingeniería
$r : \exists\, x \in D$; x estudia Ingeniería
$s : \exists\, x \in D$; x no estudia Ingeniería.
$\sim p : \exists\, x \in D$; x no estudia Ingeniería.
$\sim q : \exists\, x \in D$; x estudia Ingeniería.
$\sim r : \forall\, x \in D$; x no estudia Ingeniería.
$\sim s : \forall\, x \in D$; x estudia Ingeniería.

Si consideramos $p\,(x)$: x estudia Ingeniería y $\sim p\,(x)$: x no estudia Ingeniería, en los ejemplos anteriores tenemos:

$\sim (p) \equiv \sim [\forall x \in D;\ p\,(x)] \equiv \exists\, x \in D;\ \sim p\,(x)$
$\sim (r) \equiv \sim [\exists\, x \in D;\ p\,(x)] \equiv \forall\, x \in D;\ \sim p\,(x)$
$\sim (q) \equiv \sim [\forall x \in D;\ \sim p\,(x)] \equiv \exists\, x \in D;\ p\,(x)$
$\sim (s) \equiv \sim [\exists\, x \in D;\ \sim p\,(x)] \equiv \quad x \in D;\ p\,(x)$

Con lo anterior se puede llegar a lo siguiente.

$$\sim [\nabla x \in D;\ p(x)] \equiv \exists\, x \in D;\ \sim p(x)$$
$$\sim [\exists\, x \in D;\ p(x)] \equiv \nabla\, x \in D;\ \sim p(x)$$

Es decir, la negación de una proposición cuantificada universalmente se convierte en una proposición cuantificada existencialmente y se niega $p(x)$, y la negación de una proposición cuantificada existencialmente se convierte a una Universal y se niega la proposición.

Ejemplos.

33. Escribir la negación de cada una de las siguientes proposiciones.

a) p : Todas las personas son alegres.
$\sim p$: Al menos una persona no es alegre.
b) q : Algunos animales son limpios.
$\sim q$: Todos los animales son sucios (aquí se considera que la negación de limpio es sucio).
c) r : Ningún estudiante es optimista.
$\sim r$: Algún estudiante no es optimista.
d) s : Algunos niños no lloran.
$\sim s$: Todos los niños lloran.
e) $\sim (\nabla x \in \{\text{enteros}\};\ x < 1) \equiv \exists\, x \in \{\text{enteros}\};\ x \geq 1$
f) $\sim (\exists\, x \in \{\text{enteros}\};\ \sqrt{x} = 0) \equiv \nabla\, x \in \{\text{entero}\};\sqrt{x} \neq 0$

Ejemplos.

34. p : Todos los números primos son impares.
$\sim p$: Existe un número primo que no es impar.
35. p : Existe un triángulo equilátero que tiene sus tres lados desiguales.
$\sim p$: Todos los triángulos equiláteros tienen sus tres lados iguales.

Usaremos el conectivo negación para definir el complemento de un conjunto dado.

Definición. Si consideramos a U como el conjunto universo y $A \subset U$, definimos el complemento de A, que denotaremos por A^c o A' como:

$$A' = A^c = \{\ x \in U \mid x \notin A\ \}$$

Es decir, son todos los elementos del universo que no pertenecen al conjunto A.

Ejemplos.

36. $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$
    Si $A = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ entonces $A^c = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$
37. $U = \{$ Letras del abecedario $\}$
    Si $A = \{$ consonantes $\}$ entonces $A^c = \{$ vocales $\}$
38. Si $A = U$, entonces $A^c = \phi$.
39. $U = \{$ Países del mundo $\}$
    $A = \{$ Países que tienen un gobierno militar $\}$
    $A^c = \{$ Países que no tienen un gobierno militar. $\}$

Consideremos la siguiente proposición:

p $(x) : x (x + 2) (x - 3) = 0 : x \in$ Enteros
El conjunto solución es $P = \{ 0, -2, 3 \}$

Ahora consideremos $\sim p : x (x + 2) (x - 3) \neq 0$, el conjunto solución de $\sim p$ es $\{ x \in$ Enteros $| x \notin P \}$; es claro que este conjunto es P^c.

Entonces, podemos decir que el conjunto solución de $\sim$ p (x) es P^c, donde P es el conjunto solución de p (x).

Ejemplos.

40. Si p $(x) : x - 3 = 0$, el conjunto solución de $P = \{ 3 \}$ y si consideramos:
    $\sim$ p $(x) : x - 3 \neq 0$, el conjunto solución es:
    $$P^c = \{ x \mid x \neq 3 \} \quad \}$$
41. Si p $(x) : x$ es un mexicano que es burócrata, el conjunto solución de p (x) es $P = \{$ burócratas mexicanos $\}$ y si consideramos $\sim$ de p $(x) : x$ es un mexicano que no es burócrata, el conjunto solución de $\sim$ p (x) es $P^c = \{ x \mid x$ es mexicano y no es burócrata. $\}$

En todos los ejemplos dados para la negación podrás comprobar que $A \cap A^c = \phi$ y que $A \cup A^c = U$. Si $x \in A^c$ significa que $x \in U$ y $x \notin A$.

Una generalización del complemento de A es la que da lugar a definir la diferencia entre dos conjuntos.

Definición. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, definimos el conjunto diferencia $A - B$ como sigue:

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \notin B \}$$

Observación. A^c se puede considerar como la diferencia entre U y A. O sea.

$$A^c = U - A = \{ x \mid x \in U \text{ y } x \notin A \}$$

Ejemplos.

42. Si $A = \{ 2, 3, 4, 5 \}$
    y $B = \{ 4, 5 \}$
    Entonces $A - B = \{ 2, 3 \}$
43. Si $A = \{ a, e, i, o, u \}$
    y $B = \{ e, o, b, v \}$
    Entonces $A - B = \{ a, i, u \}$
44. Si $A = \{ a, e, i \}$ y $B = \{ o, u \}$
    Entonces A − B = { a, e, i } = A
45. Si $A = \{ a, e \}$ y $B = \{ a, e, i, o, u \}$
    Entonces $A - B = \phi$

A partir de la implicación "$p \Rightarrow q$" se pueden establecer las siguientes implicaciones:

a) Recíproca de la implicación : $q \Rightarrow p$
b) Contraria de la implicación: $\sim p \Rightarrow \sim q$
c) Contra recíproca de la implicación: $\sim q \Rightarrow \sim p$

Si obtenemos las tablas de verdad de $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$ observamos que las dos implicaciones no son equivalentes.
Es decir, $(p \Rightarrow q) \neq (q \Rightarrow p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Por lo que una condicional y su recíproca no son equivalentes.
Consideremos las siguientes implicaciones y su recíproca.

Condicional: Si es helado de limón, entonces se derrite.
Recíproca: Si se derrite, entonces es helado de limón.

Aquí observamos que la condicional es cierta, mientras que la recíproca no, ya que si se derrite pudiera ser mantequilla.

Condicional: Si un triángulo es equilátero, entonces sus tres lados son iguales.
Recíproca: Si los tres lados de un triángulo son iguales, entonces es equilátero.

Se observa que la Condicional y la Recíproca son ciertas.

Observación. Si una Condicional es cierta, su Recíproca puede que sea o no verdadera.

Una Condicional y su contraria no son equivalentes y la verificaremos en la siguiente tabla:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Es decir, $(p \Rightarrow q) \not\equiv (\sim p \Rightarrow \sim q)$
Véamos las siguientes implicaciones y sus contrarias.

Condicional: Si es helado de limón, entonces se derrite.
Contraria: Si no es helado de limón, entonces no se derrite.

Aquí la Condicional es cierta y la Contraria no lo es, ya que si no es helado de limón, pudiera ser nieve que sí se derrite.

Condicional: Si es sábado, entonces voy a la Disco.
Contraria: Si no es sábado, entonces no voy a la Disco.

Se observa que la Condicional y la Contraria son ciertas.

Observación. Si una Condicional es cierta, su Contraria puede ser que sea cierta o no.

Una Condicional y su Contrarrecíproca sí son equivalentes y se verificará en la siguiente tabla de verdad.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

por lo que $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Ejemplo 46.

Condicional: Si es helado de limón, entonces se derrite.
Contrarrecíproca: Si no se derrite, entonces no es helado de limón.

Tanto la Condicional como la Contrarrecíproca son ciertas.

Observación. Si una Condicional es cierta también lo será su contrarrecíproca

Ejemplo 47.

Escribir la Recíproca, Contraria y Contrarrecíproca de la Implicación. Si un número es impar entonces su cuadrado es impar.

Recíproca: Si el cuadrado de un número es impar entonces el número es impar.
Contraria: Si un número es par entonces su cuadrado es par.

Contrarrecíproca: Si el cuadrado de un número es par, entonces el número es par.

Ejercicios

1. Escribir el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   a) Si $3 + 2 = 7 \Rightarrow 10$ es menor que 3.
   b) Si Nuevo León es la capital de San Luis $\Rightarrow 3 + 0 = 3$.
   c) Si Daniel Bautista obtuvo una medalla de oro en Montreal ⇒ México fue eliminado en basquetbol.
   d) Si 2 es un número primo ⇒ 1000 es un número par.
   e) Si Acapulco está en Oaxaca ⇒ el 1 es un número primo.
   f) Si Monterrey es una ciudad industrial ⇒ Tampico es un puerto.
   g) Si la suma de dos impares es par ⇒ la suma de dos pares es impar.
   h) Si Puebla es Puerto ⇒ todo número al cuadrado es mayor que cero.

2. En cada uno de los siguientes problemas, determinar el valor de verdad; considere a los enteros como el universo.

   a) $\exists\ x,\ x = x + 1$
   b) $\exists\ x,\ -x$ es positivo.
   c) $\exists\ x,\ x + 1$ es mayor que cero.
   d) $\exists\ x,\ x + 0 = x$
   e) $\forall\ x,\ x^2$ es negativo.

f) $\forall\ x,\ +\sqrt{x}$ es un entero.
g) $\forall\ x,\ (x+2)(x-2) \neq x^2 - 4$
h) $\forall\ x,\ (x+2)^2 = x^2 + 2x + 4$
i) $\forall\ x,\ x + 6 = 10$.

3. Use el cuantificador correcto para escribir las siguientes proposiciones de tal manera que éstas sean verdaderas.
Considere el universo como el conjunto de los enteros.

a) $x - 6 = 0$
b) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$
c) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
d) $x^2 - 4 = 0$
e) $5x = 5$
f) x es un número entre 1 y 5.
g) $(x-5)(x+5) = x^2 - 25$
h) x^2 es un número impar
i) $x + x$ es un número par
j) $(x+3)(x-5) = x^2 - 2x - 15$.

4. Encuentre el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones donde el Dominio = D = { Reales }

a) $\forall\ x \in D$, si $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \vee x = -2$
b) $\forall\ x \in D$, si $x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 81$
c) $\forall\ x \in D$, si $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = -3$
d) $\forall\ x \in D$, si $x = -8 \Rightarrow x \neq 6$
e) $\forall\ x \in D$, si x^2 es menor que cero $\Rightarrow x$ es un número par.
f) $\forall\ x \in D$, si $x^2 \neq 25 \Rightarrow x \neq 5$

5. Utilizar cuantificadores para representar las siguientes proposiciones:

a) Algunos números son enteros.
b) Todos los estudiantes son responsables.
c) Algunos números son primos.
d) Todos los problemas del examen son difíciles.
e) Todos los hombres son mortales.
f) Todo individuo es deshonesto.
g) Por lo menos un jugador de futbol es médico.
h) Algunos profesores son irresponsables.
i) Existe un ciudadano que no ejerce su derecho de voto.
j) Todo cuadrado es un rectángulo.

6. Escribir la negación en forma simbólica y en el lenguaje común de cada una de las proposiciones del problema anterior.

7. Para cada una de las proposiciones dadas a continuación: (i) Traducirla a la forma simbólica; (ii) Escribir la negación en el lenguaje ordinario (iii) obtener el valor de verdad de la negación .

   a) Algunos animales son sucios.
   b) Ningún estudiante es organizado.
   c) Todos los estudiantes son jóvenes.
   d) Ninguna persona es entusiasta.
   e) Existe al menos un número entero que sumado con tres es cero.
   f) Todos los matemáticos son agrios.
   g) Existe por lo menos una persona que no paga impuestos.
   h) Ningún triángulo es cuadrado.
   i) Ninguna persona amable es peligrosa.
   j) Existe un mes que tiene 35 días.
   k) Por lo menos para un número entero, su cuadrado es negativo.
   l) Todas las manzanas son rojas.
   m) Algunos dígitos no son impares.
   n) Algunos rectángulos no son cuadrados.

8. Encuentre el complemento de cada uno de los conjuntos dados:

   a) $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}, A = \{ 1, 4, 8, 9, 10 \}$
   b) $U = \{$ Enteros $\}$ $A = \{ x \mid x$ es divisible por 11 $\}$
   c) $U = \{$ Ex presidentes de México $\}$, $A = \{ x \mid x$ no es militar $\}$
   d) $U = \{$ Familias mexicanas $\}$, $A = \{ x \mid$ en la x hay más de 5 hijos $\}$

9. Si $U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

   $A = \{ 0, 2, 4, 6, 8, 10 \}$, $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ y
   $C = \{ 1, 4, 7, 10 \}$

   Encontrar los siguientes conjuntos:

   a) $A - C$
   b) $C - A$
   c) $(A - B) - C$
   d) $(A - B) \cup (B - C)$
   e) $(A - B) \cup (B - A)$
   f) $(A \cup B) - (A \cap B)$
   g) $A - (B \cup C)$
   h) $(A - B) \cup (A - C)$
   i) $A' - (B \cup C')$
   j) $(A - B)' \cup (B - A)$

10. Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g, i, o, p, u, v\}$
$A = \{a, e, i, o, u\}$
$B = \{b, d, f, g\}$
$C = \{a, b, o, f, u, g\}$
$D = \{o, f, u, g\}$

Encuentre.

a) $A - B$
b) $(A \cup B) - C$
c) $(B \cap C) - D$
d) $(A - B) \cup (B - A)$
e) $(A \cup B) - (A \cap B)$
f) $C - D$
g) $D - C$
h) $B - A$
i) A'
j) C'
k) $A' \cup B'$
l) $(A \cup B)'$
m) $A' \cap B'$
n) $(A \cap B)'$
ñ) $(A - B)$
o) $A' - B'$
p) $A' - (B \cup C)$
q) $(A \cap B) - D$
r) $(A \cup B)' - (A \cap B)'$
s) $(C - D)' \cup (D - C)$
t) $C' \cap (D' \cup B')$
u) $A' \cup (B' \cap C')$

11. Si $A = \{1, 2, \}$, $B = \{1, 2, 3, \}$
$C = \{1, 2, 3, 4, \}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, \}$

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $A \subset B$
b) $U \subset A$
c) $B \subset A$
d) $B \subset U$
e) $C \subset B$
f) $A \subset C$
g) $C \subsetneq C$
h) $U \subsetneq A$

i) $A \subsetneq U$

j) $B \subsetneq C$

k) $C \subsetneq U$

l) $C \subsetneq A$

m) $3 \subset U$

n) $\{ 4 \} \in C$

ñ) $8 \in U$

o) $\{ 4, 5 \} \subsetneq U$

p) $\phi \subsetneq A$

q) $\{ 3 \} \subset \phi$

r) $1 \subset C$

s) $\{ 2, 3 \} \in C$

t) $\{ 5 \} \in U$

u) $\phi \in U$

12. Escribir la Recíproca, Contraria y Contrarrecíproca de cada una de las siguientes implicaciones.

a) Si Popeye come espinacas entonces es fuerte.
b) Si Juan obtiene calificación de 9 o más entonces su papá le regalaría un coche.
c) Si usted quiere ser hermosa entonces use la crema Azteca.
d) Si usted va al gimnasio "Haga fuerza", entonces será saludable.
e) Si Luis lee el periódico "Novedades" entonces Luis está bien informado.
f) Si un número es entero entonces su cuadrado es positivo.
g) Si una figura es un cuadrado entonces es un rectángulo.

Sección 1.4

BICONDICIONAL

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir proposición bicondicional.
2. Escribir la tabla de verdad de la bicondicional.
3. Determinar el valor de verdad de una proposición bicondicional.
4. Determinar el valor de verdad de proposiciones bicondicionales abiertas.
5. Formar la tabla de verdad de proposiciones que involucren conectivos.

6. Definir equivalencia de proposiciones.
7. Probar equivalencias de proposiciones.
8. Definir igualdad de conjuntos.
9. Probar igualdades de conjuntos.
10. Verificar igualdad de conjuntos.

Consideremos las siguientes proposiciones:

$$p : 2 + 3 = 5 \qquad q : 3 + 0 = 3$$

Podemos formar la siguiente proposición:

$$"p \Rightarrow q \ \wedge \ q \Rightarrow p"$$

esto es:

"Si $2 + 3 = 5$, entonces $3 + 0 = 3$ y
Si $3 + 0 = 3$, entonces $2 + 3 = 5$".

Esta nueva proposición "$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$" está formada mediante dos implicaciones y una conjunción.

Podemos escribir esta proposición haciendo uso de un nuevo conectivo. Así es que la proposición "$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$" la escribiremos como:

$$p \Leftrightarrow q.$$

Y se leerá "p si y sólo si q".

El símbolo $\Leftrightarrow$ es llamado el *conectivo bicondicional* o doble implicación. A la proposición formada la llamaremos *proposición bicondicional*. Formalizando esto último llegamos a la siguiente definición.

Definición. A la proposición que resulta de unir dos proposiciones por medio del conectivo bicondicional, la llamaremos proposición bicondicional.

Recordando que $p \Leftrightarrow q$ significa $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, podemos encontrar el valor de verdad de cada una de las bicondicionales siguientes:

Ejemplos.

1. p: $2(3) = 6 \Leftrightarrow q$: $3(1) = 3$

   tenemos

$$p \Rightarrow q \ (V) \quad , \quad q \Rightarrow p \ (V)$$
$$(p \Rightarrow q \ \wedge \ q \Rightarrow p) \ (V)$$

por lo tanto, $p \leftrightarrow q$ es (V).

2. p : Benito Juárez es un ex presidente de México $\leftrightarrow$ q : Linares es la capital de Nuevo León.

$$p \rightarrow q \ (F) \qquad q \rightarrow p \ (V)$$
$$(p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p) \ (F)$$

por lo tanto, $p \leftrightarrow q$ es (F).

3. p : 6 es mayor que 10 $\leftrightarrow$ q : Lima es la capital de Perú.

$$p \rightarrow q \ (V), \qquad q \rightarrow p \ (F)$$
$$(p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p) \ (F)$$

por lo tanto, $p \leftrightarrow q$ es (F).

4. p : Bogotá está en Brasil $\leftrightarrow$ q : 13 es divisible por 3.

$$p \rightarrow q \ (V), \qquad q \rightarrow p \ (V)$$
$$(p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p) \ (V)$$

por lo tanto, $p \leftrightarrow q$ es (V).

Observando estos ejemplos podemos concluir que el valor de verdad de la proposición bicondicional está dado mediante el siguiente axioma:

> Si p y q tienen el mismo valor de verdad, entonces $p \leftrightarrow q$ es verdadera, y si p y q tienen valor de verdad opuestos, entonces $p \leftrightarrow q$ es falsa.

Esto queda establecido en la siguiente tabla.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Al relacionar dos proposiciones abiertas mediante el bicondicional tenemos,

$$p\ (x) \Leftrightarrow q\ (x)$$

que realmente quiere decir que:

$$\forall\ x\ ,\ p\ (x) \Leftrightarrow q\ (x)$$

o sea.

$$\forall\ x,\ \text{“}p\ (x) \Rightarrow q\ (x) \wedge q\ (x) \Rightarrow p\ (x)\text{”}$$

De igual manera que con el condicional tenemos una proposición cerrada y el valor de verdad se determina al observar que $\forall\ x,\ p\ (x) \Rightarrow q\ (x)$ es verdadera cuando $P \subset Q$ y $q\ (x) \Rightarrow p\ (x)$ es verdadera, cuando $Q \subset P$, donde P y Q son los conjuntos soluciones de $p\ (x)$ y $q\ (x)$ respectivamente.

Definición. La proposición $\forall\ x, p\ (x) \Leftrightarrow q\ (x)$ es verdadera si sólo si $P \subset Q$ y $Q \subset P$.

Ejemplos:

5. $p\ (x) : x^2 - 16 = 0;\ x \in$ Enteros
   $q\ (x) : x^2 - 8x + 16 = 0;\ x \in$ Enteros.
   $p\ (x) \Leftrightarrow q\ (x) : x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0; x \in$ Enteros.
   $P = \{\ 4, -4\ \}\quad Q = \{\ 4\ \}$

   de donde concluimos que $\forall\ x, p\ (x) \Leftrightarrow q\ (x)$ es falsa.

TABLAS DE VERDAD

Al formar el conectivo bicondicional relacionamos proposiciones con los conectivos conjunción y condicional. Podemos pensar en formar nuevas proposiciones relacionando proposiciones dadas con los conectivos ya conocidos y podremos encontrar la tabla de verdad para la proposición que resulta.

Ejemplos.

6. Formar la tabla de verdad de la proposición $p \wedge \sim q$.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

7. Formar la tabla de verdad de $p \Rightarrow (\sim p \vee q)$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \Rightarrow (\sim p \vee q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

8. Forma la tabla de verdad de la proposición:

$$M = \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim p)]$$

p	q	$(p \wedge q)$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim q$	$(p \Rightarrow \sim q)$	$(\sim p)$	$[(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim p)]$	M
V	V	V	F	F	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

9. Forma la tabla de verdad de la proposición: $p \Rightarrow (q \vee r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Antes de relacionar el conectivo bicondicional con los conjuntos, definiremos el concepto de equivalencia de proposiciones que nos conducirá a definir igualdad de conjuntos.

Definición. Dos proposiciones son equivalentes si sus tablas de verdad son idénticas. Usaremos el símbolo $\equiv$ para denotar equivalencia.

Ejemplos:

10. Verificar la equivalencia: $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$. La tabla para la proposición: $\sim(p \wedge q)$ es

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
v	v	v	f
v	f	f	v
f	v	f	v
f	f	f	v

y la tabla para la proposición: $\sim p \vee \sim q$ es

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
v	v	f	f	f
v	f	f	v	v
f	v	v	f	v
f	f	v	v	v

Entonces, las proposiciones son equivalentes, ya que sus tablas en su última columna son iguales para todas las posibilidades de p y de q.

11. $\sim(\sim p) \equiv p$

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

12. $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

13. Verificar la equivalencia: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
La tabla para la proposición: $p \wedge (q \vee r)$ es

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

y la tabla de verdad para la proposición: $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Por lo que las dos proposiciones sí son equivalentes, ya que sus tablas coinciden en su última columna para las mismas posibilidades de *p y de q*.

14. Comprobar la equivalencia: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$		$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V		V
V	F	F	V	F		F
F	V	V	F	F		F
F	F	V	V	V		V

Por lo que las proposiciones sí son equivalentes.

Definición. Una proposición será llamada una *tautología* si para cualquier valor de sus componentes, su valor de verdad siempre es verdadero.

Definición. Una proposición será llamada una *contradicción* si para cualquier valor de sus componentes, su valor de verdad siempre es falso.

Ejemplos.

15. $p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

de donde la proposición $p \vee \sim p$ es una tautología.

16. $p \wedge \sim p$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

de donde la proposición $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

17. $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$
V	F	V	V
F	V	F	V

de donde la proposición es una tautología.

18. Indicar si la proposición: $M = \sim[(\sim a \Rightarrow \sim b) \Leftrightarrow (b \Rightarrow a)]$ es una Tautología o Contradicción.

a	b	$\sim a$	$\sim b$	$\sim a \Rightarrow \sim b$	$b \Rightarrow a$	$[(\sim a \Rightarrow \sim b) \Leftrightarrow (b \Rightarrow a)$	M
V	V	F	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	F

de donde la proposición es una Contradicción.

19. $P = a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

a	b	c	$b \wedge c$	$a \vee (b \wedge c)$	$a \vee b$	$a \vee c$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$	P
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

de donde la proposición $P = a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ es una tautología.

Observaciones.

a) Puesto que cada proposición puede ser verdadera (V) o falsa (F), el número de renglones que tiene cada tabla es igual a 2^n, donde n es el número de proposiciones que intervienen, así en los ejemplos 10, 12 y 14 aparecen $2^2 = 4$ renglones; en el ejemplo 13 hay $2^3 = 8$ renglones.

b) Cuando decimos que dos proposiciones son equivalentes si tienen sus tablas de verdad idénticas, queremos decir que las columnas de las proposiciones y la última columna en cada tabla son iguales. Así, en el ejemplo 13 las primeras tres columnas y la última en cada tabla son iguales.

c) La equivalencia probada en el ejemplo 10 $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$ junto con la equivalencia $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ son llamadas las Leyes de De Morgan para proposiciones.

d) La equivalencia del ejemplo 14 nos conducirá a la definición de igualdad de conjuntos.

Consideremos esta última equivalencia para proposiciones abiertas:

$$(\, p\,(x) \Rightarrow q\,(x)\,) \wedge (\, q\,(x) \Rightarrow p\,(x)\,) \equiv p\,(x) \Leftrightarrow q(x)$$

Ahora recordemos que $p\,(x) \Rightarrow q\,(x)$ es verdadera si y sólo si $P \subset Q$, $q\,(x) \Rightarrow p\,(x)$ si y sólo si $Q \subset P$. Además, $p\,(x) \Leftrightarrow q\,(x)$ es verdadera si y sólo si $P \subset Q \wedge Q \subset P$, entonces tenemos que:

Definición. Sean A, B dos conjuntos cualesquiera, diremos que $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$

Esto significa que A y B tienen los mismos elementos.

Observación. $\forall\, x$, $p\,(x) \Leftrightarrow q\,(x)$ es verdadera si y sólo si $P = Q$.

Ejemplo.

1. $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$

Solución:

Primero probaremos que $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$.

$\forall x,\ x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \notin (A \cap B)$ (definición de complemento)
$\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$ (definición de intersección).
$\Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c$ (definición de complemento)
$\Rightarrow x \in (A^c \cup B^c)$ (definición de unión)

hemos probado que $\forall x, x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \in (A^c \cup B^c)$

Por lo tanto.

$$(A \cap B)^c \subset (A^c \cup B^c) \qquad (1)$$

Ahora probaremos que $(A^c \cup B^c) \subset (A \cap B)^c$.

$\forall x, x \in (A^c \cup B^c) \Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c$
$\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$
$\Rightarrow x \notin (A \cap B)$
$\Rightarrow x \in (A \cap B)^c$

Entonces $\forall x, x \in (A^c \cup B^c) \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$.
Por tanto

$$(A^c \cup B^c) \subset (A \cap B)^c \qquad (2)$$

De 1 y 2 concluimos la igualdad $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$. Pudimos haber probado las dos condiciones simultáneamente de la siguiente manera:

$\forall x, x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$
$\Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c$
$\Leftrightarrow x \in (A^c \cup B^c)$

es decir,

$\forall x, x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$. Por lo tanto:
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

20. $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

$\forall x, x \in (A - B) \cup (B - A) \Leftrightarrow x \in (A - B) \vee x \in (B - A)$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$
$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)$
$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)$
$\Leftrightarrow x \in [\ (A \cup B) - (A \cap B)\ ]$

Entonces:

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Con frecuencia no tenemos necesidad de probar que una igualdad de conjuntos se cumple, sino que solamente tenemos que verificar dicha igualdad para conjuntos particulares.

Ejemplo.

21. $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 \}$
$A = \{ 1, 3, 8, 11, 12, 13, 14, 15 \}$
$B = \{ 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 14 \}$
$C = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \}$

1. $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 \}$
2. $A \cap B = \{ 3, 8, 11, 14 \}$
3. $A - B = \{ 1, 12, 13, 15 \}$
4. $B - A = \{ 2, 4, 7, 9, 10 \}$
5. $A^c = \{ 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10 \}$
6. $B^c = \{ 1, 5, 6, 12, 13, 15 \}$
7. $A^c \cup B^c = \{ 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15 \}$
8. $(A \cap B)^c = \{ 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15 \}$

TRADUCCIÓN Y COMBINACIÓN DE CONECTIVOS

Al trabajar con proposiciones compuestas se requiere la habilidad de traducir al lenguaje ordinario o común al simbólico y del simbólico al lenguaje común.

Ejemplos.

22. Supongamos que:

p: Popeye come espinacas
q: Popeye es fuerte

y se desea traducir las siguientes proposiciones al lenguaje común.

a) $p \wedge q$	*e)* $\sim(\sim q)$	i) $p \Rightarrow q$
b) $\sim p$	*f)* $p \wedge \sim q$	*j)* $p \Leftrightarrow \sim q$
c) $\sim p \vee q$	*g)* $\sim p \vee (\sim q)$	*k)* $\sim q \Rightarrow \sim p$
d) $\sim(p \vee q)$	*h)* $\sim(p \wedge q)$	*l)* $\sim(p \Rightarrow q)$
		m) $\sim(p \Rightarrow q)$

Solución.

a) $p \wedge q$: Popeye come espinacas y es fuerte.
b) $\sim p$: Popeye no come espinacas.

c) $\sim p \vee q$: Popeye no come espinacas o es fuerte
d) $\sim (p \vee q)$: Es falso que; Popeye come espinacas o es fuerte.

Observación.

Como $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ entonces la última proposición también se puede expresar como:

"Popeye no come espinaca "y" no es fuerte"

e) $\sim (\sim q)$: Es falso que; Popeye no es fuerte.

Observación.

Como $\sim (\sim q) \equiv q$ entonces la proposición $\sim (\sim q)$ se traduce a "Popeye es fuerte".

f) $p \wedge \sim q$: Popeye come espinacas y no es fuerte.
g) $\sim q \vee \sim q$: Popeye no come espinacas o no es fuerte.
h) $\sim (p \wedge q)$: Es falso que; Popeye come espinacas y es fuerte.

Observación.

Como $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$, entonces la proposición anterior se expresa. Como "Popeye no come espinacas 'o' no es fuerte".

i) $p \Rightarrow q$: Si Popeye come espinacas entonces es fuerte.
j) $p \Leftrightarrow \sim q$: Popeye come espinacas si y sólo si no es fuerte.
k) $\sim q \Rightarrow \sim p$: Si Popeye no es fuerte entonces no come espinacas.
l) $\sim (p \Leftrightarrow q)$: Es falso que; Popeye come espinacas si y sólo si es fuerte.

Observacion.

Como $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$ ó $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$, entonces la última expresión se puede expresar como:

"Popeye no come espinacas si y sólo si es fuerte",
o "Popeye come espinacas si y sólo si no es fuerte".

m) $\sim (p \Rightarrow q)$: Es falso que; "Si Popeye come espinacas entonces es fuerte".
y como $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ se expresa también como,
"Popeye come espinacas y no es fuerte".

23. Sea p: Ramón fue a la Universidad
q: Ramón tiene éxito.

Traduciremos al lenguaje simbólico las siguientes proposiciones.

a) Ramón fue a la Universidad y tiene éxito $p \wedge q$.
b) Ramón no tiene éxito y no fue a la Universidad: $\sim p \wedge q$.
c) Ramón tiene éxito si y sólo si va a la Universidad: $q \Leftrightarrow p$.
d) Ramón no tiene éxito: $\sim q$
e) Si Ramón no tiene éxito entonces no fue a la Universidad: $\sim q \Rightarrow \sim p$.

Ejercicios

1. Encuentre el valor de verdad de las siguientes proposiciones bicondicionales.

a) $6 + (-6) = 0 \Leftrightarrow (8)(1/8) = 1$
b) 27 es un número primo $\Leftrightarrow$ 81 es divisible por 3
c) (-10) es mayor que cero $\Leftrightarrow$ (-10) es menor que cero.
d) $3 + 2 \neq 5 \Leftrightarrow 3 \times 2 \neq 10$
e) Jalisco tiene menos de un millón de habitantes $\Leftrightarrow$ Mérida es la capital de Yucatán.
f) Zaire es un país africano $\Leftrightarrow$ Guatemala es un país sudamericano.

2. Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, donde $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

a) $\forall x \in D,\ x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$
b) $\forall x \in D,\ (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$
c) $\forall x \in D,\ 2x + 3 = -3 \Leftrightarrow x = 3$
d) $\forall x \in D,\ x^2 = 4 \Leftrightarrow (x - 2)(x +) = 0$
e) $\forall x \in D$, x^2 es mayor que cero $\Leftrightarrow$ x es mayor que cero.

3. Hallar la tabla de verdad de las siguientes proposiciones y decir si éstas son tautologías, contradicciones o de ninguna.

a) $\sim p \vee q$
b) $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$
c) $\sim (p \Leftrightarrow \sim q)$
d) $\sim (p \vee q) \wedge \sim (q \Rightarrow p)$
e) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
f) $\sim (\sim p \Leftrightarrow q)$

g) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
h) $\sim [\ (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)\ ] \vee \sim p$
i) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim q \vee p)$
j) $(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow [\sim (p \vee q) \Rightarrow \sim p]$
k) $[\ p \wedge (q \Leftrightarrow \sim r)\ ] \wedge [\ (\sim p \wedge r) \Rightarrow \sim q]$
l) $[\ (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)\ ] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$
m) $[\ (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\ ] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
n) $[\ p \wedge (q \vee r)\ ] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)\ ]$
ñ) $[\ (p \Rightarrow \sim q) \wedge \sim (q \vee r)] \Leftrightarrow \sim r$

4. Comprobar por tablas de verdad para cada uno de los siguientes incisos si las proposiciones son equivalentes.

a) $p \vee q \equiv q \vee p$
b) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim (p \vee q)$
c) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$
d) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
e) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
f) $\sim (\sim p \vee q) \equiv \sim (p \Rightarrow q)$
g) $p \vee \sim p \equiv p \wedge \sim p$
h) $(p \vee p) \wedge p \equiv \sim p$
i) $(p \wedge q) \vee (p \vee q) \equiv p \vee q$
j) $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q) \equiv \sim p \Rightarrow q$

5. Probar por tablas de verdad que las siguientes negaciones son equivalentes:

$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (Ley de Morgan)
$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ (Ley de Morgan)
$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

6. Utilizando el problema anterior simplificar las siguientes proposiciones:

a) $\sim (\sim p \Rightarrow \sim q)$
b) $\sim (\sim p \wedge \sim q)$
c) $\sim (p \vee \sim q)$
d) $\sim (p \Leftrightarrow \sim q)$
e) $\sim (p \Rightarrow \sim q)$
f) $\sim (\sim p \vee \sim q)$
g) $\sim (\sim p \Leftrightarrow q)$
h) $\sim (p \Rightarrow \sim q)$

7. Probar las siguientes leyes del álgebra de proposiciones:

a) Leyes de idempotencia.

$$p \vee p \equiv p \qquad p \wedge p \equiv p$$

b) Leyes asociativas.

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

c) Leyes conmutativas.

$$p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

d) Leyes distributivas.

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

e) Ley de complemento.

$$\sim (\sim p) \equiv p$$

f) Leyes de Morgan.

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$
$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

8. Probar las siguientes leyes del álgebra de conjuntos:

a) Leyes de idempotencia.

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

b) Leyes asociativas.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

c) Leyes conmutativas.

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

d) Leyes distributivas.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

e) Leyes de identidad.

$$A \cup \phi = A \qquad A \cap U = A$$
$$A \cup U = U \qquad A \cap \phi = \phi$$

f) Leyes de complemento.

$$A \cup A' = U \qquad A \cap A' = \phi$$
$$(A')' = A \qquad U' = \phi \ , \ \phi' = U$$

g) Leyes de Morgan.

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

9. Deducir si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones.

a) Si 3 + 2 = 8 entonces 5 + 5 = 10
b) 2 + 2 = 5 si sólo si 4 + 5 = 12
c) Si París está en Francia entonces Monterrey está en México.
d) Es falso que si Washington está en Canadá entonces Toronto está en Estados Unidos.
e) No es verdad que 3 es menor que 0 sólo si 8 es mayor que 0.
f) No es verdad que si un triángulo tiene tres ángulos entonces un cuadrado tiene cuatro ángulos.
g) 2 es un número par si sólo si 4 es un número primo.
h) Si 16 es un número impar entonces $\sqrt{-2}$ es un número racional.
i) Si Cantinflas es un cirujano entonces Charles Chaplin es un artista.
j) No es verdad que $\sqrt{4} = 2$, entonces $2^3 = 8$.

10. Sean p: Ucrania es el granero de CEI.
q Ucrania se independiza.
Traducir las siguientes proposiciones al lenguaje ordinario.

a) $\sim q$
b) $p \wedge \sim q$
c) $\sim (p \wedge q)$
d) $p \Rightarrow q$
e) $p \Leftrightarrow \sim q)$
f) $\sim q \Rightarrow \sim p$
g) $\sim (p \vee q)$
h) $p \wedge \sim q$
i) $\sim (p \Rightarrow q)$
j) $\sim (p \Leftrightarrow q)$
k) $p \wedge q$
l) $\sim (\sim p)$

11. Sean p: Manuel quebranta la ley
q: Manuel va a la cárcel.
Traducir al lenguaje simbólico las siguientes proposiciones.

a) Manuel quebranta la ley si y sólo si va a la cárcel.
b) Si Manuel no va a la cárcel entonces no quebranta la ley.
c) Manuel no quebranta la ley y no va a la cárcel.
d) Es falso que; Manuel no va a la cárcel y no quebranta la ley.
e) Manuel no va a la cárcel o Manuel no quebranta la ley.

12. Sean p: Tomás es inteligente.
q: A Tomás le gusta leer libros de física.
Traducir al lenguaje común las siguientes proposiciones

a) $\sim (\sim p)$	*e*) $\sim(p \wedge q)$	i) $\sim q \Rightarrow \sim p$
b) $\sim p \wedge q$	*f*) $\sim (p \vee q)$	j) $p \wedge q$
c) $\sim (p \Rightarrow q)$	*g*) $p \wedge q$	*k*) $p \vee q$
d) $\sim (p \Leftrightarrow q)$	*h*) $p \Rightarrow \sim q$	*l*) $p \sim q$

Sección 1.5

TIPOS DE CONJUNTOS Y DIAGRAMAS DE VENN

Objetivos

Después de estudiar esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Reconocer la definición de los siguientes conceptos:
   a) Correspondencia biunívoca entre dos conjuntos.
   b) Sección del conjunto de los números naturales.
   c) Cardinalidad de un conjunto.
   d) Conjunto finito e infinito.
   e) Conjuntos disjuntos.
2. Representar operaciones con conjuntos mediante diagramas de Venn-Euler.
3. Encontrar el conjunto potencia de un conjunto dado.
4. Emplear diagramas de Venn-Euler y cardinalidad para resolver problemas de conteo.

De acuerdo a la cantidad de elementos que tiene un conjunto, podemos clasificarlos dando definiciones de algunos tipos de ellos.

Antes, introduciremos el concepto de cardinalidad, que nos determina cuántos elementos tiene un conjunto.

Definición. Diremos que hay una correspondencia biunívoca (o uno a uno) entre los conjuntos A y B si y sólo si cada elemento del conjunto A está relacionado con uno y sólo un elemento del conjunto B.

Ejemplo.

1. Si $A = \{ a, e, i, o, u \}$ $\quad B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

Entonces existe una correspondencia uno a uno entre ellos.
Esto es:

$$a \longleftrightarrow 1;\ e \longleftrightarrow 2;\ i \longleftrightarrow 3;\ o \longleftrightarrow 4;\ u \longleftrightarrow 5.$$

Observación. La correspondencia uno a uno entre A y B no es única, podemos también tener las siguientes:

$$\begin{array}{ll} a \longleftrightarrow 2 & a \longleftrightarrow 3 \\ e \longleftrightarrow 5 & e \longleftrightarrow 4 \\ i \longleftrightarrow 1 & i \longleftrightarrow 2 \\ o \longleftrightarrow 3 & o \longleftrightarrow 1 \\ u \longleftrightarrow 4 & u \longleftrightarrow 5 \quad \text{etc.} \end{array}$$

Ejemplos.

2. Si $A = \{ x \mid x$ es un mes del año $\}$ y
   $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$
   Entonces existe una correspondencia biunívoca entre A y B.

3. Si $A = \{$ Enteros negativos $\} = \{ -1, -2, -3, \ldots \}$
   y $B = \{$ Enteros positivos $\} = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$
   Entonces existe una correspondencia biunívoca entre A y B.

   O sea:

$$\begin{array}{ll} -1 \longleftrightarrow 1 & \\ -2 \longleftrightarrow 2 & \\ -3 \longleftrightarrow 3 & \\ \quad\vdots \quad\ \vdots & \\ -n \longleftrightarrow n & n \in \text{Enteros} \end{array}$$

4. Si $A = \{$ Enteros $\}$ y $B = \{$ Enteros pares $\}$
   Entonces existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos A y B. O sea:

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ -3 & \longleftrightarrow & 2(-3) = -6 \\ -2 & \longleftrightarrow & 2(-2) = -4 \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcll}
-1 & \longleftrightarrow & 2(-1) & = -2 \\
0 & \longleftrightarrow & 2(0) & = 0 \\
1 & \longleftrightarrow & 2(1) & = 2 \\
2 & \longleftrightarrow & 2(2) & = 4 \\
3 & \longleftrightarrow & 2(3) & = 6 \\
\cdot & & \cdot & \\
\cdot & & \cdot & \\
\cdot & & \cdot & \\
n & \longleftrightarrow & 2(n) & = 2n
\end{array}
$$

Definición. Llamaremos una sección del conjunto de los números naturales, que denotaremos por S_n al conjunto de los primeros n números naturales, esto es:

$$S_n = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots, n \} \subset N$$

Definición. Si existe una correspondencia uno a uno entre un conjunto A y una sección S_n de los naturales, diremos que n es la *cardinalidad* del conjunto y lo denotaremos por $\#(A) = n$.

Observación. De la definición anterior nos damos cuenta que la cardinalidad de un conjunto es el número de elementos de éste.

Ejemplos.

5. Si $A = \{ 2 \}$ entonces $\#(A) = 1$

6. Si $B = \{ 3, 4, 5 \}$ entonces $\#(B) = 3$

7. Si $C = \{ a, b, c, \}$ entonces $\#(C) = 3$

Definición. Diremos que la cardinalidad del conjunto vacío es cero, o sea:

$$\#(\phi) = 0 \quad \text{o} \quad \#\{\ \} = 0$$

Definición. Diremos que un conjunto A es finito si existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto A y una sección de los naturales S_n.

Si un conjunto no es finito, lo llamaremos conjunto infinito.

Ejemplos.

8. $A = \{ x \mid x$ es un habitante de la República Mexicana $\}$

9. $B = \{ x \mid x$ es un número primo mayor que 100 y menor que 1,000,000 $\}$

10. $C = \{x \mid x$ es un número Real entre 1 y 2 $\}$

11. $D = \{x \mid x \neq a/b$, donde $a, b \in$ Enteros, $b \neq 0 \}$

12. $E = \{ x \mid x$ es un entero entre 0 y 1 $\}$

13. $F = \{ x \mid x$ es un grano de arena. $\}$

Los conjuntos A, B, E y F son conjuntos finitos y los conjuntos C y D son infinitos.

En la sección 1.4 definimos igualdad de conjuntos. Cuando dos conjuntos no son iguales se pueden presentar dos situaciones que son: A y B son diferentes, pero tienen algunos elementos en común.

Ejemplos.

14. Si $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$ $B = \{ 8, 10, 12, 14, 16 \}$
A es diferente de B, aunque 8 y 10 son elementos tanto de A como de B.

15. Si $A = \{$ Enteros $\}$ y $B = \{$ Enteros pares $\}$
También A y B son diferentes aunque todos los elementos de B también lo son de A.

Una segunda situación es cuando los conjuntos A y B son conjuntos diferentes y además A y B no tienen elementos en común, cuando esto sucede diremos que A y B son conjuntos disjuntos.

Definición. Dos conjuntos A y B serán conjuntos disjuntos o ajenos si y sólo si $A \cap B = \phi$.

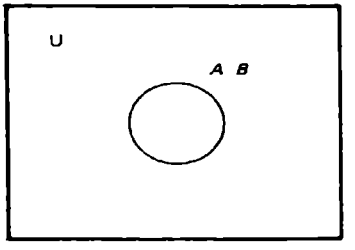
Ejemplos.

16. Si $A = \{ a, b, c \}$ y $B = \{ 1, 2 \}$
Entonces A es ajeno a B.

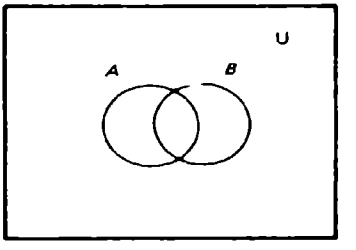
17. Si $A =$ { Enteros positivos }, $B =$ { Enteros negativos }
Entonces A es ajeno a B.

Estas situaciones de conjuntos iguales, diferentes y no ajenos y ajenos, podemos ilustrarlas mediante diagramas conocidos como *diagramas de Venn Euler.*

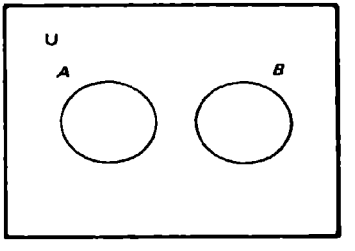
El conjunto universo lo representaremos por un rectángulo. O sea:



$A = B$

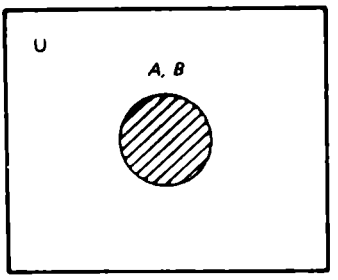


$A \neq B$

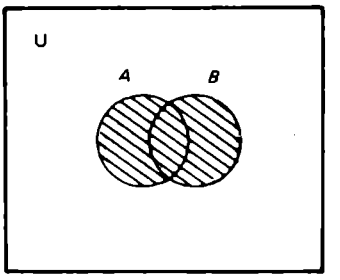


$A \neq B$, y AJENOS

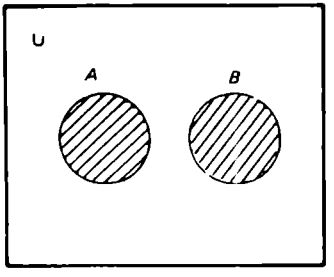
También haremos uso de estos diagramas en la página siguiente, para representar las operaciones con conjuntos donde el conjunto que resulta será sombreado, o sea:



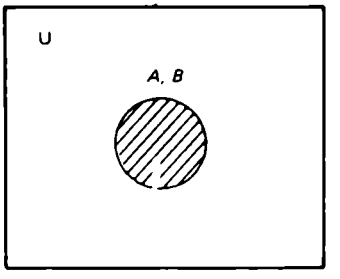
$A = B$



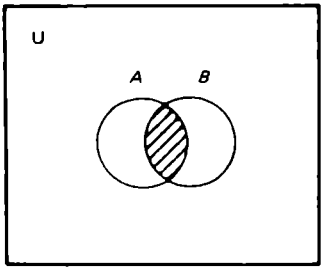
$A \cup B$



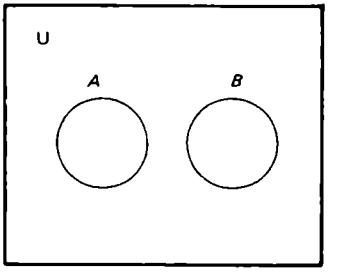
$A \cup B$



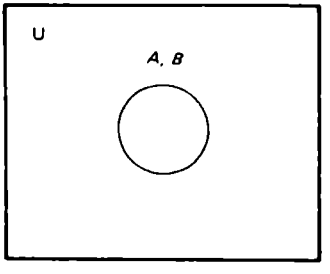
$A \cap B$



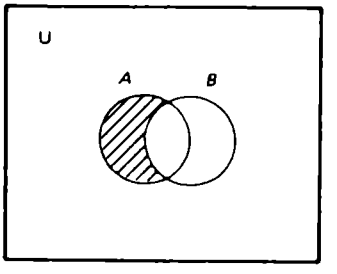
$A \cap B$



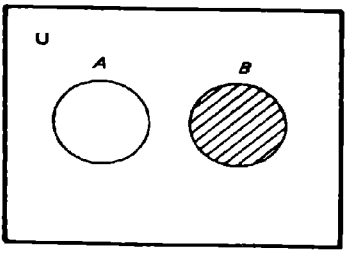
$A \cap B \neq \phi$



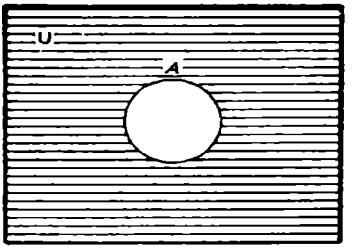
$A - B = \phi$



$A - B$



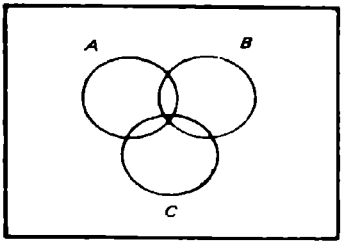
$B - A$



A'

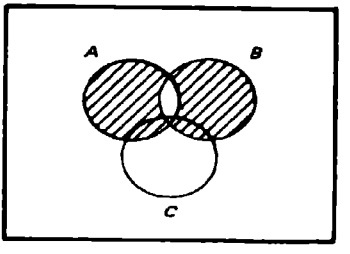
Ejemplos.

18. Hacer un diagrama similar a la siguiente figura:

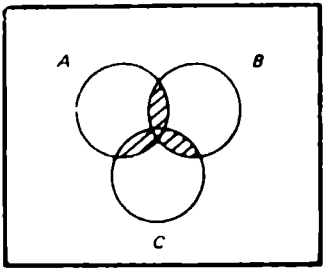


para cada una de las siguientes operaciones e indicar en cada una de ellas, el resultado de la operación.

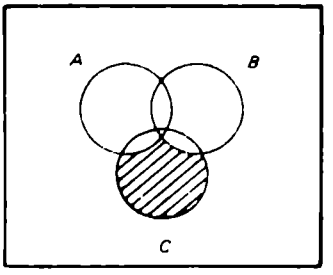
a) $(A - B) \cup (B - A)$



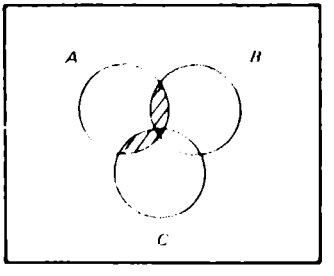
b) $[\ (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B' \cap C)\ ] - (A \cap B \cap C)$



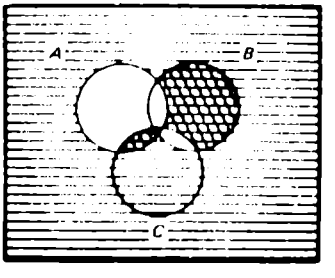
c) $[(A') \cap (B')\ ] \cap C$



d) $A \cap (B \cup C)$



e) $[\ B \quad (A \cup C)\ ] \cup (A \cup B)' \cup (A \cap C)$

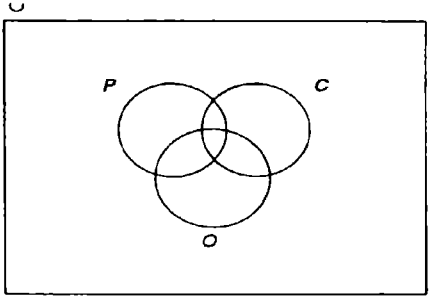


TRADUCCIÓN DE EVENTOS DEL LENGUAJE SIMBÓLICO AL LENGUAJE COMÚN Y PROBLEMAS DE CONTEO

Consideraremos eventos que pueden representar por medio de un conjunto. Por ejemplo:

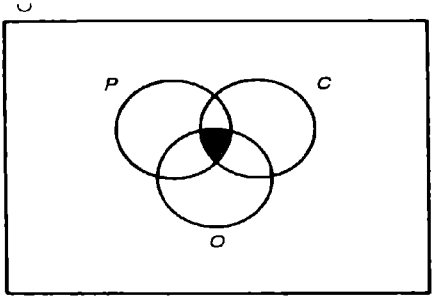
U = {Empleados de la Empresa "UNE"}
P = {Empleados con estudios profesionales}
C = {Empleados casados}
O = Empleados originarios de la capital}

Estos conjuntos los podemos representar en un diagrama.



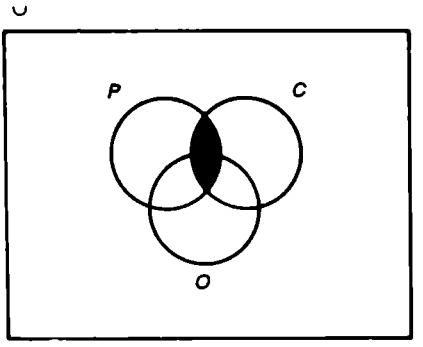
Considerando a P, C y O como se indicó anteriormente, traduciremos al lenguaje común, la denotada en cada una de los diagramas siguientes y con operaciones de conjuntos.

Observación. Los conjuntos P^C, C^C y O^C representan. Empleados sin estudios profesionales, Empleados solteros y Empleados que no son de la capital respectivamente.



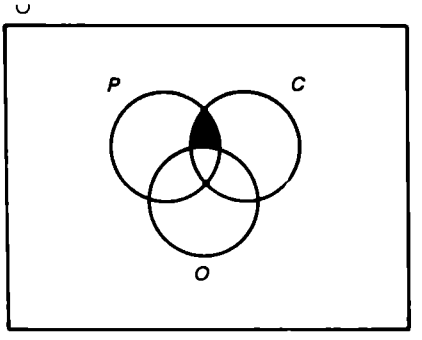
"Empleados casados con estudios profesionales y originarios de la capital"

"$P \cap C \cap O$"



"Empleados casados con estudios profesionales"

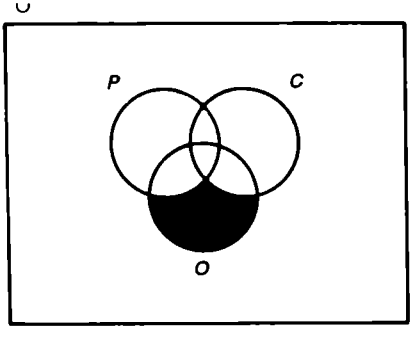
"$P \cap C$"



"Empleados casados, con estudios profesionales y que no son originarios de la capital"

"Empleados casados con estudios profesionales exclusivamente"

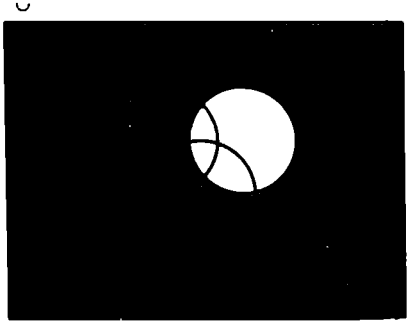
$(P \cap C) - C = P \cap C \cap O^C$



"Empleados sin estudios profesionales, solteros y originarios de la capital"

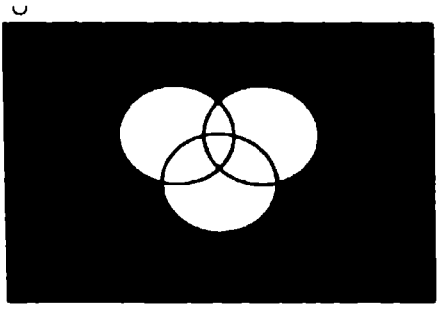
"Empleados originarios de la capital, pero no tienen estudios profesionales ni son casados"

$O \cap C^C \cap P^C = O - (P \cup (P \cup C)$

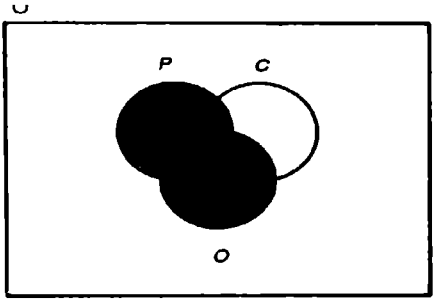


"Empleados solteros"

C^C



"Empleados sin estudios profesionales, solteros y que no son originarios de la capital"
"$(P \cup C \cup O)^c = P^c \cap C^c \cap O^c$"



"Empleados con estudios profesionales o casados"
"$(P \cup O)$"

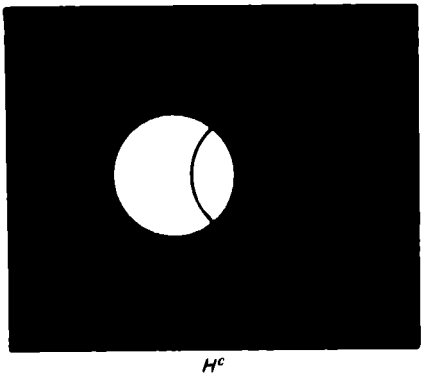
Ejemplo 19.

Si U = {personas en una comunidad } y H = {hombres} y E = {mayores de edad} Indicar en un diagrama los siguientes eventos.

a) "Personas de la comunidad que son mujeres"
b) "Mujeres mayores de edad"
c) "Mujeres menores de edad"
d) "Hombres"
e) "Hombres menores de edad"
f) "Hombres mayores de edad"

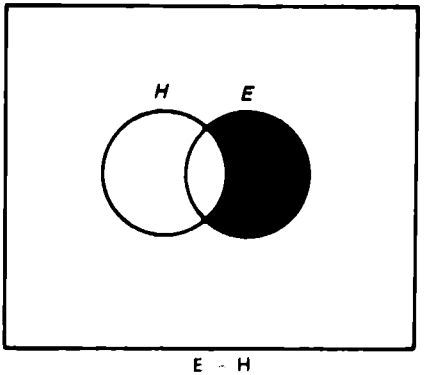
Solución. Consideraremos al conjunto de mujeres como H^C y los menores de edad como E^C.

a)



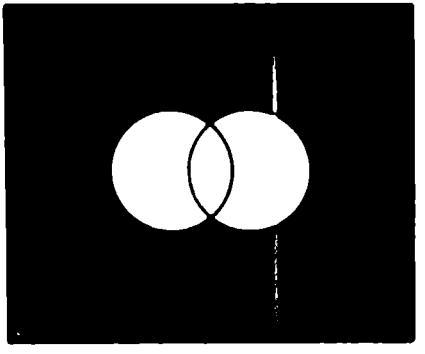
H^c

b)



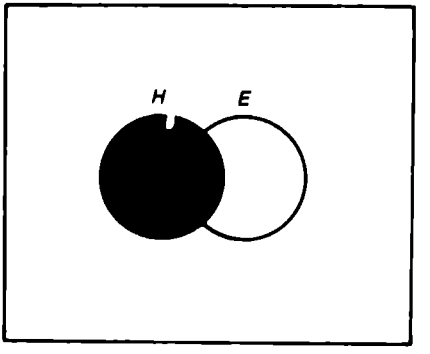
E − H

c)



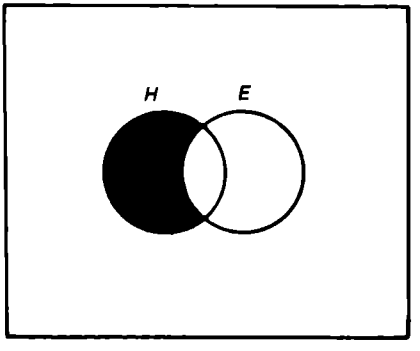
$(H \cup E)^c$

d)

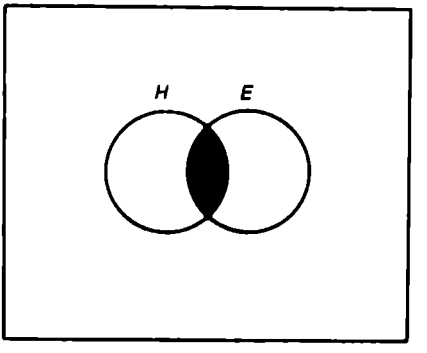


H

e)



$H - E$



$H \cap E$

Usaremos el concepto de cardinalidad, diagramas de Venn-Euler y las propiedades de las operaciones de conjuntos para determinar el número de elementos de un conjunto.

Ejemplos.

20. Para los votantes en una pequeña comunidad de 300 personas se tiene que 110 son mayores de 20 años, 120 son mujeres y 50 son mujeres mayores de 20 años.

Determinar el número de votantes que:

i) son hombres
ii) son hombres mayores de 20 años
iii) son mujeres con 20 o menos años
iv) son hombres con 20 o menos años
v) tienen 20 o menos años

Sea U = {Votantes en la comunidad}
A = {Mujeres}
B = {Votantes mayores de 20 años}

Los datos que tenemos son

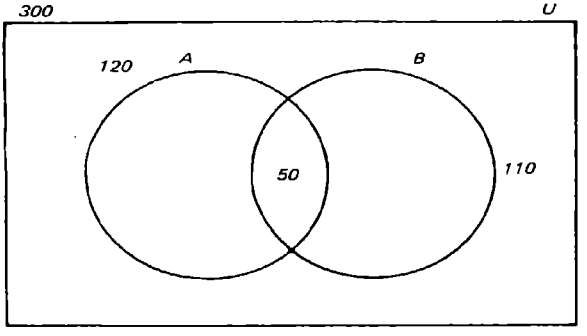
$\#(U) = 300$

$\#(A) = 120$

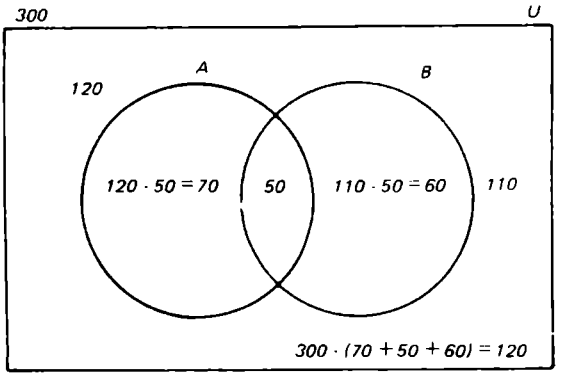
$\#(B) = 110$

$\#(A \cap B) = 50$

Esta información la podemos representar en el siguiente diagrama.



La cardinalidad de los conjuntos $(A-B)$, $(B-A)$ y $(A \cup B)^c$ se puede obtener de la información anterior.



$\#(A - B) = 120 - 50 = 70$
$\#(B - A) = 110 - 50 = 60$
$\#(A \cup B)^c = 300 - (70 + 50 + 60) = 120$

En este momento podemos dar respuestas a las preguntas formuladas.

i) {hombres votantes} = A^c entonces $\#(A^c) = 300 - 120 = 180$

ii) {hombres mayores de 20 años} = $B - A$ entonces

$$\#(B - A) = 60$$

iii) {mujeres con 20 ó menos años} = $A - B$ entonces $\#(A - B) = 70$

iv) {hombres con 20 ó menos años} = $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ entonces $\#(A \cup B^c) = 120$

v) {votantes con 20 ó menos años} = B^c entonces $\#(B^c) = 300 - 110 = 190$

21. En una escuela secundaria se tienen los siguientes datos de 1600 estudiantes.

801 aprobaron Matemáticas
900 aprobaron Física
752 aprobaron Química
435 aprobaron Matemáticas y Física
398 aprobaron Matemáticas y Química
412 aprobaron Física y Química
310 aprobaron Matemáticas, Química y Física

Indicar cuántos de estos 1600 estudiantes aprobaron

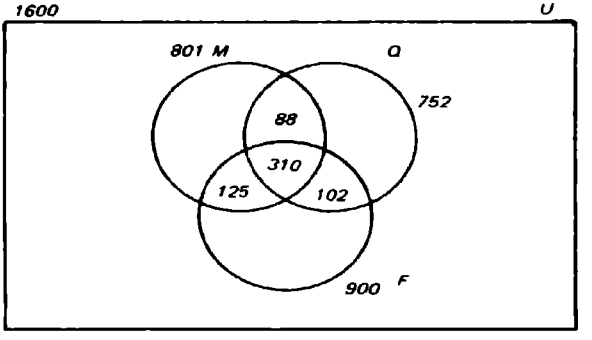
i) sólo una materia
ii) exactamente dos materias
iii) ninguna materia
iv) al menos una materia
v) cuando mucho dos materias

Sean U = {todos los estudiantes de la Escuela secundaria}
M = {alumnos que aprobaron Matemáticas}
Q = {alumnos que aprobaron Química}
F = {alumnos que aprobaron Física}

entonces los datos que tenemos son

$\#(U) = 1600$ $\quad$ $\#(M \cap F) = 435$
$\#(M) = 801$ $\quad$ $\#(M \cap Q) = 398$
$\#(Q) = 752$ $\quad$ $\#(F \cap Q) = 412$
$\#(F) = 900$ $\quad$ $\#(F \cap Q \cap M) = 310$

Esta información la podemos representar en el siguiente diagrama.



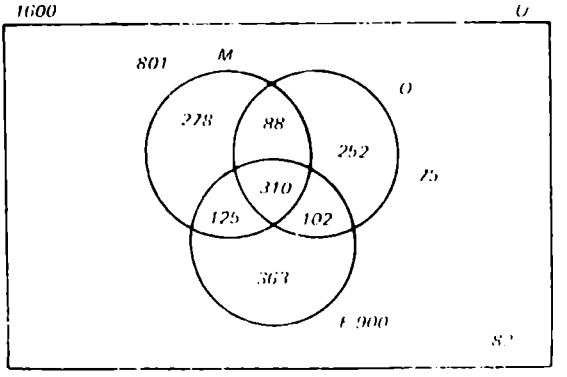
La cardinalidad de los conjuntos

$|M - (Q \cup F)|$, $|Q - (M \cup F)|$, $|F - (M \cup Q)|$ y $(M \cup Q \cup F)^c$

la podemos obtener de la información anterior.

$\#|M - (Q \cup F)| = 801 - (88 + 310 + 125) = 278$
$\#|Q - (M \cup F)| = 752 - (88 + 310 + 102) = 252$
$\#|F - (Q \cup M)| = 900 - (125 + 310 + 102) = 363$
$\#(M \cup Q \cup F)^c = 1600 - (278 + 88 + 310 + 125 + 252 + 102 + 363) = 82$

y completando el diagrama anterior tenemos



y las respuestas a las preguntas formuladas son

i) {alumnos que aprueban sólo una materia}
$= |M - (Q \cup F)| \cup |F - (M \cup Q)| \cup |Q - (M \cup F)| = A$

entonces

$\#(A) = 278 + 252 + 363 = 893$

ii) {alumnos que aprobaron exactamente dos materias} $= B$

y $B = |(M \cap Q) - F| \cup |(Q \cap F) - M| \cup |(M \cap F) - Q|$

entonces $\# B = 88 + 102 + 125 = 315$

iii) {alumnos que aprobaron 0 materias} $= C$
y $C = |(M \cup Q \cup F)^c|$

entonces $\# C = 82$

iv) {alumnos que aprobaron al menos una materia} = {alumnos que aprobaron una o dos o tres materias} $= D$

entonces $\# (D) = 1600 - 82 = 1518$.

v) {alumnos que aprobaron cuando mucho dos materias} = {alumnos que aprobaron cero materias o una materia o dos materias} $= E$

entonces $\#(E) = 82 + (252 + 363 + 278) + (88 + 125 + 102)$
$= 1290$

22. Se hizo una entrevista a 885 amas de casa y se encontró la siguiente información acerca de ciertos programas de televisión.

600 veían noticieros
400 veían series policiacas
620 veían programas deportivos
195 veían noticieros y series policiacas
190 veían series policiacas y deportivas
400 veían noticieros y deportivos

y todos ven al menos uno de estos tres programas.

Determinar cuántas de las entrevistadas ven los tres tipos de programas mencionados.

Sea U = {personas entrevistadas}
N = {personas que ven noticieros}
P = {personas que ven programas policiacos}

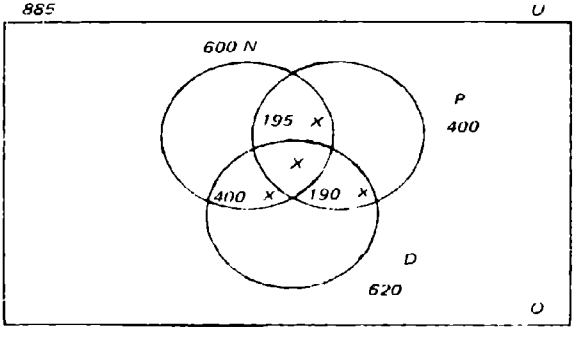
D = {personas que ven programas deportivos}

Los datos que tenemos son:

$\#\, U = 885$ $\quad \#(D) = 620$ $\quad \#(N \cap D) = 400$
$\#\, N = 600$ $\quad \#(N \cap P) = 195$ $\quad \#(P \cup D \cup N)^c = 0$
$\#\, P = 400$ $\quad \#(P \cap D) = 190$

Sea $x = \#(N \cap D \cap P)$

Colocando esta información en un diagrama de Venn-Euler tenemos.



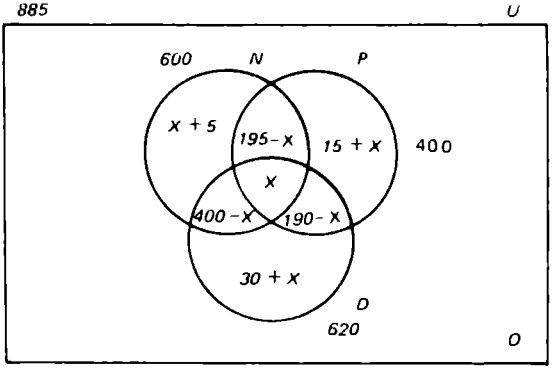
Además tenemos que:

$$\begin{aligned} \#|P-(N\cup D)| &= 400-|195-x+x+190-x| \\ &= 400-195-190+x \\ &= 15+x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \#|D-(P\cup N)| &= 620-|400-x+x+190-x| \\ &= 620-|590-x| \\ &= 620-590+x \\ &= 30+x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \#|N-(P\cup D)| &= 600-|195-x+x+400-x| \\ &= 600-|195+400-x| \\ &= 600-|595-x| \\ &= 5+x \end{aligned}$$

Colocando estos datos en el diagrama tenemos.



Así

$$\begin{aligned} 885 &= 600+(15+x)+(190-x)+(30+x) \\ &= 835+x \end{aligned}$$

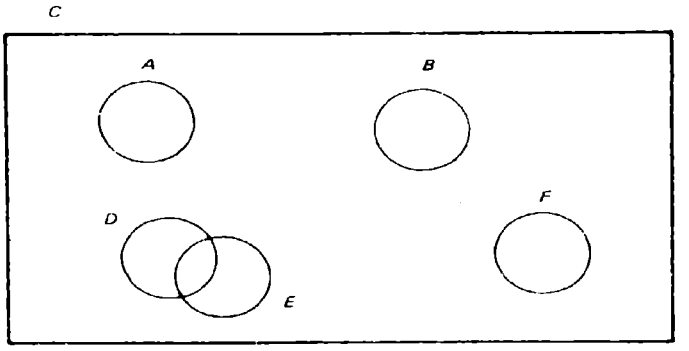
$$\begin{aligned} 885-835 &= x \\ 50 &= x \end{aligned}$$

Entonces el número de personas que ven los tres programas son 50.

Otro tipo de conjuntos de interés son aquellos conjuntos cuyos elementos son también conjuntos.

Al hablar del conjunto de estudiantes de una Universidad, podemos pensar en el conjunto formado por todos los estudiantes de dicha Universidad. También podemos referirnos al conjunto formado por todas las carreras que se imparten en esa Universidad. En esta segunda forma de expresar el conjunto, los elementos son a la vez el conjunto formado por el conjunto de estudiantes de cada una de las carreras. Así, por ejemplo, si denotamos por $C = \{ A \mid A$ es una carrera de la Universidad $\}$. Y si tomamos A = carrera de Psicología, encontramos que:

$A = \{ x \mid x$ es un estudiante de Psicología $\}$ que a la vez es un conjunto. Entonces diremos que C es un conjunto de conjuntos. Esto lo podemos ilustrar en el siguiente diagrama:



Donde C es el conjunto de carreras

A = Carrera de Psicología
B = Carrera de Ingeniería Mecánica
D = Carrera de Matemáticas
E = Carrera de Física
F = Carrera de Administración.

Definición. Si A es un conjunto cualquiera, definimos el *conjunto potencia* de A como el conjunto formado por todos los subconjuntos de A y lo denotaremos por $P(A)$.

Observación. Si A tiene n elementos, el conjunto potencia de A tendrá 2^n elementos y por esta razón es costumbre denotar al conjunto potencia por 2^A. O sea:

$$2^A = P(A) = \{ x \mid x \text{ es un subconjunto de } A \}$$

Ejemplos.

23. Si $A = \{ 0, 1 \}$
$P(A) = \{ \{ 0 \}, \{ 1 \}, A, \phi \}$

24. Si $B = \{ a, b, c \}$
$P(B) = \{ \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a,b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a,b,c \}, \phi \}$

25. $C = \{ a, \{ b, c \} \}$
$P(C) = \{ \{ a \}, \{ \{ b, c \} \}, \{ a, \{ b, c \} \}, \phi \}$

Ejercicios.

1. Establecer una correspondencia biunívoca cuando sea posible entre los siguientes pares de conjuntos:

a) $A = \{ x \mid x$ es un dígito primo $\}$
$B = \{ x \mid x$ es un dígito par $\}$
b) $A = \{ x \mid x$ es un múltiplo de 5 $\}$
$B = \{ x \mid x$ es un múltiplo de 3 $\}$
c) $A = \{ x \mid x$ es un país del mundo $\}$
$B = \{ x \mid x$ es una ciudad capital $\}$
d) $A = \{ x \mid x$ es un hombre $\}$
$B = \{ x \mid x$ es una mujer $\}$
e) $A = \{ x \mid x$ es un país de Europa $\}$
$B = \{ x \mid x$ es un país de América $\}$
f) $A = \{$ Maestros del Tecnológico de Monterrey $\}$
$B = \{$ Alumnos del Tecnológico de Monterrey $\}$
g) $A = \{$ Enteros positivos $\}$
$B = \{$ Enteros positivos impares $\}$
h) $A = \{$ Numeros naturales $\}$
$B = \{$ Números naturales terminados en cero $\}$
i) $A = \{ x \mid x = 2^n, n \in$ Enteros $\}$
$B = \{ x \mid x$ es un entero. $\}$
j) $A = \{ x \mid x$ es un Racional $\}$
$B = \{$ Enteros $\}$

2. Diga cuál es la cardinalidad de cada uno de los siguientes conjuntos:

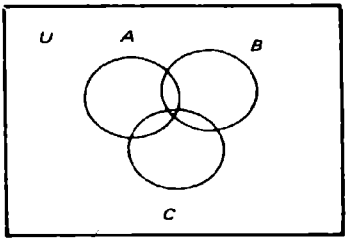
a) $A = \{ \}$
b) $B = \{ 0 \}$
c) $C = \{ a, b \}$
d) $D = \{ a, b, \{ a, b \}, \{ c \}, d \}$

e) $E = \{ \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \}, \phi \}$
f) $F = \phi$
g) $G = \{ x \mid x$ es una letra del abecedario $\}$
h) $H = \{ x \mid x$ es un estado de la República Mexicana $\}$
i) $I = \{ x \mid x^2 + 4x - 4 = 0 \}$
j) $J = \{ x \mid x^2 + 5x + 6 = 0 \}$

3. Especifique cuál de los siguientes conjuntos es finito o infinito:

a) $\{ x \mid x$ es un país de América Latina $\}$
b) $\{ x \mid x$ es un racional entre 0 y 1 $\}$
c) $\{ x \mid x$ es un entero mayor o igual que un millón $\}$
d) $\{ x \mid x$ es un real menor o igual que un millón $\}$
e) $\{ x \mid x$ es un libro de Matemáticas $\}$
f) $\{ x \mid x$ es una religión $\}$
g) $\{ x \mid x$ es un número primo entre 0 y 1 $\}$
h) $\{ x \mid x$ es un número divisible ente 2 $\}$
i) $\{ x \mid x$ es un dígito divisible entre 2 $\}$
j) $\{ x \mid x$ es un entero $\}$

4. Hacer un diagrama similar a la siguiente figura:

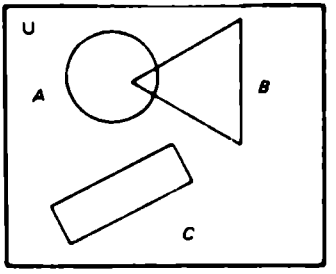


para cada una de las siguientes operaciones, indicando en cada diagrama el resultado de la operación.

a) $(A \cup B)'$
b) $A \cup (B \cap C)$
c) $A \cup (B - A)$
d) $A' \cap B'$
e) $(A \cup B) - (A \cap B)$
f) $(A - B) \cup (B - A)$

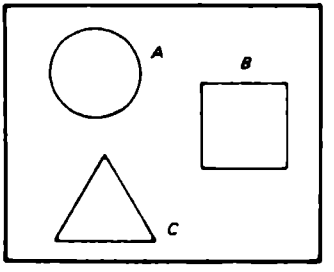
g) $A' \cup B'$
h) $(A \cup B) \cap (A \cap C)$
i) $(A' \cup B) \cup C$
j) $(A \cap B)'$
k) $A - (B - C)$
l) $A' \cup (B' - C)'$
m) $(A - B)' \cap (C - A')'$
n) $(A' \cup B')' \cap (C \cap B)$
ñ) $(A' - B') \cup [C' \cap (A - B)]$

5. Hacer un diagrama similar a la siguiente figura:



para cada una de las operaciones indicadas en el problema 4.

6 Hacer un diagrama similar a la siguiente figura:



para cada una de las operaciones indicadas en el problema 4.

7 Para cada uno de los siguientes conjuntos, encontrar su conjunto potencia.

A = { 0 }
B = { aguila, sol }

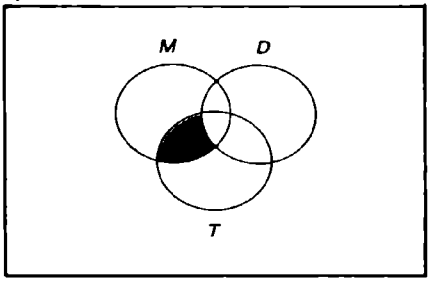
$C = \{ o, \phi \}$
$D = \{ a, \{ a, b \}, b \}$
$E = \{ \{ c, d \}, \{ a \} \}$
$F = \{ 1, 2, 3, 4, \}$
$G = \{ \}$

8. Utilizando diagramas de Venn, verificar las leyes del álgebra de conjuntos dadas en la sección 1.4, ejercicio 8.

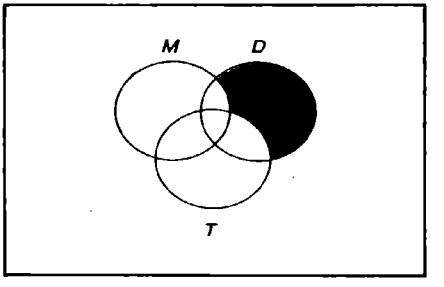
9. Si U = {Atletas de una Delegación}
M = {Atletas que les gusta la música}
D = {Atletas que les gusta la danza}
T = {Atletas que les gusta el teatro}

Escribir en el lenguaje ordinario lo representado en cada diagrama.

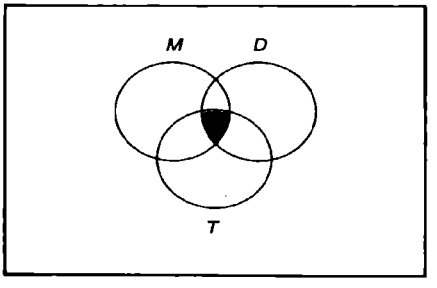
a)



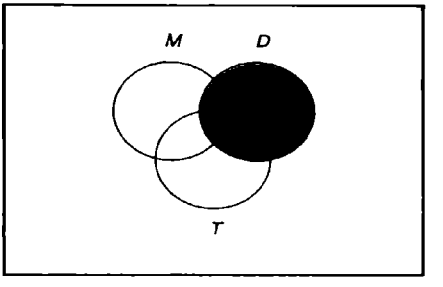
b)



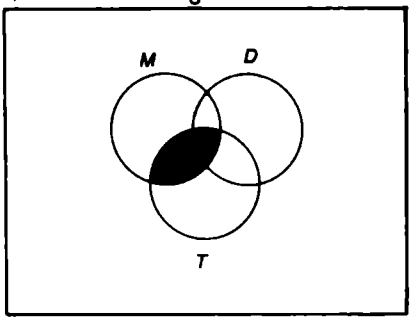
c)



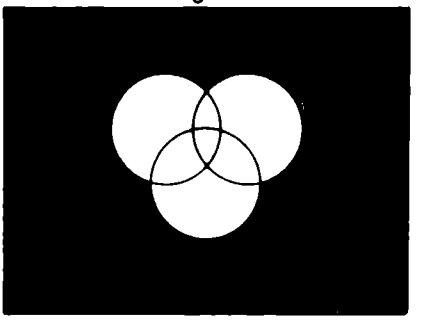
d)



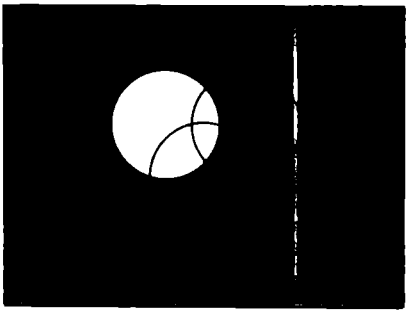
e)



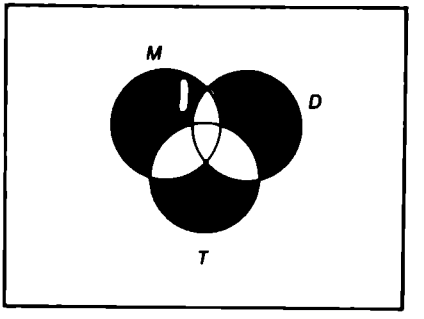
f)



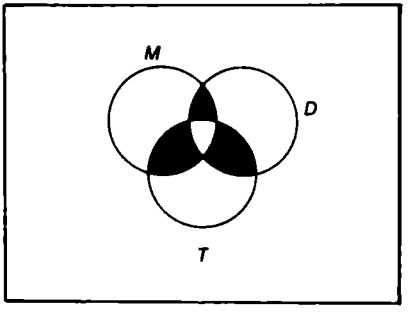
g)



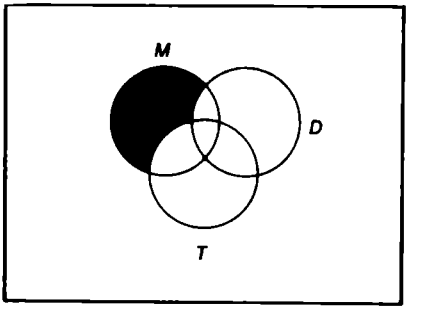
h)



i)

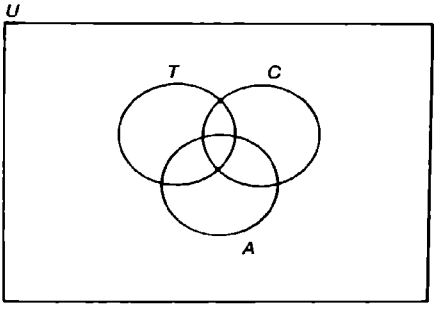


j)



10. Si U = {Autos de una agencia}
T = {Autos con transmisión automática}
C = {Autos con clima}
A = {Autos con autoestéreo}

Representar en un Diagrama similar a la siguiente figura



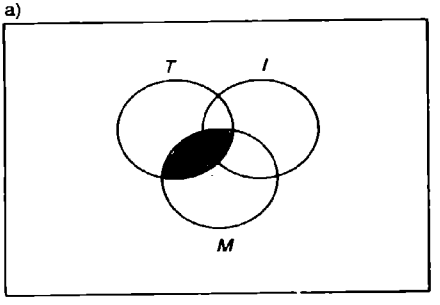
para cada uno de los siguientes eventos y escribirlos en forma simbólica.

a) {Autos con clima}
b) {Autos con transmisión automática y clima}
c) {Autos con transmisión automática, pero no tenían clima ni autoestéreo}
d) {Autos con transmisión automática y clima, pero no con autoestéreo}
e) {Autos que no tenían autoestéreo, ni clima ni transmisión automática
f) {Autos con clima y autoestéreo}
g) {Autos sin autoestéreo}
h) {Autos solamente con clima}
i) {Autos solamente con clima y autoestéreo}
j) {Autos con transmisión automática, clima o autoestéreo}

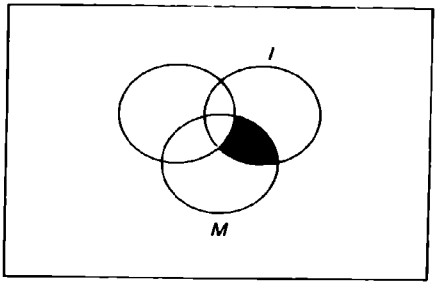
11. Sean U = {maestros del ITESM}
T = {Maestros de tiempo completo}
I = {Maestros que hablan el inglés}
M = {Maestros que tienen por lo menos una maestría}

Escribir en el lenguaje ordinario y simbólico lo representado en cada diagrama.

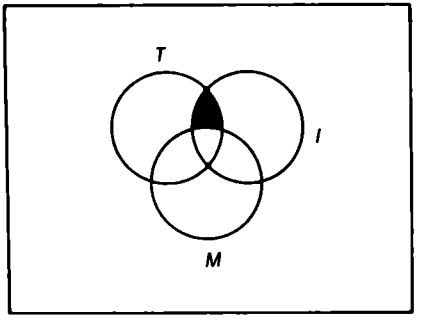
a)



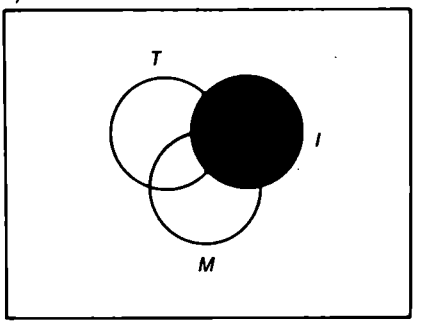
b)



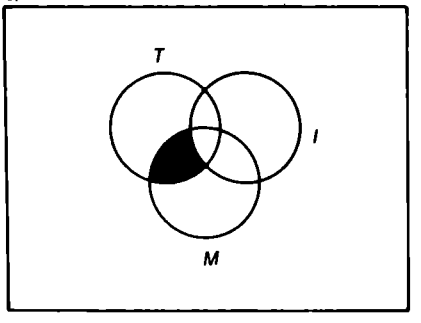
c)



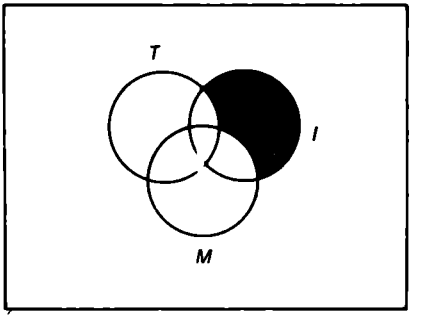
d)



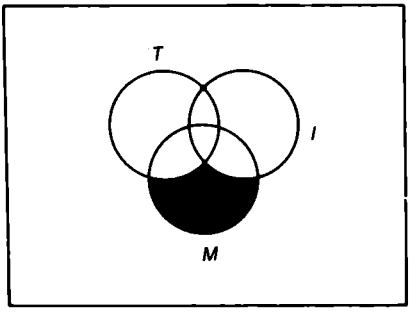
e)



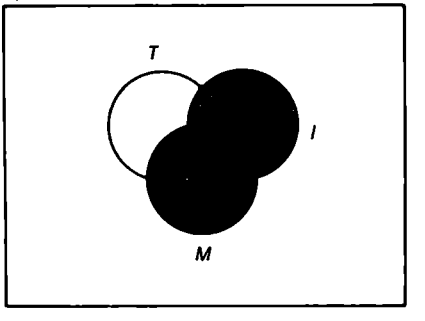
f)



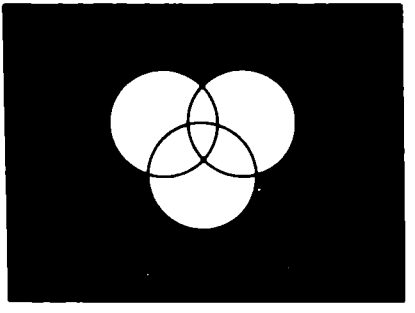
g)



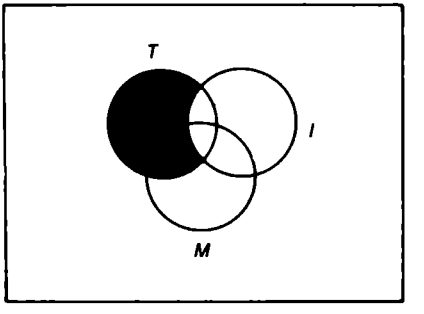
h)



i)



j)



12. En una Empresa se realiza una encuesta a sus 50 obreros y se obtienen los siguientes datos:

35 de ellos les gusta su trabajo
27 de ellos tienen buenas relaciones con su jefe.
15 de ellos les gusta su trabajo y tienen buenas relaciones con su jefe

Determinar cuántas de estas personas:

i) no tienen buenas relaciones con su jefe
ii) no les gusta su trabajo
iii) les gusta su trabajo pero no tienen buenas relaciones con su jefe
iv) tienen buenas relaciones con su jefe pero no les gusta su trabajo
v) no tienen buenas relaciones con su jefe y no les gusta su trabajo

13. De 180 maestros de una universidad 135 tienen su Doctorado, 146 son investigadores de tiempo completo. De los Doctores 114 son investigadores de tiempo completo.

Indicar cuántos de estos maestros:

i) tienen su Doctorado o se dedican a investigar de tiempo completo
ii) no tienen su Doctorado ni se dedican a investigar de tiempo completo

14. Al interrogar una delegación deportiva formada por 250 atletas sobre su afición respecto al Teatro, la Danza, o la Poesía, se encontró que 125 prefieren el Teatro, 180 prefieren la Danza, 65 la Poesía, 100 Teatro y Danza, 25 Teatro y Poesía, 40 Danza y Poesía y 20 tenían las tres preferencias.

Determinar cuántos de estos 250 atletas tienen:

i) al menos una de estas tres preferencias
ii) ninguna de estas tres preferencias
iii) sólo una de estas tres preferencias
iv) cuando mucho una de estas tres preferencias
v) exactamente dos de estas preferencias
vi) cuando menos dos de estas preferencias

15. Un grupo de 700 estudiantes de provincia visitan la ciudad de México y se encuentra que 379 de ellos visitaron el parque de diversiones Reyno Aventura, 419 el Museo Nacional de Antropología, 260 el Palacio de Bellas Artes, 102 fueron a Bellas Artes y no estuvieron en el museo de An-

tropología ni en Reyno Aventura, 92 fueron al museo de Antropología y no estuvieron ni en Reyno Aventura ni en Bellas Artes, 110 estuvieron en Reyno Aventura y no estuvieron en Bellas Artes ni en el museo de Antropología, 80 estuvieron en Reyno Aventura y Bellas Artes y 60 estuvieron en los tres lugares mencionados. ¿Cuántas de estas personas asistieron:

i) exactamente a uno de estos lugares
ii) exactamente a dos lugares
iii) al menos a un lugar
iv) cuando mucho a dos lugares
v) a lo más a uno de los lugares?

16. De 335 maestros de una Institución educativa se tienen los siguientes datos: 215 son de tiempo completo, 190 hablan el inglés, 255 tienen por lo menos maestría, 70 son de tiempo completo y hablan el inglés, 110 hablan el inglés y tienen por lo menos maestría, 145 son de tiempo completo y tienen por lo menos maestría y todos tiene n al menos una de las características antes mencionadas.

Determinar cuántos de estos 335 maestros

i) tienen las tres características
ii) tienen exactamente dos características
iii) tienen exactamente una de las características

17. De 150 alumnos que desean entrar a una institución se tienen los siguientes datos:

63 son mayores de 18 años
66 les gusta hacer deporte
65 aprobaron el examen de selección
22 son mayores de 18 años y les gusta hacer deporte
25 les gusta hacer deporte y aprobaron el examen de selección
23 son mayores de 18 años y aprobaron el examen de selección y 10 son mayores de 18 años, les gusta hacer deporte y aprobaron el examen de selección

¿Cuántos de estos alumnos:

i) son mayores de 18 años, les gusta hacer deporte pero no aprobaron el examen de selección
ii) son mayores de 18 años, no les gusta hacer deporte y no aprobaron el examen de selección

iii) son menores o de 18 años, les gusta hacer deporte y aprobaron el examen de selección
iv) son menores o de 18 años, no les gusta hacer deporte y no aprobaron el examen de selección?

18. Con respecto a los empleados de una empresa se tiene la siguiente información:

317 son hombres
316 son casados
25 son mujeres casadas sin profesión
72 son hombres casados sin profesión
83 son hombres profesionistas solteros
15 son mujeres profesionistas solteras
125 son hombres profesionistas casados
y 49 son mujeres solteras sin profesión.

¿Cuántos de los empleados son

i) hombres solteros sin profesión
ii) mujeres profesionistas casadas
iii) profesionistas?

19. Una agencia de autos vendió durante un año 180 unidades con las siguientes características:

57 tenían transmisión automática
77 tenían clima
45 tenían transmisión automática y clima
10 tenían transmisión automática pero no tenían ni clima ni autoestereo
28 tenían transmisión automática y clima, pero no tenían autoestereo
90 no tenían ninguna de las tres características mencionadas
19 tenían clima y autoestereo

¿Cuántas de estas unidades tenían autoestereo?

CAPÍTULO 2

Reales

INTRODUCCIÓN

En el capítulo 1 nos dimos cuenta que el desarrollo de cualquier tema está referido a un conjunto universal. En una gran mayoría de los temas que trataremos en este libro tendremos como universo un conjunto que será llamado el conjunto de los números reales. Es por esta razón que debemos tener una idea descriptiva de dicho conjunto y conocer algunas de sus propiedades fundamentales.

Hay algunos subconjuntos de los reales que también tienen un interés particular, en este caso los naturales, que podemos considerar como el conjunto primitivo en la construcción de los números. En este capítulo presentaremos los axiomas que dan lugar a los naturales, donde aparecerá la necesidad de aumentar dicho conjunto para formar el conjunto de los números enteros, continuando con los racionales y llegando finalmente a describir el conjunto de los reales y algunas de sus propiedades.

Sección 2.1

REALES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Escribir los cinco axiomas que se usan en la construcción de los números naturales.
2. Describir los siguientes conjuntos:

   a) Naturales
   b) Enteros
   c) Racionales
   d) Irracionales
   e) Reales.

3. Representar, en un diagrama, los conjuntos referidos en el objetivo 2.
4. Dado un racional como cociente de dos enteros, escribir su forma decimal y viceversa.

El conjunto de los números naturales lo definiremos a través de 5 afirmaciones básicas sobre ellos, que aceptaremos como verdaderas. Recordemos que el tipo de afirmaciones que son aceptadas como verdaderas son llamadas axiomas.

Estas son:

a) $1 \in N$

Esta afirmación lo que nos dice es que, por lo menos N posee un elemento ($N \neq \phi$).

b) Si $n \in N$ entonces, existe un número natural único llamado el siguiente de n, que lo representaremos como:

"sig (n)"

Esto significa que N es un conjunto infinito, o sea:

$N = \{ 1, \text{sig}(1), \text{sig}(\text{sig}(1)), \ldots\ldots\ldots \}$

$N = \{ 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

El hecho de que sea único impide que un número tenga dos siguientes.

c) Sig $(n) \neq 1$ para toda n que está en N.

Este axioma nos indica que el 1 es el primer elemento del conjunto de N, es decir, no existe ningún elemento antes del 1.

d) Si sig $(n) =$ sig (m) entonces $n = m$.

O sea, que no hay dos naturales diferentes que tengan el mismo siguiente.

e) Si $K \subset N$ que tiene las siguientes propiedades:

i) $1 \in K$
ii) Si $P \in K$, entonces sig $(P) \in K$,

entonces $K = N$.

Esta afirmación nos proporciona una forma para probar propiedades de los naturales.

Definición. A cada dos números naturales podemos asociarle un número natural por medio de una operación llamada suma en N. Esta suma tiene las siguientes propiedades:

a) $n + 1 =$ sig (n).
b) $n +$ sig $(m) =$ sig $(n + m)$.

La suma de los naturales posee ciertas propiedades, entre ellas la asociativa y conmutativa. Estas propiedades deben ser deducidas a partir de las 5 afirmaciones básicas aceptadas inicialmente y no considerarlas como verdades sin demostración. Nuestro objetivo en este libro no incluye la demostra-

ción de las propiedades, aunque incluiremos una para ver el uso de algunas de las afirmaciones básicas de los naturales.

Propiedad asociativa de N.

Para toda $n, m, s \in N$, tenemos que:

$$(m + n) + s = m + (n + s)$$

Demostración.

Sean $n, m \in N$, arbitrarios. Consideremos el conjunto K de todos los naturales donde se cumple la propiedad asociativa:

$$K = \{ x \in N \mid (m + n) + x = m + (n + x) \}$$

Nos damos cuenta que K es subconjunto de N, y que tiene tres posibilidades, $K = \phi$, $K \neq N$ o $K = N$.

Donde $K = \phi$ significa que la propiedad asociativa nunca se cumple en N; $K \neq N$ quiere decir que la propiedad asociativa se cumple en parte de N y $K = N$ significa que la asociativa se cumple siempre.

Demostremos que $K = N$.

a) $1 \in K$, porque por definición de suma tenemos que:

$$\begin{aligned}(m + n) + 1 &= \text{sig}\,(m + n) \\ &= m + \text{sig}\,(n) \\ &= m + (n + 1)\end{aligned}$$

b) Supongamos que $P \in K$, es decir, $(m + n) + P = m + (n + P)$ y probaremos que $\text{sig}\,(P) \in K$.

$$\begin{aligned}m + [\, n + \text{sig}\,(P)\,] &= m + \text{sig}\,(n + P) \\ &= \text{sig}\,[\, m + (n + P)\,] \\ &= \text{sig}\,[\, (m + n) + P\,] \\ &= (m + n) + \text{sig}\,(P)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{sig}\,(P) \in K$ y por la última afirmación básica concluimos que $K = N$, lo cual debíamos demostrar.

Observación. Los cinco axiomas dados al inicio de esta unidad son usados en la construcción formal de los números naturales, construcción que está fuera de nuestros propósitos.

Se puede probar que no existe $x \in N$, tal que:

$$n + x = n \text{ donde } n \in N.$$

Con el afán de resolver esta igualdad se introduce un nuevo símbolo que llamaremos el cero y lo denotaremos por "0" y que satisface la ecuación:

$$n + 0 = n$$

También se puede probar que no existe $x \in N$, tal que:

$$n + x = 0.$$

Y para resolver este problema en la igualdad se introduce el símbolo $(-n)$ que llamaremos el negativo de n.

Nos damos cuenta que el conjunto de los naturales ha sido extendido al siguiente conjunto:

$$Z = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

y lo llamaremos el conjunto de los números ENTEROS que se denotará por Z es decir,

Números enteros $= Z = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Algunos de los subconjuntos de los **Números enteros** (Z) más importantes son:

Naturales $= N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
Enteros negativos $= M = \{-1, -2, -3, -4, -5, \ldots\}$
No negativos $= W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
Enteros pares $= \{x/x = 2k, k \in Z\}$
Enteros impares $= \{x/x = 2k + 1, k \in Z\}$

Hasta ahora hemos trabajado con los naturales y una operación que llamamos suma definida en ellos. De igual manera definiremos una segunda operación que llamaremos producto.

Definición. Dados dos naturales podemos asociarle un número natural por medio de una operación llamada producto en N. Este producto tiene las siguientes propiedades:

$a)$ $n \times 1 = n$.

$b)$ $n \times \text{sig}(m) = nm + n$ (cuando nm está definida).

También los naturales con esta operación poseen las propiedades asociativa y conmutativa. Conviene observar que las operaciones suma y producto de los naturales están relacionadas mediante la siguiente propiedad:

Distributiva

Para todo $a, b, c, \in N$ tenemos que:

$$(a + b)\, c = ac + bc$$

Demostración.

Sean a, b dos elementos cualesquiera. Consideremos el siguiente conjunto:

$$K = \{\, x \in N \mid (n + m)\, x = nx + mx \,\}$$

Al igual que en la suma, nos interesa probar que $K = N$.

$a)$ $1 \in K$, ya que por definición de la operacion producto tenemos que:

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot 1 &= a + b \\ &= (a \cdot 1) + (b \cdot 1)\end{aligned}$$

$b)$ Supongamos $p \in K$, esto quiere decir que:

$$(a + b)\, p = ap + bp \qquad (*)$$

Finalmente probaremos que $\text{sig}(p) \in K$

$$\begin{aligned}(a + b)\,\text{sig}\, p &= (a + b)\, p + (a + b) && \text{por definición de producto} \\ &= ap + bp + (a + b) && \text{por lo supuesto en } (*) \\ &= (ap + a) + (bp + b) && \text{por asociativa y conmutativa} \\ & && \text{de la suma.} \\ &= a\,\text{sig}\,(p) + b\,\text{sig}\,(p)\end{aligned}$$

donde esto significa que $(a + b)\,\text{sig}\,(p) = a\,\text{sig}\,(p) + b\,\text{sig}\,(p)$ por lo tanto $\text{sig}\,(p) \in K$, de donde concluimos que $K = N$.

Como en la suma, también podemos observar que para algunos naturales a y b no existe $x \in N$, tal que:

$$ax = b.$$

Por ejemplo: no existe $x \in N$, tal que $8x = 3$.

Ahora extenderemos el conjunto de los números enteros al conjunto de los **Números racionales** que denotaremos por "**Q**" y que lo definiremos por:

Números racionales $= Q = \{x/x = a/b$; **donde** $a,b \in Z$, $b \neq 0\}$

Nos damos cuenta que en Q sí podemos resolver la ecuación $ax = b$ hasta colocar $x = \frac{b}{a}$. O sea, $a\,(\frac{b}{a}) = b$.

Si $a \in Z$, entonces $a = \frac{a}{1}$. Y si $b = 1$ tenemos:

$$a = \frac{a}{1} = \frac{a}{b} \in Q$$

de lo cual podemos concluir que:

$$Z \subset Q$$

Todo número racional $\frac{a}{b}$ puede también ser representado mediante una expresión decimal. Algunas representaciones decimales son finitas, es decir, a partir de un lugar determinado aparecen siempre ceros.

Ejemplo.

$$\frac{1}{5} = .20000\ldots,\quad \frac{1}{2} = .50000\ldots,\quad \frac{3}{4} = .75000\ldots$$

Por comodidad, estas expresiones suelen representarse por .5, .2 y .75, respectivamente. Otras expresiones, sin embargo, se prolongan indefinidamente como:

$$\frac{2}{3} = .6666\ldots \qquad \frac{8}{7} = 1.142857142857\ldots$$

Para evitar los puntos suspensivos, se acostumbra poner una barra sobre el conjunto de cifras que se repiten. En los ejemplos anteriores quedaría:

$$\frac{1}{5} = .20 \qquad \frac{1}{2} = .50 \qquad \frac{3}{4} = .750$$

$$\frac{2}{3} = .6 \qquad \frac{8}{7} = 1.142857\ .$$

A este conjunto de cifras que se repiten se le llama *periodo* y, a las expresiones, *decimales periódicas.*

Observación. Todo número racional puede ser representado por un número decimal periódico. Podemos pensar en números cuya parte decimal no sea periódica como:

$$0.1010010001000001$$
$$0.12345678910111213$$

De acuerdo a lo que ya indicamos anteriormente, todo número racional tiene una representación decimal periódica. Números como los anteriores no pertenecen a los racionales. A este conjunto de números no racionales, le llamaremos conjunto de los Números irracionales, que se denotará por "$\mathbf{Q'}$". Es decir:

$$\text{Números irracionales} = Q' = \{x/x \neq a/b;\ \text{donde } a,b \in Z,\ b \neq 0\}$$

Algunos de estos números resultan de establecer relaciones entre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y sus catetos, por medio del teorema de Pitágoras. De ahí que Pitágoras creara una clase de números que no podían ser expresados por medio de los números racionales, como son:

$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots \qquad \sqrt{5} = 2.236\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1.737\ldots \qquad \sqrt{7} = 2.645\ldots, \text{etc.}$$

En igual forma, la relación que se encuentra en los círculos entre la magnitud del diámetro y la longitud de su circunferencia da como resultado el número $\pi = 3.141592\ldots$.

Probaremos ahora que $\sqrt{2}$ no es racional, pero primero necesitaremos el siguiente

Teorema 1.

Si $a \in Z$ y si a^2 es divisible por 2, entonces a es divisible por 2.

Demostración.

Todo entero puede expresarse en una de estas dos formas:
Donde n es un entero:

$$a = \begin{cases} 2n & \text{(par)} \\ 2n + 1 & \text{(impar)} \end{cases}$$

Por tanto,

$$a^2 = \begin{cases} 4n^2 & \text{(sí es divisible por 2)} \\ 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2 & \text{(no es divisible por 2)} \end{cases}$$

Puesto que a^2 es divisible por 2, por hipótesis,entonces a^2 tiene que ser igual a $4n^2$. Por tanto, $a = 2n$ y a es divisible por 2.

Teorema 2.

$\sqrt{2}$ no es un número racional.

Demostración.

Supóngase que p/q es una expresión racional simplificada, o sea que p y q no tienen ningún factor en común. Además, sea:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= p/q \\ 2 &= p^2/q^2 \\ p^2 &= 2q^2 \end{aligned}$$

Entonces p^2 es divisible por 2 y, por consiguiente p es divisible por 2.
Sea $p = 2R$, donde R es entero.
Puesto que $p^2 = 2q^2$ y $p = 2R$, tenemos que:

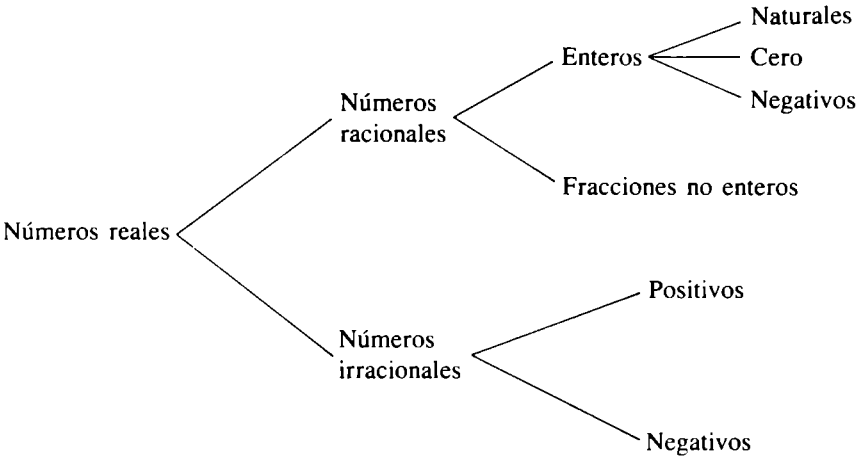
$$\begin{aligned} (2R)^2 &= 2q^2 \\ 4R^2 &= 2q^2 \\ 2R^2 &= q^2 \end{aligned}$$

Es decir, q^2 es divisible por dos y por lo tanto, q también es divisible por dos. Entonces p y q tienen como factor común al dos, por ser ambos pares. Pero esto contradice al hecho de que p y q no tienen factores, de donde se concluye que $\sqrt{2}$ no es racional.

Hasta ahora tenemos dos grandes conjuntos, los racionales Q y los irracionales Q'. Con la unión de estos dos conjuntos, formaremos el conjunto de los números reales, es decir:

> El conjunto de los Números reales es la unión del conjunto de los números racionales con los irracionales y se denotará por R, es decir:
>
> $$R = Q \cup Q'$$

Las relaciones entre los números antes mencionados se pueden ilustrar en el siguiente diagrama:



Al leer de derecha a izquierda en el diagrama, cada conjunto es subconjunto (o parte) del conjunto de números anotados a la izquierda de él.

Por ejemplo:

$Q' \subset R$	$N \subset R$	$N \subset Z$	$W \subset R$
$W \not\subset N$	$Q \subset R$	$Q \cup Q' = R$	$Q \cap Q' = \phi$
$M \subset Z$	$M \cup W = Z$	$W \subset Z$	$N \subset W$

Propiedades de los números reales

Se observa que en el conjunto de los números reales se cumplen, también, las propiedades que hemos mencionado anteriormente para las operaciones de suma y producto. O sea:

1. *Cerradura.*

   Para toda $a, b \in R$,

$$a + b \in R$$
$$ab \in R.$$

2. *Conmutativa.*

   Para toda $a, b \in R$,

$$a + b = b + a$$
$$ab = ba$$

3. *Asociativa.*

   Para toda $a, b, c \in R$,

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(ab)\, c = a\, (b\, c)$$

4. *Distributiva.*

   Para toda $a, b, c \in R$,

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

5. *a) Identidad para la suma.*

   El cero es el elemento idéntico de la suma es decir para toda $a \in R$,

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

   b) Identidad para el producto.

   El uno es el elemento idéntico para la multiplicación es decir para toda $a \in R$.

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

6. *a) Inverso aditivo.*

   Para toda $a \in R$, $-a \in R$ que es el inverso aditivo de a, tal que:

$$a + (-a) = 0$$

b) Inverso multiplicativo.

Para toda $a \in R$, $a \neq 0$ $\frac{1}{a} \in R$ que es el inverso multiplicativo de a, tal que:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Cualquier conjunto que cumpla las seis propiedades anteriores, se llamará campo. En especial el conjunto de los reales forma un campo.

Observación. Si a y $b \in R$, restar estos números significará sumar uno de ellos con el inverso aditivo del otro. O sea:

$$a - b = a + (-b).$$

Y dividir estos dos números significará multiplicar uno de ellos por el inverso multiplicativo del otro. O sea:

$$a/b = a\,(\frac{1}{b})$$

Ejercicios.

1. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   a) $M \subset Q$
   b) $Z \subset R$
   c) $W \subset N$
   d) $Q \cap Q' = \phi$
   e) $N \subset Q'$
   f) $Q \cup Q' = R$
   g) $M \subset N$
   h) $Z \cup Q = R$
   i) $\{0\} \cup N = W$
   j) $\{0\} \subset N$
   k) $Q \cup Z = Z$
   l) $W \cap N = \{0\}$
   m) $(Q' \cup Q) \subset R$

2. Explicar por qué los siguientes números son racionales.

   a) .6

b) 4.32

c) $4\frac{3}{7}$

d) 3.14160

e) 0.3 %

f) 2.1 %

3. Encontrar el número decimal que sea equivalente a cada uno de los siguientes números:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{1000}$

c) 3 1/6

d) $\frac{1}{32}$

e) 0.13 %

f) 5 1/9 %

4. Demostrar que los siguientes números pueden expresarse como el cociente de dos enteros:

Ejemplo.

3.242424. . .
Si $x = 3.242424...$
$100\,x = 324.242424...$
Y si restamos miembro a miembro estas dos ecuaciones, obtenemos
$99\,x = 321$

$$x = \frac{321}{99}$$

a) 0.444. . .

b) 0.505050. . .

c) 5.818181. . .

d) 3.023023. . .

e) **1.214141414. . . .**

f) **Demostrar que $\sqrt{3}$ no es Racional.**

CAPÍTULO 3

Funciones

INTRODUCCIÓN

Consideremos las siguientes situaciones:

En una familia de 6 hermanos se encontró que el instrumento preferido era de la siguiente manera:

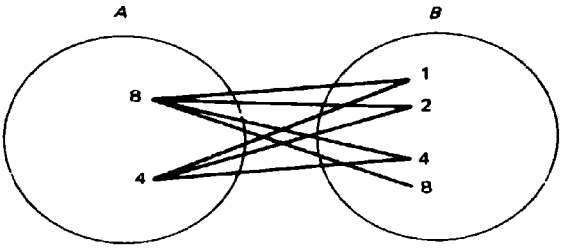
Víctor : el piano	Manuel: la flauta
Ana María: la guitarra	Miguel: el acordeón
Antonio: la guitarra	Luisa: la batería

Las 185 medallas de oro que se obtuvieron en los juegos olímpicos de Munich quedaron distribuidas de acuerdo a la siguiente lista:

Países que obtuvieron al menos una medalla de oro.

País	*Número de medallas*
URSS	50
Estados Unidos	33
Alemania Oriental	20
Alemania Occidental	13
Japón	13
Polonia	7
Hungría	6
Bulgaria	6
Italia	5
Suecia	4
Gran Bretaña	4
Australia	3
Rumania	3
Finlandia	3
Cuba	3
Holanda	3
Francia	2
Checoslovaquia	2
Noruega	2
Corea del Norte	1
Nueva Zelandia	1
Uganda	1
Total:	185

Si tenemos el diagrama



Donde los conjuntos $A = \{8,4\}$ y $B = \{1,2,4,8\}$ y las flechas nos indican una "forma" de conectar los elementos de A con los de B. En el diagrama se observa que tanto el 8 como el 4 están asociados con sus factores respectivamente.

En estas situaciones podemos observar lo siguiente: en cada una de ellas intervienen dos conjuntos y una "forma" de conectar los elementos de los dos conjuntos. Así, por ejemplo, en el primer caso tenemos los siguientes conjuntos:

$$\{\text{E.U., México, URSS. . .}\} \quad \text{y} \quad \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$$

y la "forma" de conectarlos es "el número de medallas obtenidas".

Situaciones como éstas y muchas más de la vida real nos llevan al concepto de ***relación***, el cual, junto con algunos casos particulares de éste, que llamaremos funciones, serán tratados en el presente capítulo.

Sección 3.1

PRODUCTO CARTESIANO

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir producto cartesiano.
2. Dados dos conjuntos encontrar su producto cartesiano.
3. Verificar y/o probar igualdades que involucren productos cartesianos y operaciones con conjuntos.

Definición. Dados dos conjuntos A y B definimos el conjunto producto cartesiano de A con B, que lo denotaremos por $A \times B$ de la siguiente forma:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Observaciones.

a) Los elementos de $A \times B$ son parejas ordenadas.
b) La primera componente de la pareja debe pertenecer al conjunto A y la segunda componente al conjunto B, en ese sentido decimos que son parejas ordenadas.

La pareja (a, b) es igual a la pareja (c, d) si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

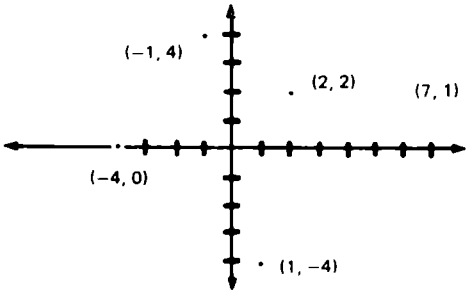
Ejemplos

1. Si $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{0, 1\}$
$A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (e, 0), (e, 1), (i, 0), (i, 1), (o, 0), (o, 1), (u, 0), (u, 1)\}$.

2. Si A = {letras del alfabeto}, B = {dígitos}
$A \times B = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in A \text{ y } \beta \in B\}$

Observación. Note que si $(\alpha, \beta) \in A \times B$, entonces α puede ser cualquier letra del alfabeto y β cualquier dígito, donde algunas de estas parejas son (z,0), $(z, 2)$, $(a, 3)$, $(a, 2)$, $(a, 0)$, etc.

3. Si A = {Reales} y B = {Reales}
$A \times B = R \times R = \{(a, b) \mid a \in R \text{ y } b \in R\}$
donde la interpretación geométrica de este ejemplo es el plano cartesiano:



4. Si $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$

a) $(2, 8) \notin A \times B$ porque $8 \notin B$
b) $(3, 7) \notin A \times B$ porque $3 \notin A$

c) $(5, 8) \notin A \times B$ porque $5 \notin A$
d) $(5, 8) \notin A \times B$ porque $8 \notin B$
e) $(2, 9) \in A \times B$ porque $2 \in A$ y $9 \in B$

En general, $(x, y) \notin A \times B$ si sólo si $x \notin A$ o $y \notin B$.

Observaciones

a) Si A tiene m elementos y B tiene n elementos, entonces $A \times B$ tendrá $m \times n$ elementos.
b) En general, $A \times B \neq B \times A$ (el producto cartesiano no es conmutativo).

Siendo el producto cartesiano un conjunto, podemos efectuar operaciones.

Si $A = \{a, b\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{3, 4\}$
Verificaremos que $(A \times B) - (A \times C) = A \times (B - C)$.
$(A \times B) = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
$(A \times C) = \{(a, 3), (a, 4), (b, 3), (b, 4)\}$

$(A \times B) - (A \times C) = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

$B - C = \{1, 2\}$

$A \times (B - C) = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

entonces

$(A \times B) - (A \times C) = A \times (B - C)$

Esta igualdad se cumple en general. Veamos su demostración:

$(x, y) \in A \times (B - C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B - C)$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C)$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C$
$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \notin (A \times C)$
$\Leftrightarrow (x, y) \in [(A \times B) - (A \times C)]$

Ejercicios

1. Sean $A = \{m, n, \tilde{n}, o\}$, $B = \{a, b, c\}$
   Hallar $A \times B, B \times A, A \times A$ y $B \times B$.
   ¿Son iguales $A \times B$ y $B \times A$?

2. Sean $C = \{$Susana, María, Luisa$\}$ y
   $D = \{$Alfredo, Eduardo$\}$
   Hallar $C \times D$.

3. Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$ y $F = \{x \mid x$ es letra del alfabeto$\}$
   Escribir 10 elementos del conjunto $E \times F$ y de $F \times F$.

4. Si $A = \{x \mid x$ es vocal$\}$ y $B = \{x \mid x$ es dígito$\}$
   Escribir 7 elementos de $A \times B$.

5. Si $C = \{1, 2, 3, 4\}$ y $D = \{5, 6\}$
   Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) $(2, 4) \in C \times D$
   b) $(3, 3) \in C \times D$
   c) $(5, 5) \notin C \times D$
   d) $(6, 3) \in D \times C$
   e) $(5, 1) \in C \times D$
   f) $(1, 5) \notin D \times C$
   g) $(1, 1) \in D \times D$
   h) $(6, 6) \in D \times D$

6. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) $(x, y) \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B$
   b) $y \in B \Rightarrow (x, y) \in A \times B$
   c) $x \notin A \Rightarrow (x, y) \notin A \times B$
   d) $x \in A \wedge y \notin B \Rightarrow (x, y) \notin A \times B$
   e) $x \notin A \vee y \notin B \Rightarrow (x, y) \notin A \times B$

7. Sean $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{4, 5\}$
   Verificar que:
   $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

8. Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$ y $C = \{c, d\}$
   Verificar que:
   $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

9. Sean A = {Lupita, José, María}
B = {Víctor, Manuel}, C = {María, Luisa}
Verificar que: $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

10. Demostrar en general que:
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Sección 3.2

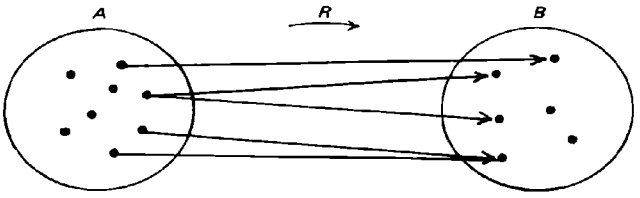
RELACIONES Y FUNCIONES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir relación entre dos conjuntos.
2. Dados dos conjuntos A y B, obtener relaciones de A en B.
3. Definir función entre dos conjuntos.
4. Definir dominio, codominio e imagen de una relación o función.
5. Dada una lista de relaciones, decir cuáles son funciones.

Definición. Cualquier subconjunto R de $A \times B$ se le llamará una RELACIÓN DE A en B.



Observaciones.

a) Dependiendo del número de elementos de A y B existirán muchos subconjuntos de $A \times B$, es decir, se tendrían muchas relaciones de A en B.

b) Una relación R está determinada por dos conjuntos, uno de partida y otro de llegada, así como una proposición que indica la forma de relacionar los elementos de ambos conjuntos, donde la proposición en algunos casos es implícita y se escribe

$R = \{(a, b)/R(a) = b\}$

c) Si una pareja $(a, b) \in R$ se puede representar como:

$R(a) = b$

d) Una relación R de A en B se puede denotar por

$R : A \to B$

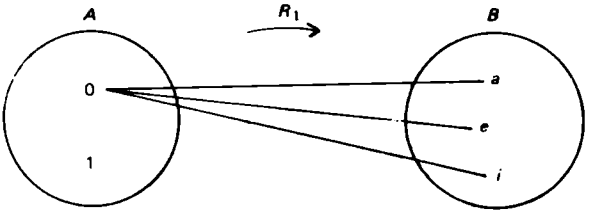
e) Si $R : A \to B$, al conjunto de llegada B se le conoce como CODOMINIO.

Ejemplos.

1) Si $A = \{0, 1\}$ y $B = \{a, e, i\}$

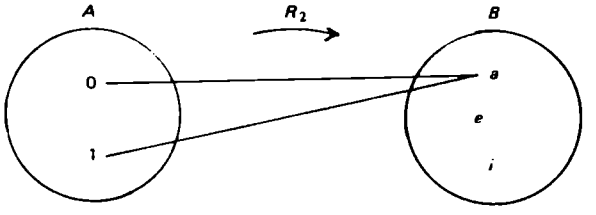
Algunas relaciones de A en B son:

i) $R_1 = \{(0, a), (0, e), (0, i)\}$



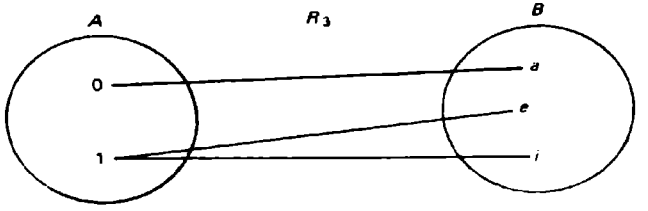
$R_1(0) = a$
$R_1(0) = e$
$R_1(0) = i$

ii) $R_2 = \{(0, a), (1, a)\}$



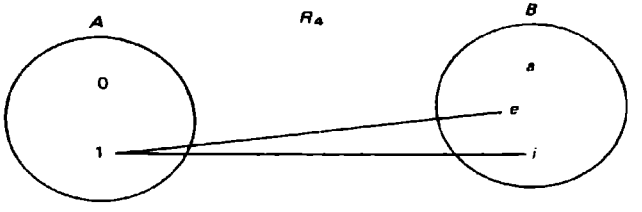
$R_2(0) = a$
$R_2(1) = a$

iii) $R_3 = \{(0, a)\,(1, e)\,(1, i)\}$



$R_3\,(0) = a$
$R_3\,(1) = e$
$R_3\,(1) = i$

iv) $R_4 = \{(1, e), (1, i)\}$



$R_4\,(1) = e$
$R_4\,(1) = 1$

2. Si A = {letras del abecedario} y B = {dígitos} Algunas relaciones de A en B son:

i) $R_1 = \{(a, 1), (e, 2), (i, 3), (o, 4), (u, 5)\}$
ii) $R_2 = \{(m, 0), (n, 0), (p, 0), (q, 0)\}$
iii) $R_3 = \{(x, y)/x$ es vocal y y es un número par$\}$
iv) $R_4 = \{(x, y)/x$ es una consonante y y es un dígito impar$\}$

3. Si $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

Algunas relaciones de A en B son:

i) $R_1 = \{(x, y) / y = x\}$
$= \{(-2, -2), (-1, -1)\,(0, 0), (1, 1)\,(2, 2)\}$

ii) $R_2 = \{(x, y) / y = 2x\}$
$= \{(-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (1, 2)\,(2, 4)\}$

iii) $R_3 = \{(x, y) / y = 1\}$
$= \{(-2, 1)\,(-1, 1)\,(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$

iv) $R_4 = \{(x, y) / x = 2\}$
$= \{(2, -4), (2, -3), (2, -2), (2, -1), (2, 0)\,(2, 1)\,(2, 2),$
$(2, 3), (2, 4), (2, \sqrt{3}), (2, -\sqrt{3})\}$

v) $R_5 = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 4\}$
$= \{(-2, 0), (2, 0), (-1, \sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3}) (0, 2), (0, -2), (1, \sqrt{3}), (1, \sqrt{3})\}$

Dominio e imagen de R.

> **Definición.** Dada una relación $R \subset A \times B$, se le llamaría *Dominio* de la relación al conjunto:
>
> $D = \{a \in A / (a, b) \in R$ para alguna $b\}$

En una relación $R = \{(a, b) / b = R(a)\}$, $b = R(a)$ es llamada la Imagen de a respecto a la relación R.

> **Definición.** Dada una relación $R \subset A \times B$, se llamará Imagen o Dominio de Imagen o Rango de la relación R al conjunto:
>
> $I = \{b \in B / (a, b) \in R$, para alguna $a\}$.

Es decir, el Dominio de R: $A \to B$ es un subconjunto de partida ($D \subset A$) que están relacionados por lo menos con un elemento del conjunto B, y la Imagen en un subconjunto de elementos del conjunto de llegada (ICB) que están relacionados al menos con un elemento del conjunto A.

Ejemplos.

4. Para las relaciones R_1, R_2, R_3 y R_4 del ejemplo 1 de esta sección tenemos:

	Dominio	Imagen
R_1	$\{0\}$	$\{a, e, i\}$
R_2	$\{0, 1\}$	$\{a\}$
R_3	$\{0, 1\}$	$\{a, e, i\}$
R_4	$\{1\}$	$\{e, i\}$

5. Para las relaciones R_1, R_2, R_3 y R_4 del ejemplo 2 de esta sección tenemos:

	Dominio	Imagen
R_1	$\{a, e, i, o, u\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
R_2	$\{m, n, p, q\}$	$\{0\}$
R_3	$\{a, e, i, o, u\}$	$\{0, 2, 4, 6, 8\}$
R_4	{consonantes}	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$

6. Para las relaciones R_1, R_2, R_3, R_4 y R_5 del ejemplo 3 de esta sección tenemos:

	Dominio	Imagen
R_1	$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$	$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
R_2	$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$	$\{-4, -2, 0, 2, 4\}$
R_3	$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$	$\{1\}$
R_4	$\{2\}$	$\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$
R_5	$\{-2, 2, -1, 1, 0\}$	$\{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2, -2\}$

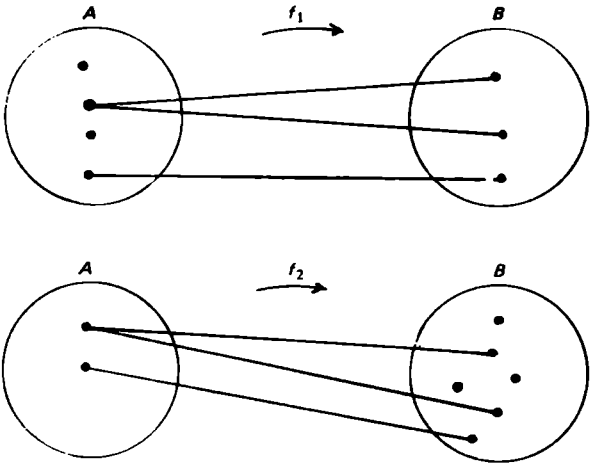
En algunos de los ejemplos anteriores podemos observar que el Dominio no coincide con el conjunto de partida o que existen elementos del Dominio que están relacionados con más de un elemento de la imagen. Las relaciones donde estas situaciones no son permitidas son de gran utilidad y se llamarían *Funciones.*

En nuestro lenguaje común empleamos expresiones como las siguientes: la función de cine empieza a las cuatro de la tarde. Una de las funciones de un agente de tránsito es contribuir a la buena circulación de los vehículos. Las funciones del Presidente de la República se inician un 1o. de diciembre. En matemáticas usaremos la palabra *función* en forma distinta.

Definición. Una relación $f \subset A \times B$ es una *Función* de A en B si sólo si se satisface la siguiente condición: "dos parejas diferentes de f no tienen el mismo primer elemento".

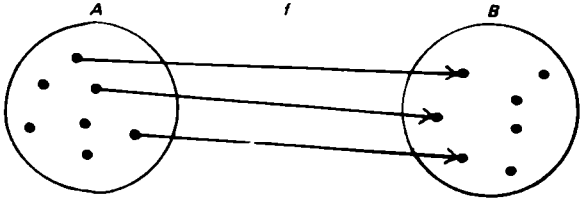
Es decir, una Relación f de A en B es una función, si todo elemento del dominio de f está relacionado con un único elemento del conjunto B.

Los siguientes diagramas muestran situaciones que hacen que una relación *no sea función*

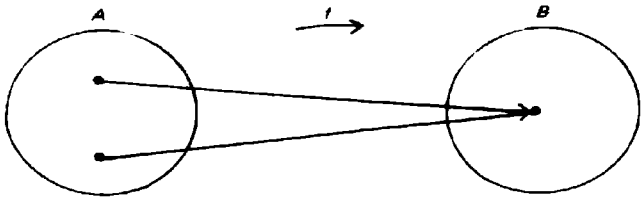


f_1 y f_2 no son funciones, ya que existen elementos del dominio que van a dos elementos distintos del codominio.

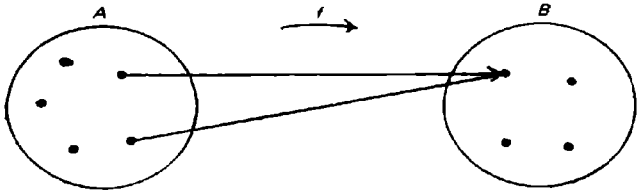
La definición de función no pone restricciones a los elementos del conjunto de llegada (codominio), de tal forma que puede haber elementos en el segundo conjunto que no estén relacionados con elementos del primer conjunto y elementos del segundo conjunto que le correspondan más de un elemento en el primer conjunto. Esto se muestra en los siguientes diagramas:



f sí es una función



f sí es una función



f sí es una función

Como una función f de A en B es una relación, se puede representar también como:

$$f : A \to B$$

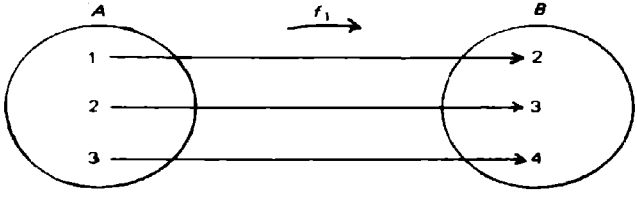
y si una pareja (a, b) pertenece a f se puede indicar como $f(a) = b$, que es la forma más común para representar una función.

Ejemplos.

7. Si $A = \{1, 2, 3\}$, y $B = \{2, 3, 4\}$ algunas funciones de A en B son:

   i) $f_1 = \{(a, b) / b \text{ es el siguiente de } a\}$

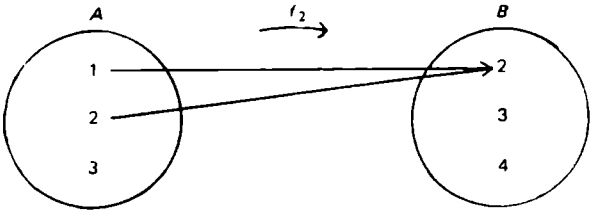
   $f_1 = \{(1, 2)\,(2, 3)\,(3, 4)\}$



$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 4$

Dominio $= \{1, 2, 3\}$
Imagen $= \{2, 3, 4\}$

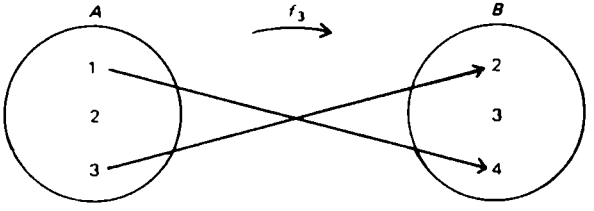
ii) $f_2 = \{(1, 2)(2, 2)\}$



$f(1) = 2,\ f(2) = 2$

Dominio $= \{1, 2\}$
Imagen $= \{2\}$

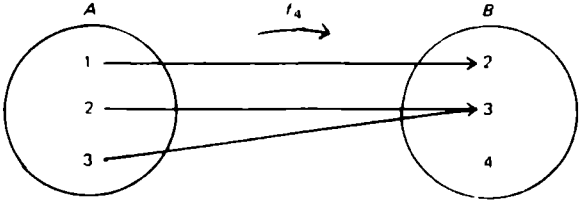
iii) $f_3 = \{(1, 4), (3, 2)\}$



$f(1) = 4, f(3) = 2$

Dominio $= \{1, 3\}$
Imagen $= \{2, 4\}$

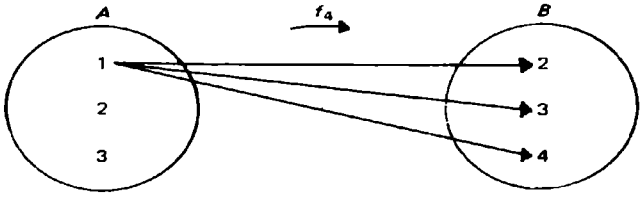
iv) $f_4 = \{(1, 2), (2, 3)(3, 3)\}$



$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 3$
Dominio $= \{1, 2, 3\} = A$
Imagen $= \{2, 3\}$

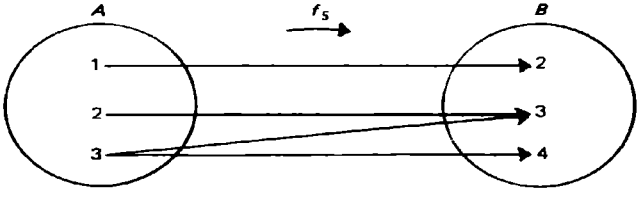
y algunas relaciones de A en B que *no son funciones* son:

v) $f_4 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$



no es función, ya que el elemento 1 va a más de un elemento del codominio.

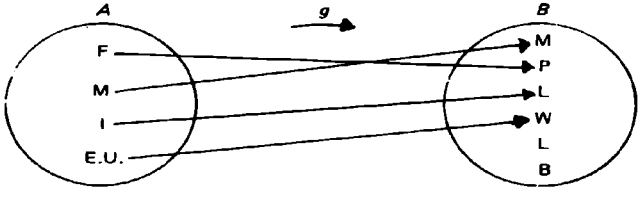
vi) $f_5 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 3)\}$



no es una función ya que el elemento 3 tiene dos imágenes y ésta debe ser única.

8. Sea A = {Francia, México, Inglaterra, E. U.}
y B = {México, París, Londres, Washington, Lima, Bogotá}

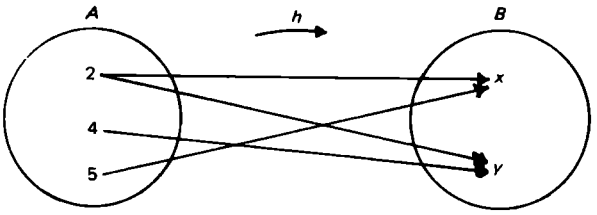
La Relación $g : A \to B$ dada por $g = \{(a, b) / b =$ la ciudad capital de $a\}$ es una función.



Dominio = A Imagen = {México, París, Londres y Washington}

9. Si $A = \{2, 4, 5\}$ y $B = \{x, y\}$ La relación h: $A \rightarrow B$ definida por:

$h = \{(a, b) / b = x$ si a es primo y $b = y$ si a es par$\}$.



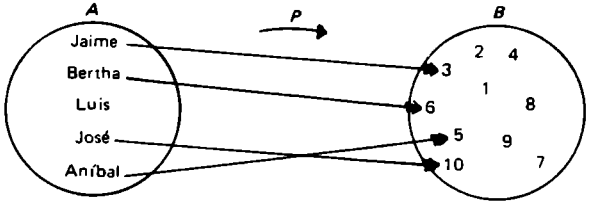
no es una función de A en B, ya que el número 2 que está en el primer conjunto se relaciona con dos elementos del segundo conjunto.

10. Consideremos los siguientes datos: Jaime tiene 3 hermanos, Bertha tiene 6 hermanos, Luis no tiene hermanos, José tiene 10 hermanos y Aníbal tiene 5 hermanos.

Sea A = {Jaime, Bertha, Luis, José, Aníbal}
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

la relación P : $A \rightarrow B$ definida como:

$P = \{(a, b) / b$ es el número de hermanos que tiene $a\}$



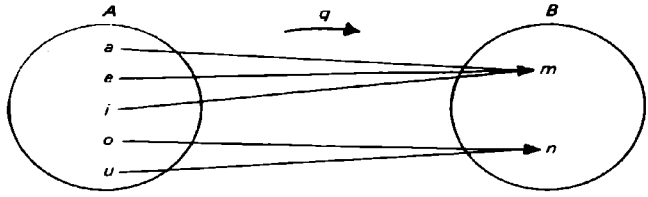
Es una función.

Dominio = {Jaime, Bertha, José, Aníbal}
Imagen = {3, 6, 5, 10}

11. Sea $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{m, n\}$ la relación $q: A \to B$ definida como:

$$q = \{(a, m), (o, n), (i, m), (e, m), (u, n)\}$$

es una función.



12. Sea A = {dígitos} y B = {enteros del 0 al 10} la relación $f: A \to B$ dada como:

i) $f = \{(x, y) / y = x\}$
$= \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9)\}$

es una función

ii) $f = \{(x, y) / y = x + 1\}$
$= \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (9, 10)\}$

es una función

iii) $f = \{(x, y) / y = 0$ si x es par o $y = 1$ si x es impar$\}$.

$= \{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (3, 1), (4, 0), (5, 1), (6, 0), (7, 1), (8, 0), (9, 1)\}$

Ejercicios

1. Si $A = \{x \mid x$ es una vocal$\}$ y
$B = \{x \mid x$ es un dígito impar$\}$

a) Escribir $A \times B$.
b) Escribir por lo menos 5 relaciones diferentes de $A \times B$.

2. Sean $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{3, 5, 7, 9\}$ y $R \subset A \times B$, relación definida por:
   $R = \{(a,b) \mid b \text{ es menor que } a\}$

   a) Escribir R como un conjunto de pares ordenados.
   b) Dar dominio, codominio e imagen de R.

3. Sea $R = \{(3, 5), (3, 9), (5, 7), (4, 1), (2, 0)\}$ dar dominio de R, imagen de R, y representarlos por medio de un diagrama.

4. Si se tiene la siguiente tabla:

Niños	*Años*
Luisa	12
Elsa	13
Carmen	10
Alicia	15
Francisco	14
Manuel	16
José	12

   Además, $C = \{x \mid x \text{ es una niña}\}$
   $D = \{x \mid x \text{ es un niño}\}$ y
   $R \subset C \times D$ es la relación dada por.

   "La niña es mayor que"

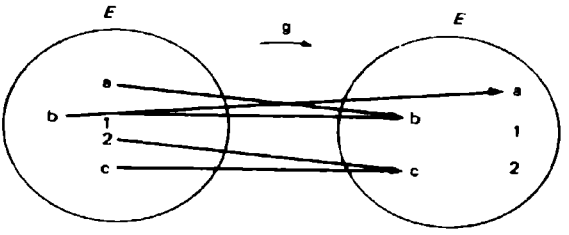
   a) Escribir R como un conjunto de pares ordenados.
   b) Dar dominio, codominio e imagen de R.

5. Sean $A = \{a, b\}$ y $B = \{1, 0\}$
   Decir cuántas funciones diferentes existen de A en B y especificar cuáles son.

6. Sea $C = \{a, e, i, o, u\}$ defínase $f: C \to C$ por:
   $f(a) = u, f(e) = u, f(i) = a, f(o) = o, f(u) = a.$

   a) ¿Cuál es la imagen de f?
   b) ¿Cuál es el dominio de f?
   c) ¿Cuál es el codominio de f?

7. Sea $E = \{a, 1, b, 2, c\}$ donde $g : E \to E$ se define por:



a) ¿Cuál es la imagen de g?
b) ¿Cuál es codominio de g?

8. Especificar si las siguientes relaciones son funciones o no.

a) $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$
b) $f = \{(a, a), (b, a)\}$
c) $f = \{(3, 3), (3, 2), (4, 3)\}$
d) $f = \{(a, b), (c, d), (c, e)\}$

9. Especificar si las siguientes relaciones son funciones o no.

a) A = {alumnos de esta escuela}
B = {Enteros positivos}
f = $\{(a, b) \mid b$ es el número de años que tiene $a\}$

b) A = {Enteros menores que 30}
B = $\{x \to x$ es una letra del alfabeto$\}$
f = $\{(a, b) \mid b$ es la letra que está en el lugar $a\}$

c) A = {ciudadanos de la ciudad de Monterrey}
B = {negro, café, azul, morado}
f = $\{(a, b) \mid b$ es el color de ojos de $a\}$

d) A = {hombres en una sociedad polígama}
B = {mujeres en una sociedad polígama}
f = $\{(a, b) \mid b$ es el esposo de $a\}$

e) A = {países en América}
B = {presidentes en América}
f = $\{(a, b) \mid b$ es el presidente de $a\}$

10. Sean $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2\}$ y $f : A \to B$ especificar si las siguientes relaciones son funciones o no. En cada caso dar dominio e imagen y escribir f como un conjunto de parejas ordenadas.

   a) $f = \{(x, y) / y = +\sqrt{x}\}$
   b) $f = \{(x, y) / y = \pm\sqrt{x}\}$
   c) $f = \{(x, y) / y = 2\}$
   d) $f = \{(x, y) / x = 2\}$
   e) $f = \{(x, y) / y = 2x\}$
   f) $f = \{(x, y) / x$ es menor que $y\}$.

11. Sea $h = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

   a) Indicar si h es función o no.
   b) Dar el dominio de h.
   c) Dar la imagen de h.
   d) Dar la forma o regla de correspondencia como una ecuación que contenga los símbolos $h(x)$, x.

12. Sea $g = \{(-2, -4), (-1, -3), (0, -2), (1, -1)\}$

   a) Indicar si g es función o no.
   b) Dar dominio de g.
   c) Dar la imagen de g.
   d) Dar la forma o regla de correspondencia como una ecuación que contenga los símbolos $g(x)$, x.

13. Una función f cuyo dominio es el conjunto:
   $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
   está definida por $f(x) = 3x + 2$.

   a) Encuentre: $f(0)$, $f(-1)$
   b) Escribir f como un conjunto de pares ordenados.
   c) Escribir la imagen de f.

14. Una función g cuyo dominio es el conjunto $D_g = \{-1, 0, 1\}$ está definida por $g(x) = 3$.

   a) Escribir g como un conjunto de pares ordenados.
   b) Escribir la imagen de g.
   c) ¿Cómo son $g(-1)$ y $g(1)$?

Sección 3.3

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir función inyectiva.
2. Definir función sobreyectiva.
3. Definir función biyectiva.
4. Dada una lista de funciones, clasificarlas en inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

Te pudiste haber dado cuenta que en la definición de función al codominio no le exigimos restricciones. En algunos problemas que aparecen en matemáticas y otras ciencias, nos encontramos con funciones donde el codominio tiene restricciones; de acuerdo con dichas restricciones, haremos la siguiente clasificación:

Función inyectiva

Definición. Una función $f : A \to B$ es INYECTIVA si sólo si se satisface la siguiente propiedad:

$$\text{Si } a \neq b \text{ entonces } f(a) \neq f(b)$$

Observaciones:

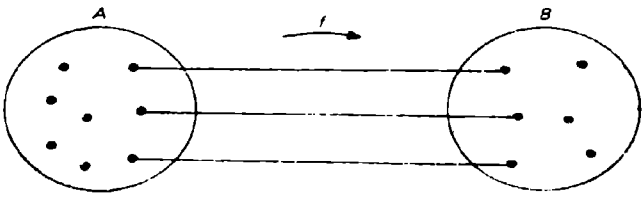
a) Una función no es inyectiva si un elemento de su imagen está relacionado con dos elementos de su dominio.

b) Si $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$, es una implicación que en este caso es verdadera, podemos expresarla utilizando su contrarrecíproca que dice:

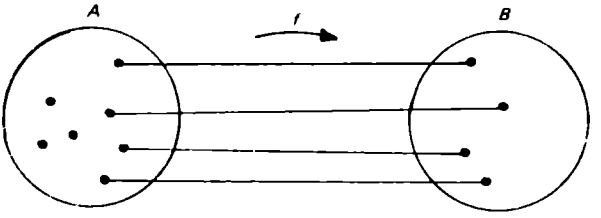
$$\text{Si } f(a) = f(b) \text{ entonces } a = b,$$

que es otra forma de expresar la definición de función inyectiva.

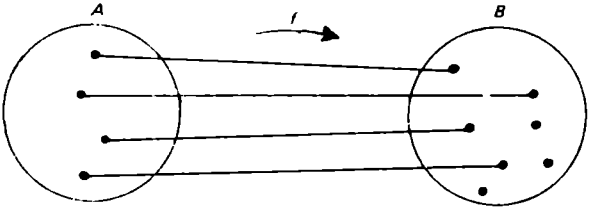
Los siguientes diagramas presentan funciones inyectivas y no inyectivas.



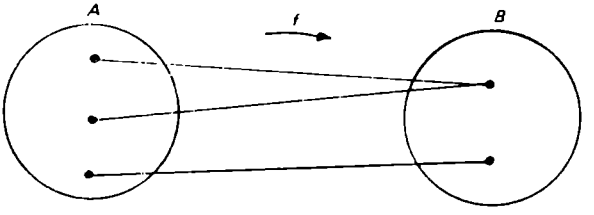
f sí es inyectiva.



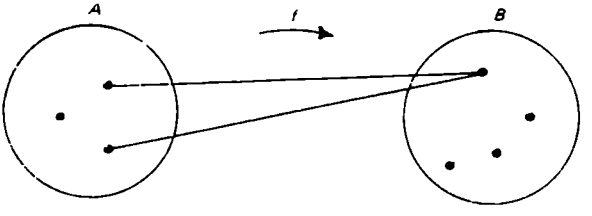
f sí es inyectiva.



f sí es inyectiva.



f no es inyectiva.

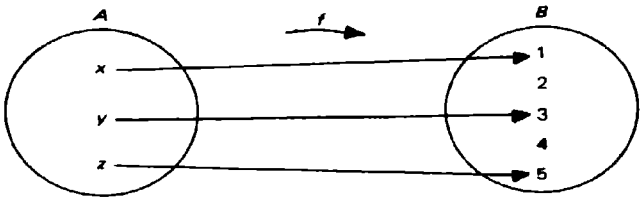


f no es inyectiva.

Ejemplos.

1. Sean $A = \{x, y, z\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

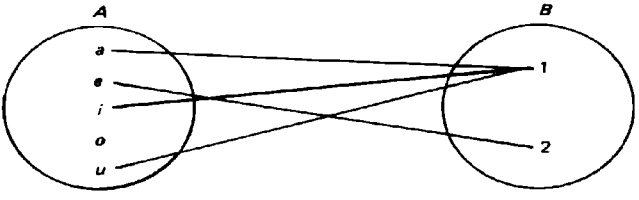
   $f = \{(x, 1), (y, 3), (z, 5)\}$



   f sí es inyectiva.

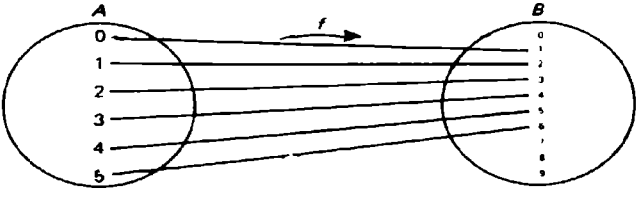
2. Sean $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{1, 2\}$

   $f = \{(a, 1), (i, 1), (u, 1), (e, 2)\}$



   f no es inyectiva ya que existe más de una pareja con segundo elemento idéntico.

3. Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\text{dígitos}\}$ y $g : A \to B$ definida como $g = \{(a, b) / g(a) = b = a + 1\}$

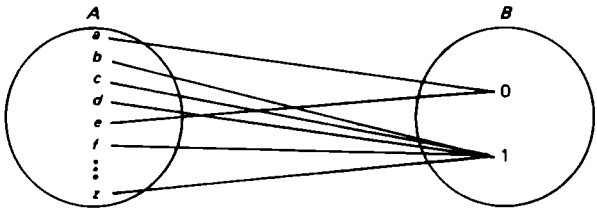


   f sí es inyectiva.

4. Sean A = {letras del alfabeto}, B = {0, 1}

h = {(a, b) / b = 0 si a es vocal y
b = 1 si a es consonante}

f no es inyectiva



Función sobreyectiva

Definición. Una función $f : A \to B$ es sobreyectiva si sólo si se satisface la siguiente propiedad:

Para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Observaciones:

a) Una función es sobreyectiva si el conjunto de llegada (codominio) coincide con la imagen de la función.
b) Una función puede ser sobreyectiva y no *ser* inyectiva.
c) Para afirmar si una función $f : A \to B$ es sobreyectiva se tiene que indicar el conjunto de partida A y el de llegada B.

Ejemplos.

5. Sea A = {x, y, z}, B = {a, b, c} y $f : A \to B$ definida como f = {(x, a) (y, b), (z, c)}

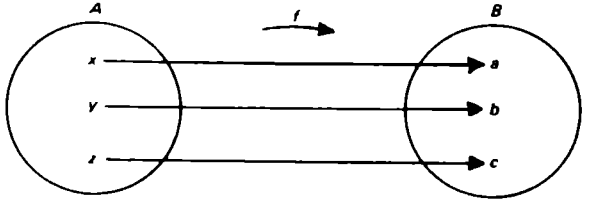


Imagen = $\{a, b, c\} = B$

f sí es sobreyectiva.

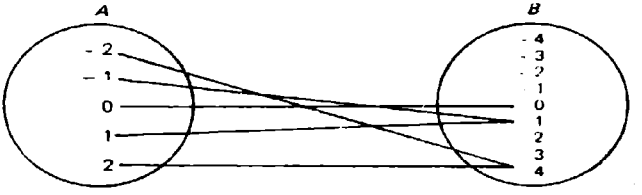
6. Sean A = {Estudiantes de una universidad que sólo estudian una carrera}, B = {carreras de esa universidad} y $f : A \to B$ definida como $f = \{(a, b) / b$ es la carrera que estudia $a\}$ o sea:

$$f(\text{estudiante}) = \text{carrera que estudia}$$

Se observa que f es sobreyectiva, puesto que en cada carrera existe por lo menos un estudiante inscrito en ella.

7. Sea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y
$B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
y $f : A \to B$ definida como

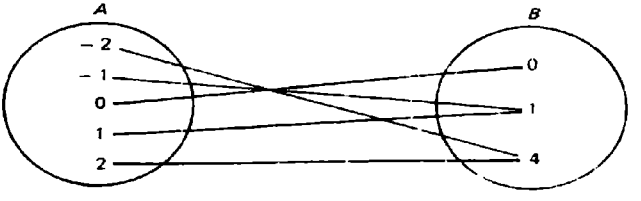
$f(x) = x^2$.



f no es sobreyectiva.

8. Sea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 4\}$
y $f : A \to B$ definida como

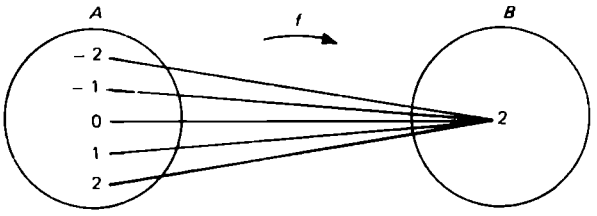
$f(x) = x^2$.



f sí es sobreyectiva.

9. Sea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{2\}$.
y $f : A \to B$ definida como

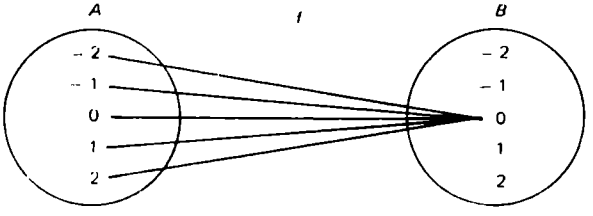
$f(x) = 2$.



f sí es sobreyectiva

10. Sea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
y $f : A \to A$ definida por

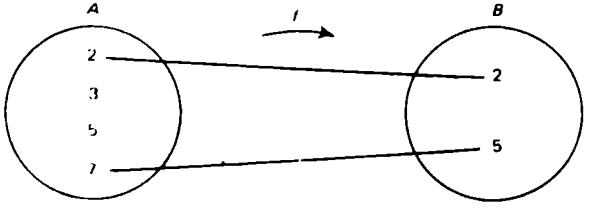
$f(x) = 0$



f no es sobreyectiva

11. Sea $A = \{2, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 5\}$

$f = \{(2, 2), (7, 5)\}$.

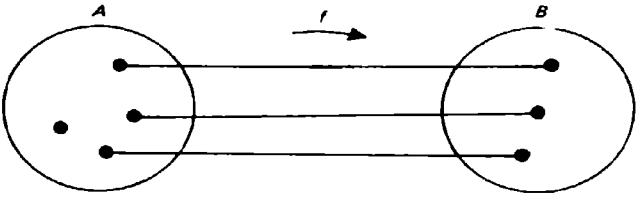


f sí es sobreyectiva.

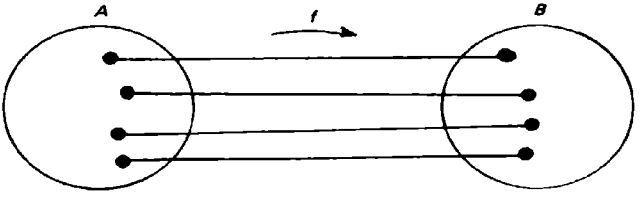
Función biyectiva

Definición. Una función $f : A \to B$ es BIYECTIVA si y sólo si:

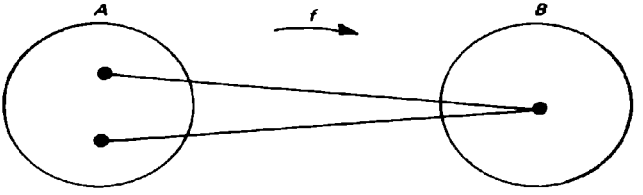
i) f es inyectiva.
ii) f es sobreyectiva.



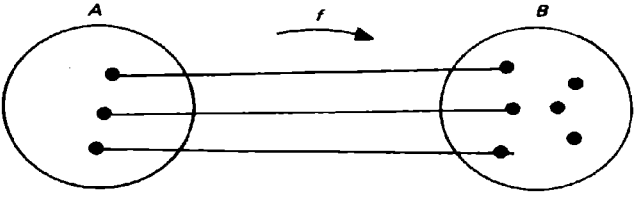
f es biyectiva.



f es biyectiva.



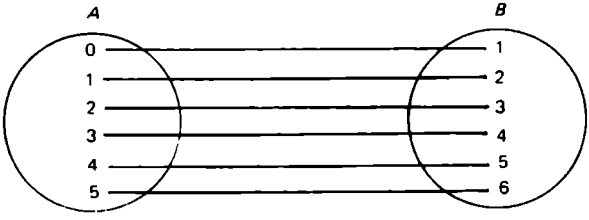
f no es biyectiva.



f no es biyectiva.

Ejemplos.

12. Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
y $g : A \to B$ definida como
$g = \{(a, b) / g(a) = b = a + 1\}$



f es inyectiva y sobreyectiva, por lo que f es biyectiva.

13. Para los ejemplos del 1 al 11 de esta sección tenemos que:

Ejemplo	*f es inyectiva*	*f es sobreyectiva*	*f es biyectiva*
1	sí	no	no
2	no	sí	no
3	sí	no	no
4	no	sí	no
5	sí	sí	sí
6	no	sí	no
7	no	no	no
8	no	sí	no
9	no	sí	no
10	no	no	no
11	sí	sí	sí

Ejercicios.

1. Clasificar las siguientes funciones en funciones inyectivas que no son sobreyectivas, funciones sobreyectivas que no son inyectivas, funciones que no son ni inyectivas ni sobreyectivas y funciones biyectivas.

a) $A = \{1, 2, 3\} : B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $f: A \rightarrow B$ $f = \{(x, y) \mid y = 2x + 3\}$

b) Sean $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$
$f: A \rightarrow B$, definida como $f(x) = x$.

c) Sean $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{\text{dígitos}\}$.
$f: A \rightarrow B$, definida como $f(x) = x^2$.

d) Sean $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 8, 27\}$
$f: A \rightarrow B$, definida como $f(x) = x^3$.

e) Sean $A = \{0, 1, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$.
$f: A \rightarrow B$, definida como $f(x) + \sqrt{x}$.

f) Sean $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$.
$f: A \rightarrow B$, definida como $f(x) = x^2$.

g) $A = \{$ Estados de la República Mexicana $\}$; $B = Z$
$f: A \rightarrow B$ $f = \{(x,y) \mid y$ es el número de habitantes del Estado $x\}$

h) $A = \{$Países de América Latina$\}$; $B = Z$
$f: A \rightarrow B$ $f = \{(x,y) \mid y$ es el número de analfabetas que tiene el país $x\}$

i) $A = Z$; $B = \{0, 1\}$
$f: A = \{$Dígitos$\}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ es par} \\ 1 \text{ si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

j) $A = \{1, 2, 3, 4,\}$; $B = \{a, e, i, o, u\}$
$f: A \rightarrow B$ $f = \{(1, a), (2, e), (3, u), (4, o)\}$

k) $A = \{$Estudiantes que estudian una sola carrera en una universidad$\}$.
$B = \{$Directores de carrera de esa universidad$\}$
$f: A \rightarrow B$, $f(A) =$ el director de la carrera que estudia x

l) $A = \{$Empleados de una empresa$\}$; $B = \{x \in N \mid x \leq 100\}$
$f: A \rightarrow B$, $f(\text{un empleado}) =$ edad de ese empleado.

m) $A = \{$Autos en un estado$\}$

B = { Placas de autos en ese estado }
f(auto) = la placa del auto.

2. Dar condiciones para que la función constante sea:

   a) Una función inyectiva y no sobreyectiva.
   b) Una función sobreyectiva y no inyectiva.
   c) Una función que no sea ni inyectiva ni sobreyectiva.
   d) Una función biyectiva.

   En cada caso dar un diagrama.

3. ¿Es la función identidad una función biyectiva?

4. ¿Qué modificación tendríamos que hacer en la definición de función identidad para que no sea una función sobreyectiva?

Sección 3.4

OPERACIONES BINARIAS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

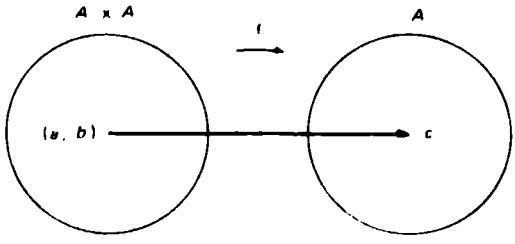
1. Definir operación binaria en un conjunto.
2. Dar ejemplos de operaciones binarias.
3. Dada una operación binaria decir si:

   a) Es asociativa.
   b) Es conmutativa.
   c) Tiene elemento identidad.
   d) Tiene elemento inverso.

4. Verificar que la suma en R y el producto en $R - \{0\}$ cumple las propiedades para una operación binaria.

El concepto de función permite formalizar la idea de operación.

Definición. Sea A un conjunto diferente del vacío. Entonces, una **OPERACIÓN BINARIA en A es una función** $f: A \times A \to A$.



o sea, $f((a, b)) = c$
donde la operación f se denota en algunos casos por $*$, $\#$ y θ. Y así lo representaremos por:

$$* ((a, b)) = c$$
o $$* (a, b) = a * b = c$$

Observación. La condición para que una función sea operación binaria en un conjunto A es que al relacionar cualesquier dos elementos de A nos dé como resultado otro elemento de A (cerradura en A).

Ejemplos.

1. Sea $A = \{ a, b, c, d \}$
   Sea $*$ la operación definida por la siguiente tabla:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

   Es decir:

$a*a = a$ $\quad$ $b*a = b$
$a*b = b$ $\quad$ $b*b = c$
$a*c = c$ $\quad$ $b*c = d$
$a*d = d$ $\quad$ $b*d = a$ $\quad$ etc.

   Además, observamos que $*$ es una operación binaria porque en la tabla aparecen solamente elementos de A.

2. Sea $A = \{ 0, 1 \}$
   $a \# b$ significa $a \times b$.
   Tenemos:

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Es decir

$0 \# 0 = 0 \times 0 = 0$ $\qquad$ $0 \# 1 = 0 \times 1 = 0$

$1 \# 0 = 1 \times 0 = 0$ $\qquad$ $1 \# 1 = 1 \times 1 = 1$

Donde observamos que sí es una operación binaria.

3. $A = \{ 0, 1 \}$
   $a \cdot b = a + b$

   Tenemos:

+	0	1
0	0	1
1	1	2

   No es operación binaria porque $2 \notin A$.

4. $A = \{$ Enteros negativos $\}$
   $a \# b = 2a - b$

   No es operación binaria puesto que si $a = -2$
   $b = -5$

$$(-2) \# (-5) = 2(-2) - (-5)$$
$$= -4 + 5$$
$$= 1 \notin \text{Enteros negativos.}$$

5. Sea $A = \{ x, y, z \}$
   y $H = P(A)$ (conjunto potencia).
   Definimos la siguiente operación en H. Sean $A_1, A_2 \in A$

$$A_1 * A_2 = A_1 \cup A_2$$

Puesto que la unión de dos subconjuntos de A es también un subconjunto de A, se tiene que $A_1 \cup A_2 \in H$, entonces la unión es una operación binaria en $P(A)$.

Notamos que en los naturales, la suma y el producto son operaciones binarias; sin embargo, la resta no lo es ($5 - (8) = -3$ y $-3 \notin$ N). En los enteros, suma, resta y multiplicación sí son operaciones binarias; la división no lo es.

Propiedades de las operaciones binarias

Para todo $a, b, c, \in A$.

a) *Propiedad conmutativa.*

$$a * b = b * a.$$

b) *Propiedad asociativa.*

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

c) *Elemento idéntico para la operación* $*$

Existe $e \in A$, tal que para todo a $\in A$

$$e * a = a * e = a$$

Donde e lo llamaremos elemento identidad de A respecto a $*$.

d) *Elemento inverso de la operación* $*$.

Para toda $a \in A$ existe $a^{-1} \in A$, tal que:

$$a * a^{-1} = e.$$

Donde a (a^{-1}) lo llamaremos elemento inverso de A respecto a $*$.

Si en un conjunto A se tienen definidas dos operaciones, se puede hablar de la propiedad distributiva de una operación sobre la otra. Es decir; sean $*$ y # dos operaciones definidas en A, entonces diremos que $*$ se distribuye sobre # si y sólo si, para todo $a, b, c \in A$

$$a * (b \# c) = (a * b) \# (a * c).$$

Observación. Se puede probar que el elemento identidad (e) es único. También para cada elemento a el inverso de éste (a^{-1}) es único.

Ejemplos.

6. En el ejemplo 2 tenemos que el producto cumple con las propiedades conmutativa, asociativa y elemento identidad $(e = 1)$, pero observamos que el elemento cero no tiene inverso respecto a esa operación. O sea, no existe $x \in A$, tal que $0 . x = 1$.

7. En el ejemplo 4 si A = { Enteros } entonces $a \# b = 2a - b$ sí es operación binaria y observamos que no es conmutativa ni asociativa. O sea:

$$a \# b = 2a - b$$

$$b \# a = 2b - a$$

puesto que $2a - b \neq 2b - a$

$$a \# b \neq b \# a$$

por lo que # no es conmutativa
Ahora

$$(a \# b) \# c = (2a - b) \# c = 2(2a - b) - c$$

$$a \# (b \# c) = a \# (2b - c) = 2a - (2b - c)$$

puesto que $2(2a - b) - c \neq 2a - (2b - c)$

$$(a \# b) \# c \neq a \# (b \# c)$$

por lo que # no es asociativa

También veremos si existe elemento identidad en A respecto a esta operación. O sea,

$$a \# e = a$$
$$2a - e = a$$
$$a = e$$

Entonces, para todo $a \in A$ su identidad sería el mismo, el cual nos dice que habría tantas identidades como elementos tiene A y recordemos que la identidad debe ser única, entonces no existe identidad.

Como no existe elemento identidad en A para la operación, no tiene sentido preguntarse por los inversos. Recordemos que en los reales se cumplen estas propiedades, excepto en la inversa cuando $a = 0$.

Ejercicios.

1. Una operación binaria # en un conjunto A está representado por:

$$(a, b) \rightarrow a \# b.$$

a) ¿Qué son *a* y *b*?
b) ¿Se requiere que $a \# b$ sea un elemento de A?
c) ¿Tiene $a \# b$ que ser único?

2. *a*) ¿Por qué la sustracción no es una operación binaria en el conjunto de los enteros positivos? Dar un contraejemplo.
   b) Nombrar un conjunto donde la sustracción sea una operación binaria.

3. *a*) ¿Por qué la división no es una operación binaria en el conjunto de los números reales?
   b) Nombrar un conjunto donde la división sea una operación binaria.

4. Sea $A = \{ a, b, c \}$, la operación binaria $*$ está definida mediante la siguiente tabla:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	c

a) Hallar el elemento que la operación binaria $*$ asocia con cada uno de los pares ordenados siguientes:

i) (a,b)
ii) (b,c)
iii) (c,b)
iv) $((a,a),c)$
v) $(a,(b,c))$
vi) $((c,a),(b,b))$.

b) Completar de tal manera que resulte una proposición verdadera.

i) $b * c =$
ii) $(a * b) * c =$
iii) $(c * b) * (c * a) =$
iv) $[\,[(a * c) * b] * c\,] =$

5. En cada uno de los ejercicios diga si la operación $*$ es una operación binaria sobre el conjunto A.

   a) $A = R : a * b = + \sqrt{a + b}$
   b) $A = Z : a * b = 3a^2 - 8b$
   c) $A = N : a * b = (a - b)^2$
   d) $A = N : a * b = 2a^2 - b^3$
   e) $A = \{ 0, 1, 2 \}$. $*$ está definida por la siguiente tabla:

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

   f) $A = \{ (x,y) \mid x \in R \wedge y \in R \}$; $(a,b) * (c,d) = (a + c, b + d)$.
   g) $A = Z : a * b = a \div b$.

6. La operación binaria $\cdot$ está definida en el conjunto de los números reales por

$$(a,b) = a \cdot b = a + 3b.$$

   ¿Es $\cdot$ una operación conmutativa? ¿Es asociativa? ¿Existe elemento identidad e inverso?

7. La operación binaria # está definida en el conjunto de los números reales por:

$$\#\ (a,b) = a \ \#\ b = a^2 + ab + b^2$$

   ¿Es conmutativa la operación # ? ¿ Es asociativa? ¿Existe elemento identidad e inverso?

8. La operación binaria $*$ está definida en el conjunto de los números naturales por:

$$*\,(a,b) = a * b = a + b - ab$$

   ¿Es $*$ conmutativa? ¿Es asociativa? ¿Existe elemento identidad y elemento inverso?

9. Sea A el conjunto de los enteros, $* = +$ y $\# = -$. ¿Se distribuye la operación $*$ sobre $\#$? ¿Y $\#$ sobre $*$?

10. Sea A el conjunto de los racionales, $* = \div$ y $\# = +$. ¿Se distribuye la operación $*$ sobre $\#$? ¿Y $\#$ sobre $*$?

11. Sea A cualquier conjunto y $*$ una operación binaria en A, probar que:

    a) Si existe la identidad, ésta es única.
    b) Si existe elemento inverso para cada elemento de A, éste es único.

CAPÍTULO 4

Expresiones algebraicas

INTRODUCCIÓN

El Álgebra es un lenguaje de símbolos y tiene una estructura caracterizada por:

a) Un conjunto determinado de símbolos que representan números.
b) Un conjunto determinado de operaciones: suma, resta, producto, cociente, exponenciación y radicación.
c) Las propiedades o leyes de las operaciones.

En este capítulo nos dedicaremos a recordar y afirmar nuestros conocimientos de operaciones algebraicas. Las variables que intervienen en estas expresiones pertenecen al conjunto de los números reales, por ello, el estudio de estas operaciones, que es de gran importancia, siempre se hace con base en las propiedades de las igualdades y de los números reales.

La habilidad para manipular las expresiones algebraicas es un requisito para progresar satisfactoriamente en la aplicación del Álgebra y esta habilidad sólo se podrá adquirir por medio de la práctica.

Las letras llamadas variables sirven para representar números, y las letras *x*, *y*, *z* se utilizan como variables, sin embargo, puede utilizarse cualquier otra letra del alfabeto.

Sección 4.1

INTRODUCCIÓN A LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el alumno deberá ser capaz de:

1. Enunciar las propiedades de la igualdad.
2. Aplicar las propiedades de la igualdad.
3. Definir qué es una identidad.
4. Definir qué es una ecuación.
5. Definir lo siguiente:
   a) Expresión algebraica
   b) Término
   c) Términos semejantes
6. Identificar y usar correctamente la siguiente terminología: expresión algebraica, término, variable y constante.
7. Identificar un monomio, binomio, trinomio, polinomio, y el grado de un término y de un polinomio.
8. Escribir proposiciones verbales como expresiones algebraicas y viceversa.
9. Calcular el valor numérico de una expresión algebraica.

Propiedades de la igualdad

Postulado 1. Propiedad reflexiva.

$$\forall\, a \in R,\ a = a.$$

Postulado 2. Propiedad simétrica.

$$\forall\, a, b \in R,\ a = b \Leftrightarrow b = a.$$

Postulado 3. Propiedad transitiva.

$$\forall\, a, b, c \in R, \text{ si } a = b \text{ y } b = c \Rightarrow a = c$$

Postulado 4. Propiedad de sustitución.

Si $a, b \in R$ y si $a = b$ entonces a puede ser sustituida por b en cualquier expresión.

Teorema 1. Propiedad aditiva de la igualdad.

$$\forall\, a, b, c, d \in R, \text{ si } a = b \text{ y } c = d \Rightarrow a + c = b + d.$$

Demostración.

1. $a, b, c \in R.$	dada
2. $a + c \in R,$	cerradura de la suma
3. $a + c = a + c$	reflexión de la igualdad
4. $a = b,\ c = d$	dado
entonces:	
5. $a + c = b + d$	sustitución en el 2o. miembro de a por b y de c por d.

Teorema 2. Propiedad mutiplicativa de la igualda.

$$\forall\, a, b, c, d \in R, \text{ si } a = b \text{ y } c = d \Rightarrow ac = bd.$$

Demostración.

1. $a, b, c \in R$	dada
2. $ac \in R$	cerradura del producto
3. $ac = ac$	reflexión de la igualdad
4. $a = b$ y $c = d$	dada
entonces:	
5. $ac = bd$	sustitución.

Existen dos tipos principales de igualdad: la identidad y la ecuación. Ambas tienen propiedades en común, aunque sus significados son diferentes.

Definición. Una identidad es una proposición de igualdad que es válida para todos los valores permisibles de las letras que aparecen en ella y se denotará por el símbolo: ≡

Ejemplo.

1. $x + 3 - 1 - x \in 2$

Se observa que para $x \in R$ esta igualdad se satisface.
Por ejemplo, si $x = 1$,
tenemos $1 + 3 - 1 - 1 = 2$
$2 = 2.$

Y si $x = 5$
tenemos: $5 + 3 - 1 - 5 = 2$
$2 = 2.$

Definición. Una ecuación es una proposición de igualdad válida sólo para algunos valores permisibles de las letras que aparecen en ella.

Ejemplo.

2. $x + 1 \quad 0$

Solamente el valor $x = -1$ satisface esta expresión.

3. $x^2 \quad 1 \quad 0$

Unicamente $x = -1$ y $x = 1$ satisfacen la expresión.

Definición. Una expresión algebraica es una combinación de números, variables (o símbolos) y operaciones como la suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplos.

4. Las siguientes expresiones son ejemplos de expresiones algebraicas:

a) $5a$
b) $3x - 2y$
c) $2x^2 \quad x + 5$

d) $3ab$

e) $(2a - b)^2$

f) $\dfrac{3a - 3b}{6a - 6b}$

g) $\sqrt{a - b}$

h) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Definición. Se llaman términos de una expresión algebraica a las partes de ésta que se encuentran separadas por un signo de más o de menos.

Ejemplos.

5. En las siguientes expresiones se indica cuántos términos tiene cada una de ellas.

   a) $3ab$ tiene sólo un término.
   b) $3x - 2y$ tiene dos términos $3x$ y $2y$.
   c) $2x^2 - x + 5$ tiene tres términos que son $2x^2$, x y 5.
   d) $\frac{1}{2}a^2 + 3b$ tiene dos términos que son $\frac{1}{2}a^2$ y $3b$.

La parte numérica de un término que precede a la variable se llama coeficiente numérico o simplemente coeficiente.

Ejemplo.

6. En cada uno de los siguientes términos se indica el coeficiente.

   a) en x el coeficiente es 1.
   b) en $3ab$ el coeficiente es 3.
   c) en $\frac{1}{2}a^2$ el coeficiente es $\frac{1}{2}$.
   d) en $\frac{3a}{2}$ el coeficiente es $\frac{3}{2}$.

Observación. Cuando un término consta de un solo número, se le llama constante.

Ejemplo.

7. En las siguientes expresiones se indica cuál es el término constante.

   a) $3a^2 + 5$ es una expresión que consta de dos términos y el segundo término 5 es una constante.

   b) $4x^2 - 5x - 7$ es una expresión que consta de tres términos y el último de ellos 7 es una constante.

Observaciones.

a) Todo término consta de un coeficiente numérico y de una parte literal.
b) Todo término está formado por números y variables multiplicadas, donde el factor numérico será el coeficiente numérico del término.

Definición. Términos semejantes son aquellos términos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes.

Ejemplos.

8. Se indica si los siguientes términos son semejantes.

   a) $2m^2n$, $5m^2n$, $0m^2n$, $\frac{1}{2}m^2n$ son términos semejantes.

   b) $5xy^2$, $3x^2y$, $4x^2y^2$ no son términos semejantes.

Definición. Un polinomio es una suma de términos, en el cual todas las variables tienen exponentes enteros no negativos y ninguna variable aparece en un denominador.

Observación. Un polinomio con términos de la forma ax^n se le llama polinomio en x.

Ejemplos.

9. En las siguientes expresiones se indica si son polinomios en x.

   a) Las siguientes expresiones son polinomios en x:
   $3x$
   $2x - 1$

$3x^2 + 8x - 1$
$x^3 - 8x^2 + 2x - x + 2$

b) $2x^{1/2} - 1$ no es un polinomio en x porque el exponente de x es una fracción.

c) $7x^{-1} + x + 3$ no es un polinomio en x porque el exponente en el primer término es un número negativo.

d) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 4$ no es un polinomio en x porque las variables están en el denominador de una fracción.

Los polinomios pueden tener más de una variable

Ejemplos.

10. Los siguientes polinomios tienen más de una variable:

a) $x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$, las variables son x y y.
b) $2mn + 5m^2n$, las variables son m y n.

Si una expresión algebraica tiene un solo término se llama monomio; si tiene dos términos, binomio; si tiene tres términos, trinomio, y si tiene dos o más términos se llama polinomio.

Ejemplos.

11. A continuación se presentan ejemplos de monomios, binomios y trinomios.

a) Las siguientes expresiones son monomios:
5
$3x$
$(1/3)x^2$
xy^2z

b) Las siguientes expresiones son binomios:
$2xy + 5x^2y$
$2x - 1$
$3x^2 + 1$

c) Las siguientes expresiones son trinomios:
$x^2 + 2x + 1$
$25x^2 + 40x - 16$

El grado de un término es la suma de los exponentes de las variables que tiene el término.

Ejemplos.

12. Se obtiene el grado de cada uno de los términos dados.
   a) El grado de $3x^2$ es dos, ya que el exponente de x es 2.
   b) El grado de $2m^3n^4$ es 7, ya que la suma de los exponentes de las variables m y n es $3 + 4 = 7$.
   c) El grado de $5a^3b^3c^3$ es 9, ya que la suma de los exponentes de las variables es $3 + 3 + 3 = 9$.
   d) El grado del término constante 7 es cero. La constante 7 se puede expresar como $7 = 7x^0$.
   e) El grado de Z es 1.

El grado de un polinomio es igual al grado del término que tiene el mayor grado.

Ejemplos.

13. Se obtiene el grado de los siguientes polinomios.
   a) Para obtener el grado del polinomio $3x^2 + xy^2 + y^4$,
   primero se obtendrá el grado de cada término:
   El grado de $3x^2$ es 2;
   el de xy^2 es $1 + 2 = 3$
   el de y^4 es 4
   y el mayor de 2, 3 y 4 es 4, por lo que el grado del polinomio es 4.
   b) El grado de $3x^2 + 2x^2y^3 - x^3y^4 + 5$ es 7, ya que x^3y^4 es el término de mayor grado. Los grados de los otros términos son 2, 5 y 0.
   c) El grado de $x^3 + 3x^2 + 7x + 3$ es 3, ya que x^3 es el término de mayor grado.

Orden de un polinomio. Los términos de un polinomio se pueden ordenar respecto a una variable en forma descendente (decreciente) o ascendente (creciente).

Ejemplos.

14. Se explica cómo están ordenados los siguientes polinomios:
    a) El polinomio $x^3 + 3x^2 + 7x + 1$ está ordenado en forma descendente.
    b) El polinomio $x^3y - x^2y^2 - xy^3 + y^4$ está ordenado en forma decreciente o descendente respecto a la variable x, y está ordenado en forma creciente o ascendente respecto a la variable y.

Reducción de expresiones algebraicas

> Reducir o simplificar una expresión algebraica significa sumar o restar los términos semejantes de la expresión.

Recordemos cómo sumar números con signos positivos o negativos.

> Si dos números tienen el mismo signo (ambos positivos o negativos), ambos números se suman y al resultado se le colocará el mismo signo.

> Si dos números tienen signos diferentes se restará el número menor al mayor y se colocará el signo del número mayor.

Para restar dos números utilizaremos que $a - b = a + (-b)$.

Ejemplos.

15. Se suman o restan los siguientes números:
    a) $5 + 8 = 13$
    b) $(+5) + (-8) = -3$
    c) $(-4) + (+9) = +5$
    d) $(-9) + (-8) = -17$
    e) $8 - 5 = (8) + (-5) = +3$
    f) $(-9) - (-1) = (-9) + (+1) = -8$
    g) $(10) - (-10) = (10) + (10) = 20$
    h) $(-12) - (+5) = (-12) + (-5) = -17$

La propiedad distributiva de los números reales nos dice que $a(b + c) = ab + ac$ y si le aplicamos la propiedad simétrica de la igualdad podemos decir que

$$ab + ac = a(b + c)$$

que es lo que utilizaremos para reducir términos semejantes.

Ejemplos.

16. Se reducen o simplifican los siguientes términos:

a) $2x + 3x = (2 + 3)(x) = 5x$
b) $3a + 5a - 2a = (3 + 5 - 2)a = 6a$
c) $6b^2 - b^2 = (6 - 1)b^2 = 5b^2$

Observación. De los ejemplos anteriores podemos afirmar que para sumar o restar dos términos semejantes, se sumarán o restarán sus coeficientes y la parte variable quedará igual.

Ejemplos.

17. Se reducen o simplifican los siguientes términos:
a) $5y + 8y = 13y$
b) $9z - 3z = 6z$
c) $-a^2b + a^2b = 0$
d) $5x + 4x - 9x - 3x = -3x$
e) $10x^2y + 7x^2y - 16x^2y = x^2y$
f) $\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}a$
g) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{2x^2 - x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$
h) $a^x + 2a^x = 3a^x$

Traducción de proposiciones verbales a expresiones algebraicas y viceversa

En algunas aplicaciones del álgebra se presentan situaciones o problemas expresados con palabras que pueden ser traducidos a una expresión algebraica, a continuación daremos ejemplos de esta traducción.

Ejemplos.

18. Los siguientes ejemplos son situaciones expresadas de las dos formas, verbal y algebraica.

Expresión verbal	Expresión algebraica
Dos veces un número	$2n$
La suma de un número y cuatro	$x + 4$

Siete más que z	$z + 7$
Tres menos que y	$y - 3$
La razón de x a 4	$x / 4$
Un número restado de 8	$8 - y$
Una tercera parte de un número	$x / 3$
Cinco más que tres veces un número	$3x + 5$
Cuatro menos que el producto de 5 y m	$5m - 4$
Cuatro veces la suma de z y 5	$4(z + 5)$

Cálculo de valores numéricos en expresiones algebraicas

En ocasiones se hace necesario evaluar expresiones para valores específicos y simplemente se sustituye en la expresión dada a evaluar, utilizando el orden de las operaciones numéricas.

Ejemplos.

19. Se evalúan las siguientes expresiones si $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$ y $d = 4$
    a) $3b - 2a + c - 4d = 3(5) - 2(2) + (3) - 4(4) = 15 - 4 + 3 - 16 = -2$
    b) $4ab - 3cd = 4(2)(5) - 3(3)(4) = 40 - 36 = 4$
    c) $\dfrac{cd}{a + 2b} = \dfrac{(3)(4)}{2 + 2(5)} = \dfrac{12}{2 + 10} = \dfrac{12}{12} = 1$

Ejercicios.

1. Enunciar el postulado o teorema de igualdad que justifique el enunciado, si suponemos que $a, b, c \in R$.

    a) Si $a = 2$ entonces $2 = a$
    b) Si $3 = a$ y $a = b$ entonces $3 = b$
    c) $\sqrt{5} = \sqrt{5}$
    d) Si $a = b$ y $b = 3$ entonces $a = 3$
    e) Si $a = b$ y $a + 5 = 13$ entonces $b + 5 = 13$
    f) Si $a = b$ y $(a + 5)\,3 = a + 5$ entonces $(b + 5)\,3 = b + 5$
    g) Si $[\, a + (b + c)\,] = 3b$ y $3b = 4$ entonces $[\, a + (b + c)\,] = 4$
    h) Si $a = \sqrt{5}$ y $b = c$ entonces $a + b = \sqrt{5} + c$
    i) Si $a = b$ y $c = 5$ entonces $a\,c = b\,5$
    j) Si $a = 4$ y $4 = b$ entonces $a + 4 = 4 + b$

k) Si $a + b = c$ y $c = 6$ entonces $a + b = 6$
l) Si $a + b = c$ y $c = 6$ entonces $(a + b) + c = c + 6$
m) Si $a + b = c$ y $c = 6$ entonces $(a + b)\, c = c\, 6$

2. Dar la justificación de cada proposición en la demostración.

Si $a, b, c \in R$ y $a = b$ entonces $a + c = b + c$

Demostración.

a) $a, b, c \in R$, $a = b$ _____
b) $a + c \in R$ _____
c) $a + c = a + c$ _____
d) por tanto, $a + c = b + c$ _____

3. Demostrar que:

Si $a, b, c, \in R$ y $a = b$ entonces $ac = bc$

4. Decir si las siguientes expresiones son identidades o ecuaciones: $x \in R$

a) $2x + 1 = x + x + 1$
b) $x + 7 = 5$
c) $3x - 1 = 8$
d) $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$
e) $x + 5 = x + 3 + 2$

5. Completar lo siguiente:

Una expresión algebraica que contiene uno o más monomios o términos se llama _____. Un polinomio con dos términos se llama _____.
Y un polinomio de tres términos recibe el nombre de _____. Los términos con las mismas literales y los mismos exponentes, sin importar que tengan diferente coeficiente se llaman _____. El coeficiente de un término indica _____.

6. Indicar si las siguientes expresiones son polinomios o no:

a) 9
b) $2a - b$
c) $x + x^{1/2}$
d) $3ab + a^2b + ab^2 + b^3$

e) $\frac{3}{y^2} - \frac{2}{y} + 1$

f) $2xy + z$

7. Indicar si los siguientes términos son semejantes:

a) $8x$ y $6x$

b) $\frac{-1}{5}ab$ y $5ab$

c) $2a$ y $3ab$

d) $2a^2b$ y $-4a^2b$

e) xy^2 y $4xy^2$

f) $2ab^2$ y $5a^2b$

g) b^x y $5b^x$

h) $3m$ y $3n$

i) $9z$ y $3z$

j) $8x^2y^2$ y $4y^2x^2$

8. Determinar el grado de los siguientes términos:

a) $3a$

b) $-7ab^2$

c) a^3b^4

d) $-2a^4b^5c^3$

e) $8x^4y^7$

f) $9x^4y^3z^5$

9. Determinar el grado de los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 5x + x^3 + 3x^4$

b) $x^5 - 2x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4$

c) $7ab^2 - 4a^3 + 3a^2b + b^3$

d) $3mn + 2m^4n^2 - 5m^3n^4$

e) $5m + m^4 + m^2 - 5m^3 + 5$

f) $2a^2b^3c^2 + 4a^3b^3c^3 - 6$

g) $2x^2y^3 + xy^2 + 4x^3 - y$

h) $4x - 9 + 11x^2 + 25x^4 - 5x^5 - 2x^3$

10. Para el dominio $2x^2y^3 + xy^2 + 4x^3 - 5y$ completar lo siguiente:

a) El grado del polinomio es _____.

b) Ordenado en forma creciente respecto a la variable x es _____.

c) Ordenado en forma creciente respecto a la variable y es _____.

d) El coeficiente del término de grado uno es _____.

e) El coeficiente del término de grado 3 es _____.
f) El coeficiente del término de grado 5 es _____.

11. Ordenar los siguientes polinomios respecto a la variable que se indica, en orden decreciente y creciente:

a) $x^2 + 5x + x^3 + 3x^4$
b) $5m + m^4 + m^2 - 5m^3 + 5$
c) $x^5 - 2x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4$, respecto a la variable y
d) $7ab^2 - 4a^3 + 3a^2b + b^3$, respecto a la variable b
e) $7ab^2 - 4a^3 + 3a^2b + b^3$, respecto a la variable a
f) $3mn + 2m^4n^2 - 5m^3n^4$, respecto a la variable n
g) $3mn + 2m^4n^2 - 5m^3n^4$, respecto a la variable m
h) $4x - 9 + 11x^2 + 25x^4 - 5x^5 - 2x^3$
i) $2x^2y^3 + xy^2 + 4x^3 - y$

12. Reducir los siguientes términos semejantes:

a) $3x + 4x$
b) $7b - 3b$
c) $9a + 5a + 2a$
d) $10c + 8c$
e) $-2b - 4b - 5b$
f) $-7d + 7d - 7d$
g) $\frac{-1}{3}ab - \frac{2}{3}ab$
h) $\frac{2}{3}a^2b + \frac{1}{4}a^2b$
i) $-x^2y - x^2y - 2x^2y$
j) $-12mn + 24\,mn$
k) $-8m^2n + 8m^2n$
l) $8x^2 - 12x^2$
m) $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^4$
n) $\frac{2}{5}xy^2 - \frac{2}{3}xy^2$
ñ) $6x + 4x - 10x + 7x$
o) $2abc - 5abc + 3ab$
p) $2a^x + 3a^x$
q) $5x^a - 2x^a + 4x^a$

13. Convertir cada enunciado en una expresión algebraica:

a) Tres más que v.
b) El doble de b.

c) Siete menos que h.
d) P disminuido en 5.
e) La suma de g con 8.
f) 11 aumentado en f.
g) La diferencia entre u y 11.
h) Tres veces un número.
i) Siete menos que el triple de un número.
j) El triple de un número.
k) El cuadrado de la diferencia de dos números.
l) Ocho menos que el cubo de un número.
m) El cociente de la suma de dos números y la diferencia de los mismos.
n) Un número dividido entre 8.
ñ) El producto de un número por 6.
o) El cociente de noventa y dos entre c.
p) Tres veces un número disminuido en 18.
q) Dos más que dos veces un número.
r) La mitad de la suma de dos números.
s) El cuadrado de un número menos la mitad del mismo número.
t) La quinta parte de la suma de dos números.
u) El doble del cubo de un número.

14. Escribir una frase que corresponda a cada expresión algebraica.

a) $x + 4$
b) $16 - b$
c) $7n$
d) $V / 5$
e) $2a + \frac{1}{2}a$
f) $a^3 - 3a$
g) $2(a + 5)$
h) $2a + 1$
i) $\frac{a + b}{4}$
j) $2a / 5$
k) $(a + b) / 3$
l) $3a - \frac{1}{3}a$

15. Evaluar las siguientes expresiones si $a = b$, $b = 4$, $c = -2$ y $d = 3$.

a) $2a - 3b + 4c - 5d$
b) $\frac{6cd}{2a + b}$

c) $\dfrac{ab - cd}{ad}$

d) $4ab - 7cd$

e) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}$

f) $3(a + b) - 4bc$

g) $\dfrac{3a - 6b}{3}$

h) $\dfrac{8c - 16}{8c + 16}$

i) $\dfrac{ad + 20}{c}$

j) $\sqrt{b} - b^2d$

16. Se dan a continuación las fórmulas para el área (A), perímetro (P) y circunferencia (C) de algunas figuras geométricas:

Para un cuadrado de lado L, se tiene que $A = L^2$, $P = 4L$.

Para un rectángulo de ancho a y largo L se tiene que $A = (L)(a)$, $P = 2L + 2a$.

Para un círculo de radio r, se tiene que $A = \pi r$, $C = 2 \pi r$.

Para un triángulo de base b y altura h, $A = \dfrac{bh}{2}$

Obtener lo que se indica para cada ejercicio.

a) El perímetro y área de un cuadrado de lado:
   i. $L = 5$
   ii. $L = 8$

b) El perímetro y área de un rectángulo cuyos lados son:
   i. $L = 5$, $a = 2$
   ii. $L = 8$, $a = 4$

c) El perímetro de un triángulo equilátero cuya base y altura ras
   i. $b = 2$, $h = 5$
   ii. $b = 5$, $h = 7$

d) Obtener el área de una circunferencia de radio:
   i. $r = 12$
   ii. $r = 8$

Sección 4.2

SUMA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

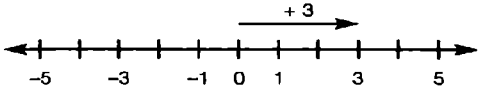
1. Sumar y restar expresiones algebraicas.
2. Simplificar expresiones algebraicas que contengan diferentes paréntesis de agrupación.

Suma y resta de expresiones algebraicas

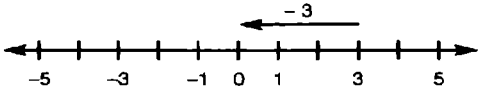
Primero, recordemos las operaciones de suma y resta en los reales. Habíamos aprendido que dos números del mismo signo se suman normalmente y a esta suma se le coloca el signo de ambos números; si éstos tienen diferente signo, al número mayor se le resta el menor y se coloca el signo del mayor. Por ejemplo:

$$(+1) + (+2) = +3$$
$$(-2) + (-3) = -5$$
$$(-1) + (+5) = +4$$
$$(+3) + (-4) = -1$$

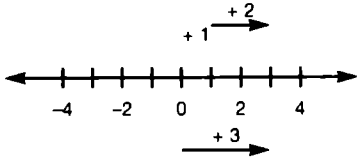
Esto tiene una explicación formal y general. Una suma la podemos observar en la recta numérica, en términos de desplazamiento (cambios de posición): en ella, el número positivo $+a$ se representa por el movimiento de a unidades hacia la derecha, a partir del origen y a lo largo de esta recta horizontal; el número negativo $-a$ se representa por el movimiento de a unidades a la izquierda y a lo largo de dicha recta. Por ejemplo, + 3 lo representamos por:



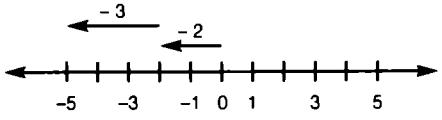
– 3 lo representamos por:



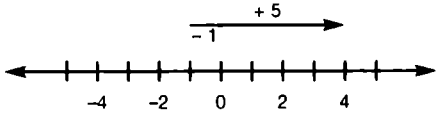
Así (+ 1) + (+ 2) = + 3 se representa por:



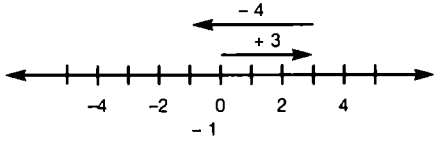
(– 2) + (– 3) = – 5



(– 1) + (+ 5) = + 4



(+ 3) + (– 4) = – 1



De lo observado, podemos concluir:

> Números de signos iguales se suman y se coloca el mismo signo, y números de signos diferentes se restan y se coloca el signo del número mayor.

En este momento conviene generalizar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva en el conjunto de los números reales.

a) La suma o el producto de cualquier número finito de números reales es independiente de la forma en que se ordenen o se agrupen.

b) El producto de un número real y la suma de cualquier número finito de números reales es igual a la suma de los productos del primer número con cada uno de los sumandos de la suma finita.

$a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_n$

Suma de polinomios

> Para sumar polinomios se suman los términos semejantes de los polinomios.

Ejemplos.

1. Se suman las expresiones dadas:

a) $(a + b) + (3b - 2a) =$

Se colocarán los dos polinomios en forma vertical sin paréntesis, ordenándolos de tal manera que se formen columnas de términos semejantes y se sumarán o restarán los coeficientes de los términos semejantes, es decir, si los coeficientes tienen el mismo signo se sumarán los números y se colocará el mismo signo, y si los coeficientes tienen signos diferentes éstos se restarán y se le colocará el signo del número mayor, y por último la parte variable pasará igual.

Es decir:

$$\begin{array}{r} a + b \\ -2a + 3b \\ \hline -\ a + 4b \end{array}$$

b) $(3x^2 - 3x + 5) + (5x^2 - 2x - 1) =$

Se acomoda en forma vertical y se hace la operación.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 3x + 5 \\ 5x^2 - 2x - 1 \\ \hline 8x^2 - 5x + 4 \end{array}$$

c) $(5x^2 + 2xy + 6y^2) + (y^2 - xy + x^2) =$

$$\begin{array}{r} 5x^2 + 2xy + 6y^2 \\ x^2 - xy + y^2 \\ \hline 6x^2 + 1xy + 7y^2 \end{array}$$

La respuesta es $6x^2 + xy + 7y^2$

d) $(2a + 4ab - 5b^2) + (7b^2 + 3ab + 5) + (2 - 3a)$

$$\begin{array}{r} 2a + 4ab - 5b^2 + 5 \\ + 3ab + 7b^2 \\ -3a \\ \hline -\ a + 7ab + 2b^2 + 7 \end{array}$$

Resta de polinomios

> Para restar polinomios se eliminan los paréntesis de los polinomios por restar y se cambia el signo de cada uno de los términos, después se suman los términos semejantes.

Ejemplos.

2. Se simplifican cada una de las expresiones dadas:

a) $(x + 5) - (3x - 4) = (x + 5) + (-3x + 4)$

Primero eliminaremos el signo negativo que está entre paréntesis:

$(x + 5) - (3x - 4) = (x + 5) + (-3x + 4)$ y se acomodan en forma vertical para sumar o restar los términos semejantes

$$\begin{array}{r} x + 5 \\ -3x + 4 \\ \hline -2x + 9 \end{array}$$

b) $(3x^2 - x + 1) - (2x^2 + x - 1)$

$= (3x^2 - x + 1) + (-2x^2 - x + 1)$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - x + 1 \\ -2x^2 - x + 1 \\ \hline x^2 - 2x + 2 \end{array}$$

c) $(a^2b - 3ab^2 + 2) - (2a^2b - 3b^2 - 5)$

$= (a^2b - 3ab^2 + 2) + (-2a^2b + 3b^2 + 5)$

$$\begin{array}{r} a^2b - 3ab^2 + 2 \\ 2a^2b \qquad + 5 + 3b^2 \\ \hline 1a^2b - 3ab^2 + 7 + 3b^2 \end{array}$$

También se puede tener combinada la suma y resta de polinomios

Ejemplo.

3. Se simplifica la expresión algebraica:

$$(2a - b) + (b - 5a) - (3a - 5b) =$$
$$(2a - b) + (b - 5a) + (-3a + 5b)$$

$$\begin{array}{r} 2a - b \\ -5a + b \\ -3a + 5b \\ \hline -6a + 5b \end{array}$$

Se puede tener expresiones algebraicas en donde aparezcan diferentes símbolos de agrupación como ( ), [ ], { } y se pedirá que simplifiquemos dicha expresión, para ello se harán las operaciones de adentro hacia afuera, es decir, primero se eliminarán los paréntesis interiores y después se avanzará hacia fuera teniendo cuidado con los signos negativos.

Ejemplos.

4. Se simplifican las siguientes expresiones:

a) Simplificar la expresión $2a - [5a - (a + b)]$ eliminando el paréntesis y reduciendo términos semejantes:

$$\begin{aligned} 2a - [5a - (a + b)] &= 2a - [5a - a - b] \\ &= 2a - 5a + a + b \\ &= -2a + b \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} &3a - \{[2a + 3b - (a - b)] + 4b\} \\ &= 3a - \{[2a + 3b - a + b] + 4b\} \\ &= 3a - \{2a + 3b - a + b + 4b\} \\ &= 3a - \{a + 8b\} \\ &= 3a - a - 8b = 2a - 8b \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} &5x - \{4x - [6y + (3x - 2y)] + (3x + 4y)\} \\ &= 5x - \{4x - [6y + 3x - 2y] + 3x + 4y\} \\ &= 5x - \{4x - 6y - 3x + 2y + 3x + 4y\} \\ &= 5x - \{4x\} \\ &= 5x - 4x \\ &= x \end{aligned}$$

Ejercicios.

I. Efectuar las siguientes operaciones:

1. $(6x - 5) + (2x + 3y)$
2. $(12a + b) + (b - 3a)$
3. $(6x - 5y) - (2x + 3y)$
4. $(12a + b) - (b - 3a)$
5. $(3R + 9S) + (5R - 8S)$
6. $(3R + 9S) - (5R - 8S)$
7. $(5m + 2n) + 10m$
8. $8m - (10m - n)$
9. $(5x^2 - 10x + 6) + (3x^2 - 3x - 4)$
10. $(7x^2 + x + 1) - (4x^2 + x + 1)$
11. $(12z^2 + 10z - 6) + (5z^2 - 8z + 7)$
12. $(4y^2 - 8y + 1) - (6y - 6y^2 - 1)$
13. $(3R^2 - 5R + 2) - (7R^2 + R)$
14. $(3x - 1) + (8x^2 + x + 5)$
15. $(5x^2y - 1) + (1 - 7x^2y)$
16. $(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + (x^3 - y^3)$
17. $(4a^2\ 3ab - 5b^2) + (-8a^2 - 6ab + 7b^2)$
18. $(x^2 - 3xy + y^2) - (3x^2 - 4xy + y^2)$
19. $(x^3 + 10x^2y + 3xy^2) + (2x^3 - 12x^2y - 3xy^2)$
20. $(2m - n) + (2m + p) + (-4m + n + p)$
21. $(2p^2 + q^2) + (pq - 3q^2) - (4pq - p^2)$
22. $(2a^2b - 3ab^2 + 3ab) + (4a^3 + 3a^2b + 2ab^2) - (3ab - ab^2 - 2)$
23. $(x^2 + 2xy + y^2) - (4x^2 + 4xy + y^2) + (9x^2 - 6xy + y^2)$

II. Sumar o restar cada una de las expresiones algebraicas y evaluar cada resultado si $a = -1$ y $b = 2$.

1. $(5a - 3b) + (3a - 6b)$
2. $(a^2 + b^2) + (3b^2 - 5) - (2a^2 - 1)$
3. $(a^2 - 6ab + b^2) - (3a^2 - ab + b^2)$
4. $(2a + b) + (3a + 2b) + (a + b)$
5. $(a^2 + 1) - (b^2 + a) - (a^2 - b^2)$

III. Eliminar los símbolos de cada agrupación y reducir términos semejantes en cada uno de los siguientes ejercicios:

1. $3x - [2x - (x + y)]$
2. $-[5a - (a + 2b) + 6] - 5b$
3. $5a - [2a + 3b - (a + b)] + 2b$
4. $8y - [3y - (2y - y + b)] - 3$

5. $3x - \{4y - [5x - (8y - 7x)]\}$
6. $(4x + y) - [3x - (2x - y)]$
7. $3m - [2m - 3n - (m - n)] + 4n$
8. $2x - [(4x + 5y) - 4] + (x - y)$
9. $(x + y) - \{3x - [(3y - x) + (x - 2y)] + 5\} + x$
10. $6m^2 - \{-[m^2 + 2n - (5 - n) - (-4 + m^2)]\} - (3n + 2)$
11. $a - b + \{-a + [(a + b) - (a - b + c) - (-(-b) + a)]\}$
12. $1 - \{(3a + b) - [(5a + b) - (8a - 3b)]\} - (a - b)$
13. $6 + 3a - \{(b - 2) - [6 - 3a - (1 - 2a)]\} + 3$
14. $-5x + \{-3y - [(5x - y) - (3x + 2y)]\} + (x + y)$
15. $4a - b - \{3a - (9a + b) - [(-a + b) - a] - 6y + x\}$
16. $10x^2 - \{(3x^2 - 4y^2) - [2y^2(-3y^2 - 2x^2)] - (3x - 2)\}$
17. $(3R^2 - 4S^2) - \{[5R^2 - (3R^2 - 2S^2)] - (2R^2 - S^2)\}$
18. $5n^2 - (3n - 2) - \{(5m - n) - [2 - (5 - m)]\}$
19. $(3x^2 + 8y^2) - \{x^2 - 3 - [5x^2 + (8y^2 + 2)]\}$

Sección 4.3

PRODUCTO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Identificar y utilizar las leyes de los exponentes.
2. Multiplicar expresiones algebraicas.

La multiplicación se basa en las propiedades de los números reales, pero antes de entrar en este tema, se verán algunas definiciones y propiedades de las potencias.

> Si n es un entero positivo, el símbolo x^n llamado potencia n-ésima de x, es el producto de n factores cada uno igual a x.

Es decir:

$$x^n = \underbrace{x.x.x...x}_{n \text{ factores de } x}$$

o la variable x se multiplica por sí misma n veces.

> En el símbolo x^n, a x se le llama base de la potencia y a n su exponente.

Ejemplos.

1. Descomponer en factores las siguientes potencias:

   a) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
   b) $x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$
   c) $y^8 = y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$
   d) $(ab)^2 = (ab)(ab)$
   e) $(2x)^3 = (2x)(2x)(2x)$

> Primera ley de los exponentes.
> Si m y n son enteros positivos y x es un número real, entonces $x^m x^n = x^{m+n}$.

Ejemplos.

2. Se aplica la primera ley de los exponentes.

   a) $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$
   b) $a^4 a = a^{4+1} = a^5$
   c) $(x-1)^2 (x-1)^5 = (x-1)^{2+5} = (x-1)^7$
   d) $(ab)(ab) = (ab)^{1+1} = (ab)^2$

> Segunda ley de los exponentes.
> Si m y n son enteros positivos y x es un número real, entonces $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

Ejemplos.

3. Se aplica la segunda ley de los exponentes.

   a) $(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$
   b) $(a^5)^2 = a^{5 \cdot 2} = a^{10}$
   c) $(6^4)^5 = 6^{4 \cdot 5} = 6^{20}$
   d) $((ab)^4)^2 = (ab)^{4 \cdot 2} = (a \cdot b)^8$
   e) $((a+b)^2)^3 = (a+b)^{2 \cdot 3} = (a+b)^6$

> Tercera ley de los exponentes.
> Si m y n son enteros positivos y x y y son número reales, entonces $(xy)^n = x^n y^n$.

Ejemplos.

4. Se aplica la tercera ley de los exponentes.

   a) $(2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$
   b) $(ab)^2 = a^2b^2$
   c) $(xyz)^3 = x^3y^3z^3$
   d) $(3xy)^2 = 3^2x^2y^2 = 9x^2y^2$

Observaciones.

a) Si una variable no tiene exponente éste será uno (1).
b) Si a y b son número reales positivos entonces:

$$(+a)(+b) = +ab$$
$$(-a)(-b) = +ab$$
$$(+a)(-b) = -ab$$
$$(-a)(+b) = -ab$$

c) Si a es un número real positivo entonces:

$$(-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2$$
$$(-a)^3 = (-a)(-a)(-a) = -a^3$$
$$(-a)^4 = (-a)(-a)(-a)(-a) = +a^4$$

y podemos aseverar que

$$(-)^2 = (-)(-) = +$$
$$(-)^3 = (-)(-)(-) = -$$

Ejemplos.

5. Se aplican las leyes de los exponentes en los siguientes ejercicios:

   a) $(-2xy)^2 = (-2)^2x^2y^2 = +4x^2y^2$
   b) $(-3x^2y^2)^3 = (-3)^3\ (x^2)^3(y^2)^3 = -27x^6y^6$
   c) $(2x^2y)^3 = 2^3(x^2)^3(y)^3 = 8x^6y^3$

Producto de expresiones algebraicas

Para multiplicar dos monomios, multiplicaremos primero los signos, después los coeficientes y por último, las variables utilizando las leyes de los exponentes.

Ejemplos.

6. Se efectúan las siguientes multiplicaciones:

   a) $(3a^2)(-2a) = (3)(-2)(a^2 \cdot a) = -6a^3$
   b) $(4xy)(2xy) = (4)(2)(x \cdot x)(y \cdot y) = 8x^2y^2$
   c) $(-5ab^2)(-3a^2b) = (-5)(-3)(aa^2)(b^2b) = +15a^3b^3$
   d) $(6xyz)(2xyz)(3x^2y^2z^2)$
   $= (6)(2)(3)(x \cdot x \cdot x^2)(y \cdot y \cdot y^2)(z \cdot z \cdot z^2) = 36x^4y^4z^4$

Para multiplicar un monomio por un polinomio, utilizaremos la propiedad distributiva: $a(b + c) = ab + ac$.

Ejemplos.

7. Efectuar las siguientes multiplicaciones:

   a) $(2a)(a + b) = (2a)(a) + (2a)(b) = 2a^2 + 2ab$
   b) $4(3x - 2y) = (4)(3x) - (4)(2y) = 12x - 8y$
   c) $(3 - 3z)(2w) = (3)(2w) - (3z)(2w) = 6w - 6zw$
   d) $(2x)(3x^2 + x - 1) = (2x)(3x^2) + (2x)(x) - (2x)(1) = 6x^3 + 2x^2 - 2x$
   e) $(x^2 - 3y + 5)(4xy) = (x^2)(4xy) - (3y)(4xy) + 5(4xy)$
   $= 4x^3y - 12xy^2 + 20xy$

Para multiplicar dos polinomios, se utilizará la propiedad distributiva dos veces.

Ejemplo.

8. Se efectúa la siguiente multiplicación:

   a) $(a + b)(2a - b) = (a + b)(2a) - (a + b)(b)$
   $= [(a)(2a) + (b)(2a)] - [(ab) + (b)(b)]$
   $= [2a^2 + 2ab] - [ab + b^2]$
   $= 2a^2 + 2ab - ab - b^2$
   $= 2a^2 + ab - b^2$

   Para efectuar esta multiplicación de manera más sencilla, se pueden colocar los polinomios en forma vertical, multiplicar los términos y agrupar los resultados en términos semejantes para simplificarlos.

Es decir:

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{2a-b} \end{array}$$

Primero multiplicamos $2a$ por $(2a+b)$

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{2a-b} \\ 2a^2+2ab \end{array}$$

Luego se multiplica $(-b)$ por $(a+b)$ y se colocará debajo de su término semejante

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{2a-b} \\ 2a^2+2ab \\ \underline{\quad -\ ab-b^2} \end{array}$$

Por último, sumaremos los términos semejantes

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{2a-b} \\ 2a^2+2ab \\ \underline{\quad -\ ab-b^2} \\ 2a^2+\ ab-b^2 \end{array}$$

Así, el resultado de multiplicar $(a+b)(2a-b) = 2a^2+ab-b^2$

Ejemplos.

9. Se multiplican las siguiente expresiones:

a) $(3a^2-5a+3)(2a+1)$

$$\begin{array}{l} 3a^2-5a+3 \\ \underline{2a+1\quad\quad} \\ 6a^3-10a^2+6a \longrightarrow \text{Multiplicamos } 2a \text{ por la expresión de arriba} \\ \underline{\quad\quad +3a^2-5a+3} \longrightarrow \text{Multiplicamos } +1 \text{ por la expresión de arriba} \\ 6a^3-7a^2\quad +a+3 \longrightarrow \text{Sumamos términos semejantes} \end{array}$$

b) $(4x^2-2x+1)(x^2-x+2)$

$4x^2-2x+1$

$$
\begin{array}{l}
x^2 - x + 2 \\
\hline
4x^4 - 2x^3 + x^2 \longrightarrow \text{Se multiplica } x^2 \text{ por la expresión de arriba} \\
\quad -4x^3 + 2x^2 - x \longrightarrow \text{Se multiplica } -x \text{ por la expresión de arriba} \\
\quad\quad + 8x^2 - 4x + 2 \longrightarrow \text{Se multiplica 2 por la expresión de arriba} \\
\hline
4x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 5x + 2
\end{array}
$$

c) $(x^n + y^n)(x + y)$

$$
\begin{array}{l}
x^n + y^n \\
x + y \\
\hline
x^{n+1} + xy^n \longrightarrow \text{Se multiplica } x \text{ por la expresión de arriba} \\
\quad\quad + x^n y + y^{n+1} \longrightarrow \text{Se multiplica } y \text{ por la expresión de arriba} \\
\hline
x^{n+1} + xy^n + x^n y + y^{n+1}
\end{array}
$$

Ejercicios.

I. Completar lo siguiente:

1. $(xy)^n =$
2. $(xn)^m =$
3. $x^n x^m =$

II. Utilizar las leyes de los exponentes para simplificar lo siguiente:

1. $6^5 \cdot 6^3$
2. $7^2 \cdot 7^6$
3. $9^2 \cdot 9^3$
4. $10 \cdot 10^3$
5. $b^2 \cdot b^3$
6. $c^5 \cdot c^6$
7. $d \cdot d^2$
8. $(2 \cdot 3)^2$
9. $(6 \cdot 4)^4$
10. $(xy)^5$
11. $(ab)^6$
12. $(2^3)^5$
13. $(8^3)^2$
14. $5^2 \cdot 5^5 \cdot 5^4$
15. $(9^4)^5$
16. $(6^6)^6$
17. $(y^4)^3$
18. $(x^2)^4$
19. $(d^4)^4$

20. $(x^2y)^4$
21. $(a^3b^2)^5$
22. $(3m)^3$
23. $(xy)^3$
24. $(3 \cdot 4)^4$
25. $(2ab)^4$
26. $(-x)^2$
27. $(-x)^3$
28. $(-x)^2\,(x^2)$
29. $(x^2) - (x^2)$
30. $(-2x)^3$
31. $(-2x)^4$
32. $c^4 \cdot c^2 \cdot c$
33. $3^2 \cdot x^2 \cdot x$
34. $(a^{2y} \cdot a^2)^3$
35. $(2a^x)(a^x)$
36. $(x^a)(x^a)$

III. Realizar las siguientes operaciones:

1. $(3x^4)(2x^3)$
2. $(-4xy)(2x^2y^3)$
3. $(12y^2)(2y^4)$
4. $(5a^2b^3)(-2ab^4)$
5. $(3mn)^2(-6m^3n)$
6. $(10u^2v)(2u^4v)^3$
7. $(-7u^2v)(-2u^3v)$
8. $(-3x^6y^2)(-4x^3y^2)$
9. $(3x^2)^3(8x^8)$
10. $(-9x^ny^3)(-8x^ny^n)$
11. $(-6x^ay^b)(-2x^2y^3)$
12. $(2abc)(3a^2bc)(-4abc^2)$
13. $(a + b)(2a)$
14. $(5x)(2x - 3y)$
15. $(2 - 2x)(2w)$
16. $7(3m - 2n)$
17. $(2x^2 - 3xy)(3x^2y^2)$
18. $(-3x^2y)(xyz - 2y^2z)$
19. $(a + b)(c + d)$
20. $(x^2y^2)(x + y)$
21. $(2 - xy^2)(3 - xy^2)$
22. $(6z - 1)(6z + 1)$
23. $(t - 1)(3t - 1)$
24. $(3m + 2)(m - 1)$

25. $(2y - 1)(y - 3)$
26. $(4xy + 8)(2xy + 1)$
27. $(2x + y)(2x + y)$
28. $(4x^3 + 1)(4x^3 - 1)$
29. $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
30. $(3x^2 - 1)(3x^2 - 1)$
31. $(a + b)(a - b)(a + b)$
32. $(3xy^2)(x^2 - 2y + 4)$
33. $a^2b(2ab - b + a)$
34. $(2a - b)(a^2 + 2ab + b^2)$
35. $(a - 3)(1 - 3a^2 + a)$
36. $(x + 1)(x^2 + 2x + 1)$
37. $(5y - 1)(2y^3 - y^2 + 3y - 4)$
38. $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$
39. $(2a^2 - ab + 3b^2)(a^2 + ab - 4b^2)$
40. $(2x - 1)(x - 3)(x^2 - 1)$
41. $(m + n - 5)(m - n + 3)$
42. $(a^{2n} - a^n - 1)(a^n - 1)$
43. $(x^n - y^n)(x - y)$

Sección 4.4

PRODUCTOS ESPECIALES O NOTABLES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Identificar los productos notables.
2. Desarrollar productos notables.

Existen ciertos productos que se presentan con frecuencia y que han sido clasificados como productos notables o especiales, los cuales se estudiarán en esta sección.

Binomio al cuadrado

Éste es el producto de un binomio por sí mismo, es decir:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b)\\ &\quad a + b\\ &\quad \underline{a + b}\\ &\quad a^2 + ab\\ &\quad\quad + ab + b^2\\ &\quad \overline{a^2 + 2ab + b^2}\end{aligned}$$

Es decir:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Así, obtendremos la siguiente regla:

> Un binomio al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

Observación. Esta regla nos servirá para el binomio $(a + b)^2$ o $(a - b)^2$ ya que $(a - b)^2 = (a + (-b))^2$ y aplicando la regla tenemos:
$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = (a)^2 + 2(a)(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Así, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Observación. Para cualquier binomio, en donde sus elementos son 1er. término y 2° término, podemos decir que:

(1er. término + 2° término)^2 =

(1er. término)^2 + 2(1er. término)(2° término) + (2° término)^2

Ejemplos.

1. Desarrollar el binomio al cuadrado.

   a) $(2x + 5)^2$,
   En este binomio el 1er. término es $(2x)$ y el 2° término es $(+5)$. Por lo que podemos decir que:
   $(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(+5) + (+5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$

   b) $(x - 3y)^2$
   1er. término es x y 2° término es $(-3y)$

   Así $(x - 3y)^2 = (x)^2 + 2(x)(-3y) + (-3y)^2$
   $= x^2 - 6xy + 9y^2$

   c) $\left(\frac{1}{2}x^2y^2 + 2z\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)(2z) + (2z)^2$

   $= \frac{1}{4}x^4y^4 + 2x^2y^2z + 4z^2$

$$d)\ (x^n + y^n)^2 = (x^n)^2 + 2(x^n)(y^n) + (y^n)^2$$
$$= x^{2n} + 2x^n y^n + y^{2n}$$

Observación. Al sustituir el primer término y el segundo término en la fórmula del binomio al cuadrado, se deben colocar con su signo correspondiente.

Binomios conjugados

> Si $(a + b)$ es un binomio, entonces $(a - b)$ será su binomio conjugado.

Ejemplo.

2. En el siguiente ejemplo se expresa el binomio conjugado de cada binomio.

Binomio	*Binomio conjugado*
$a + b$	$a - b$
$3x + 2y$	$3x - 2y$
$5x^2 + 6y^2$	$5x^2 - 6y^2$
$7mn + 2$	$7mn - 2$
$3a^2 - 5ab$	$3a^2 + 5ab$

Si multiplicamos los binomios conjugados $(a + b)(a - b)$ tendremos que:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 \qquad - b^2 \end{array}$$

Por lo que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ y llegamos a la siguiente regla:

> El producto de binomios conjugados es igual al cuadrado del primer término, menos el cuadrado del segundo término.

Observación. El producto de binomios conjugados da como resultado una diferencia de cuadrados.

Ejemplo.

3. Se realizan los siguientes productos notables:

$a)\ (3x + 2y)(3x - 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$
$b)\ (5x^2 - 6y^2)(5x^2 + 6y^2) = (5x^2)^2 - (6y^2)^2 = 25x^4 - 36y^4$

c) $(7mn + 2)(7mn - 2) = (7mn)^2 - (2)^2 = 49m^2n^2 - 4$
d) $(3a^2 - 5ab)(3a^2 + 5ab) = (3a^2)^2 - (5ab)^2 = 9a^4 - 25a^2b^2$

Binomio al cubo

Si $(a + b)$ es un binomio, el cubo de este binomio es $(a + b)^3$ y si lo desarrollamos, tenemos que:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b)\\ &= (a + b)^2\,(a + b)\\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)\end{aligned}$$

Y multiplicando en forma vertical tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3 \end{array}$$

Por lo que podemos decir que:

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Expresado verbalmente podemos decir que:

> Un binomio al cubo es igual al cubo del primer término más tres veces el cuadrado del primer término por el segundo término, más tres veces el primer término por el cuadrado del segundo término, más el cubo del segundo término.

Observación. No debe olvidarse que al colocar el primer término o el segundo, éste va con su signo correspondiente.

Ejemplos.

4. Se realizan los siguientes productos notables:

a) $(1 + 9a)^3 = (1)^3 + 3(1)^2(9a) + (3)(1)(9a)^2 + (9a)^3$
$= 1 + 3(1)(9a) + 3(1)(81a^2) + 729a^3$
$= 1 + 27a + 243a^2 + 729a^3$

b) $(2x - 5)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(-5) + 3(2x)(-5)^2 + (-5)^3$
$= 8x^3 + 3(4x^2)(-5) + 3(2x)(25) + (-125)$
$= 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$

$c)\ (3xy - z)^3 = (3xy)^3 + 3(3xy)^2(-z) + 3(3xy)(-z)^2 + (-z)^3$
$= 27x^3y^3 + 3(9x^2y^2)(-z) + 3(3xy)(z)^2 - z^3$
$= 27x^3y^3 - 27x^2y^2z + 9xyz^2 - z^3$

$d)\ (x^n + y^n)^3 = (x^n)^3 + 3(x^n)^2(y^n) + 3(x^n)(y^n)^2 + (y^n)^3$
$= x^{3n} + 3x^{2n}y^n + 3x^ny^{2n} + y^{3n}$

Producto de binomios por trinomio especial cuyo resultado es una suma de cubos o diferencia de cubos

Realizamos los siguientes productos:

$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ y $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\begin{array}{r} a^2 - ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 - a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b - ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 \qquad\quad + b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^2 + ab + b^2 \\ a - b \\ \hline a^3 + a^2b + ab^2 \\ \quad -a^2b - ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 \qquad\quad -b^3 \end{array}$$

por lo que
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Y observamos que los resultados son una suma de cubos y una diferencia de cubos.

Observaciones. En el producto de binomios por trinomios podemos observar que:

a) El trinomio de cada producto está formado por el cuadrado del primer término, el producto de primer término por el segundo, y el cuadrado del segundo término.
b) En la suma de cubos, el binomio es positivo y en el trinomio el término central es negativo.
c) En la diferencia de cubos, el segundo término es negativo y todos los términos del trinomio son positivos.

Ejemplos.

5. Se realizan los siguientes ejercicios tomando como referencia el ejemplo dado.

a) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ Observaremos que el binomio es positivo, el término central del trinomio es negativo, además, el trinomio está formado por el cuadrado del primer término, el producto del primer y segundo término, y el cuadrado del segundo término.

Así podemos decir que:

$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = (x)^3 + (2)^3 = x^3 + 8$

b) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = (x)^3 - (2)^3 = x^3 - 8$

c) $(5x + 2y)(25x^2 - 10xy + 4y^2) = (5x)^3 + (2y)^3 = 125x^3 + 8y^3$

d) $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)\left(\frac{a^2}{4} + \frac{ab}{6} + \frac{b^2}{9}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{b}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{8} - \frac{b^3}{27}$

Ejercicios.

I. Dar el conjugado de cada binomio.

1. $(3x + y)$
2. $(5x - 2y^2)$
3. $(xy^2 - z)$
4. $(6xyz + w)$
5. $\left(\frac{1}{2}a^2b^2 - c\right)$
6. $\left(\frac{1}{2}xy + z^3\right)$
7. $\left(\frac{r}{10} - \frac{t}{6}\right)$
8. $(15a^3 - 9b^2)$
9. $(10 - 14b)$
10. $(0.1x^2 + 11)$
11. $(0.2x - 0.3)$
12. $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\right)$

II. Completar lo siguiente:

1. $(a - 3b)^2 = (\quad)^2 + 2(\quad)(\quad) + (\quad)^2$
2. $(6x^2 + y)^2 = (\quad)^2 + 2(\quad)(\quad) + (\quad)^2$
3. $(5xy - z)^2 = (\quad)^2 + 2(\quad)(\quad) + (\quad)^2$
4. $(x^a + x^b)^2 = (\quad)^2 + 2(\quad)(\quad) + (\quad)^2$
5. $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}m\right)^2 = (\quad)^2 + 2(\quad)(\quad) + (\quad)^2$
6. $(a - 3b)(\quad) = (a)^2 - (3b)^2 =$
7. $(6x2 - y)(\quad) = (6x^2)^2 - (y)^2 =$
8. $(5xy - z)(\quad) = (5xy)^2 - (z)^2 =$
9. $(x^a + x^b)(\quad) = (x^a)^2 - (x^b)^2 =$
10. $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}m\right)\left(\quad\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}m\right)^2 =$

III. Utilizar la fórmula del cuadrado de un binomio o la fórmula del producto de binomios conjugados para multiplicar las siguientes expresiones:

1. $(2x - 1)^2$
2. $(2x - 1)(2x + 1)$
3. $(3x + y)^2$
4. $(3x - y)(3x + y)$
5. $(5x - 2y^2)^2$
6. $(5x - 2y^2)(5x + 2y^2)$
7. $\left(\frac{1}{2}a^2b^2 - c\right)$
8. $\left(\frac{1}{2}a^2b^2 + c\right)\left(\frac{1}{2}a^2b^2 - c\right)$
9. $\left(\frac{R}{10} - \frac{t}{6}\right)^2$
10. $\left(\frac{R}{10} + \frac{t}{6}\right)\left(\frac{R}{10} - \frac{t}{6}\right)$
11. $(0.1x^2 + 11)^2$
12. $(6xyz + w)^2$
13. $(0.1x^2 + 11)(0.1x^2 - 11)$
14. $(15a^3 - 9a^2)^2$
15. $(6xyz + w)(6xyz - w)$
16. $(10 - 14b)^2$
17. $(15a^3 - 9a^2)(15a^3 + 9a^2)$
18. $(x^n - y^n)^2$
19. $(10 - 14b)(10 + 14b)$
20. $(x^n - y^n)(x^n + y^n)$

IV. Utilizar la fórmula de un binomio al cubo para realizar los siguientes ejercicios:

1. $(2x - 1)^3$
2. $(3x + y)^3$
3. $(5x - 2y^2)^3$
4. $\left(\frac{1}{2}a^2b^2 - c\right)$
5. $\left(\frac{R}{10} - \frac{t}{6}\right)^3$
6. $(0.1x^2 + 11)^3$
7. $(6xyz + w)^3$
8. $(4a^3 - 3b^2)^3$
9. $(5b + 4)^3$
10. $(x^n - y^n)^3$

V. Completar el binomio o trinomio para que el producto del binomio por el trinomio sea una suma o diferencia de cubos y dar el resultado final.

1. $(2a + b)($ $) = (2a)^3 + (b)^3 =$
2. $(3a - 2b)($ $) = (3a)^3 + (2b)^3 =$
3. $($ $)(x^2 - 2x + 4) = (x)^3 + (2)^3 =$
4. $($ $)(m^2 + m + 1) = (m)^3 - (1)^3 =$
5. $(3x - y)($ $) = (3x)^3 - (y)^3 =$
6. $($ $)(4x^2y^2 + 2xyz + z^2) = (2xy)^3 - (z)^3 =$
7. $(4xyz + 5)($ $) = (4xyz)^3 - (5)^3 =$
8. $\left(\frac{1}{5}x^2 - 5y^2\right)($ $) = \left(\frac{1}{5}x^2\right)^3 - (5y^2)^3 =$
9. $($ $)\left(\frac{1}{9}a^4b^2 + a^2b + 9\right) = \left(\frac{1}{3}a^2b\right)^3 - (3)^3 =$
10. $(1 + 6ab^3)($ $) = (1)^3 + (6ab^3)^3 =$

VI. Indicar si el binomio y el trinomio dado cumplen con las condiciones para que al multiplicarlos sea una suma a diferencia de cubos.

1. $(2a - b)(4a^2 - 2ab + b^2)$
2. $(3x + 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$
3. $(a^2 + b^2)(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)$
4. $(4m + 5)(16m^2 - 20m + 25)$
5. $(mn - 6)(m^2n^2 - 6mn - 36)$

VII. Multiplicar las siguientes expresiones, pero primero verificar si el binomio y trinomio cumplen con las condiciones para que al multiplicarlos sea una suma o diferencia de cubos.

1. $(2x + 5)(4x^2 - 10x + 25)$
2. $(3a - 2b^2)(9a^2 + 6ab^2 + 4b^4)$
3. $(7 - 4ab)(49 + 28ab + 16a^2b^2)$
4. $(xy^2 + z)(x^2y^2z + z^2)$
5. $(x^3 - 6y)(x^6 + 6x^3y + 36y^2)$
6. $(8abc + 10)(64a^2b^2c^2 - 80abc + 100)$
7. $\left(\frac{1}{4}x^4y - 4z^5\right)\left(\frac{1}{16}x^8y^2 + x^4yz^5 + 16z^{10}\right)$
8. $\left(\frac{1}{2}a^2b^3 - c^2\right)\left(\frac{1}{4}a^4b^6 + \frac{1}{2}a^2b^3c^2 + c^4\right)$
9. $[(x + y) + 1][(x + y)^2 - (x + y) + 1]$
10. $(x^n + y^n)(x^{2n} - x^ny^n + y^{2n})$
11. $(a^x - b^x)(a^{2x} + a^xb^x + b^{2x})$

VIII. Utilizar el producto notable o especial adecuado para multiplicar las siguientes expresiones.

1. $(7xy + 3z)^3$
2. $(3z - 7xy)(3z + 7xy)$
3. $(3z - 7xy)(3z - 7xy)$
4. $(5xy + 3)(5xy - 3)$
5. $(4a^2 + 3)(16a^4 - 12a^2 + 9)$
6. $(6 - 5x)(36 + 30x + 25x^2)$
7. $(4a^2b - c^3)(4a^2b + c^3)$

Sección 4.5

FACTORIZACIÓN

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

Factorizar polinomios utilizando:

1. Factor en común.
2. Factorización por agrupación.
3. Diferencia de cuadrados, suma de cubos o diferencia de cubos.
4. Factorización de trinomios.

En las secciones anteriores, analizamos diferentes tipos de productos a los que les llamamos especiales o notables. Si estamos suficientemente familiarizados con ellos, podemos desarrollar con facilidad la operación inversa, que es descomponer en factores.

> Al proceso de descomponer una expresión la llamaremos factorización y dicho proceso es similar al de determinar los factores de un número.

Por ejemplo, $30 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ y 1, 2, 3 y 5 son factores del número 30, entonces podemos decir que el factor de un número es uno de dos o más números cuyo producto es el número dado.

> De manera similar, podemos decir que los factores de una expresión algebraica son una de dos o más expresiones algebraicas cuyo producto es la expresión algebraica dada.

Por ejemplo $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$, $(x + 3)$ y $(x - 3)$ son factores de $x^2 - 9$.

Ejemplos.

1. Se factorizan en números primos los siguientes números:

   a) $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$
   b) $14 = 7 \cdot 2$
   c) $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 3^2 \cdot 2$
   d) $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$
   e) $60 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 3 \cdot 2^2$

Máximo factor común

> El máximo factor común de dos o más enteros es el entero más grande que divide uniformemente cada entero; el proceso para encontrarlo es colocar cada número como el producto de factores primos y el máximo factor común será el producto de factores comunes primos.

Por ejemplo, para obtener el máximo factor común de 18 y 30 se procederá primero a factorizar en números primos los números dados:

$18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$

$30 = 3 \cdot 5 \cdot 2$

Así, el máximo factor común de 18 y 30 es $3 \cdot 2 = 6$ y el 18 divide exactamente a 6 y 30 también divide exactamente a 6.

Este mismo proceso para obtener el máximo factor común lo podemos utilizar también en monomios.

Ejemplo.

2. Se obtiene el máximo factor común de $18x^2$, $30x^4$ y $6x^3$.

Factorizaremos cada uno de ellos:

$18x^2 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x \cdot x = (6x^2)(2x)$

$30x^4 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = (6x^2)(5x^2)$

$6x^3 = 3 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x = (6x^2)(x)$

Por lo que $6x^2$ es el máximo factor común de los tres monomios.

Factorización por factor en común

Por la propiedad distributiva tenemos que $a(x + y) = ax + ay$, si a esta igualdad le aplicamos la propiedad simétrica podemos decir que $ax + ay = a(x + y)$ y diremos que a es el factor en común del binomio $ax + ay$.

Ejemplo.

3. Se factoriza el polinomio $18x^2 + 30x^4 - 6x^3$.

El máximo factor común de los tres términos lo obtuvimos en el ejemplo anterior y fue $6x^2$ así podemos decir que
$18x^2 + 30x^4 - 6x^3 = (6x^2)(3) + (6x^2)(5x^2) - (6x^2)x$
$= 6x^2(3 + 5x^2 - x)$
y la respuesta es $18x^2 + 30x^4 - 6x^3 = 6x^2(3 + 5x^2 - x)$

Observación. Si un polinomio en x con coeficientes e ıteros tiene un máximo monomio factor común de la forma ax, entonces el coeficiente a debe ser el entero más grande que divida a cada uno de los coeficientes del polinomio y el factor variable x^n tiene la menor potencia de x de todos los términos del polinomio.

Ejemplo.

4. Se factoriza por factor en común.

   a) $5a^2 - 10a = (5a)(a) - (5a)(2) = (5a)(a - 2)$
   b) $3x^3 - 9x^2 - 6x = (3x)(x^2) - (3x)(3x) - (3x)(2)$
   $= (3x)(x^2 - 3x - 2)$
   c) $m^5 - 6m^4 - 10m^3 = (m^3)(m^2) - (m^3)(6m) + m^3(10)$
   $= m^3(m^2 - 6m + 10)$
   d) $7a^3bc - 14a^3b^4c^2 + 28a^2b^2c^2$
   $= (7a^2bc)(a) - (7a^2bc)(2ab^3c) + (7a^2bc)(4bc)$
   $= (7a^2bc)(a - 2a^2b^3c + 4bc)$

> El factor en común de una expresión algebraica puede ser un binomio.

Ejemplo.

5. Se factorizan las siguientes expresiones:

   a) $2a(x + 1) - b(x + 1)$
   El factor en común es $(x + 1)$,
   así, $2a(x + 1) - b(x + 1) = (x + 1)(2a - b)$

b) $(x + y)(a) + (x + y)(b)$
El factor en común es $(x + y)$ y se puede decir que
$(x + y)(a) + (x + y)(b) = (x + y)(a + b)$

c) $n(x + 1) + x + 1$
Esta expresión se puede escribir como $n(x + 1) + 1\ (x + 1)$
y el factor en común es $(x + 1)$ por lo que
$n(x + 1) + x + 1 = n(x + 1) + 1\ (x + 1) = (x + 1)(n + 1)$
y la respuesta es $n(x + 1) + x + 1 = (x + 1)(n + 1)$

d) n(a + 1) – a – 1

Los dos términos finales se pueden escribir como
$-a - 1 = -1(a + 1)$
Es decir,
$x(a + 1) - 1(a + 1)$ y el factor en común es $(a + 1)$, así:
$x(a + 1) - a - 1 = x(a + 1) - 1(a + 1) = (a + 1)(x - 1)$

Factorización por agrupamiento

Cuando un polinomio tiene cuatro términos o más, se podrá factorizar agrupando los términos con variables semejantes o con coeficientes con factores en común.

Ejemplos.

6. Se factorizan las siguientes expresiones:

a) $2ax + 2a - bx - b$

Agruparemos los dos primeros términos, ya que tienen en común $2a$ y los dos últimos que tienen en común b.

Es decir,
$$2ax + 2a - bx - b = (2ax + 2a) - (bx + b)$$
$$= 2a(x + 1) - b(x + 1)$$

Observe que éste fue el ejemplo 5 inciso *a*, que se realizó por factor en común y se obtuvo que
$2a(x + 1) - b(x + 1) = (x + 1)(2a - b)$
Así
$$2ax + 2a - bx - b = (2ax + 2a) - (bx + b)$$
$$= 2a(x + 1) - b(x + 1)$$
$$= (x + 1)(2a - b)$$

b) $xa + ya + xb + yb = (xa + ya) + (xb + yb)$
$= a(x + y) + b(x + y)$
$= (x + y)(a + b)$

c) $na + n - a - 1 = (na + n) + (-a - 1)$
$= n(a + 1) - 1(a + 1)$
$= (a + 1)(n - 1)$

d) $6x - 5y + 12zx - 10zy$

Agruparemos los términos de la siguiente manera:
$6x - 5y + 12zx - 10zy = (6x + 12zx) + (-5y - 10zy)$
$= 6x(1 + 2z) - 5y(1 + 2z)$
$= (1 + 2z)(6x - 5y)$

e) $6x^3 - x^2 - 6x + 1 = (6x^3 - x^2) + (-6x + 1)$
$= x^2(6x - 1) - (6x - 1)$
$= (6x - 1)(x^2 - 1)$
$= (6x - 1)(x - 1)(x + 1)$

Factorización de trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio es cuadrado perfecto si es el cuadrado de un binomio.

Ejemplo.

7. Cada uno de los siguientes trinomios son cuadrados perfectos, ya que son el cuadrado de un binomio.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$x^2 + 10x + 25 = (x - 5)^2$
$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$
$4x^2 - 16x + 4 = (2x - 4)^2$

Procedimiento para factorizar un trinomio cuadrado perfecto

Consideremos el trinomio $a^2 + 2ab + b^2$ y describamos el proceso para factorizar un trinomio cuadrado perfecto.

1. Se colocan enfrente del trinomio especios con paréntesis para colocar los factores que serán dos binomios multiplicados.
Es decir:

$a^2 + 2ab + b^2 = (\quad)(\quad)$

2. Se factoriza el primer término del trinomio $a^2 = aa$ y cada factor se coloca como primer factor en cada binomio:

   $a^2 + 2ab + b^2 = (a \quad)(a \quad)$

3. Se factoriza el último término del trinomio b^2 y cada factor se coloca como segundo término en cada binomio. El signo en ambos binomios será el que tenga el segundo término de trinomio.

   $$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$$

   En este caso, el signo del término de en medio del trinomio es positivo y en cada factor se colocará signo positivo.

   Por lo que la factorización de $a^2 + 2ab + b^2$ es:

   $$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)^2$$

Al colocar los dos binomios podemos verificar si la factorización es correcta: si el producto de los primeros términos es el primer término del trinomio, si el producto de los segundo términos de los binomios es el tercer término de trinomio, y si la suma de los productos de los extremos y medios de los dos binomios es el término central del trinomio.

Ejemplos.

8. Se factorizan las siguientes expresiones:

   a) $x^2 + 2x + 1$

   Se colocan primero los paréntesis para colocar los dos binomios y los primeros términos serán los factores de $x^2 = x \cdot x$, y los segundos términos serán los factores de $1 = 1 \cdot 1$
   $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) = (x + 1)^2$

   b) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$
   c) $a^2 - 6a + 9 = (a - 3)(a - 3) = (a - 3)^2$
   d) $25b^2 + 40b + 16 = (5b + 4)(5b + 4) = (5b + 4)^2$
   e) $x^2y^2 - 2xy + 1 = (xy - 1)(xy - 1) = (xy - 1)^2$
   f) $9x^2 - 6xy + y^2 = (3x - y)(3x - y) = (3x - y)^2$

Observaciones.

a) Si el último término del trinomio tiene signo positivo entonces ambos factores deben ser positivos o ambos factores deben ser negativos, y si

el último término es negativo entonces ambos factores tendrán signo diferente.

b) Para cada uno de los ejercicios se puede comprobar que el producto de extremos y medios de los dos binomios dará el término central del trinomio a factorizar.

Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

Para factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$:

1. Se determinan dos números que multiplicados sean c y cuya suma sea b.
2. Los factores del trinomio serán de la forma $(x + C_1)(x + C_2)$, donde $C_1C_2 = C$ y $C_1 + C_2 = b$.

Observación. En este trinomio el coeficiente de x^2 es 1.

Ejemplos.

9. Se factorizan las siguientes expresiones:

a) $x^2 + 7x + 10$

Se deberá determinar dos números que multiplicados sean (+10) y sumados (+7).

Factores de (10)	Sumados
(+10)(+1) = +10	(10) + (+1) = +11
(−10)(−1) = +10	(−10) + (−1) = −11
(+5)(+2) = +10	(+5) + (+2) = +7
(−5)(−2) = +10	(−5) + (−2) = −7

Los números que se buscan son (+5) y (+2) ya que (+5)(+2) = +10 y (+5) + (+2) = +7.

Al factorizar lo que se indicó, se tendrá:

$x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$

Demostración.

La suma de productos de extremos y medios es $5x + 2x = 7x$, que es el término central, además, $x \cdot x = x^2$, que es el primer término del trinomio y (+5)(+2) = 10, que es el último término del trinomio dado.

Observación. En este último ejemplo se enumeraron todos los factores de +10 para ilustrar el proceso, pero después de determinar los dos factores cuyo producto es c y su suma b, no hay necesidad de seguir enumerándolos.

b) $x^2 - 8x - 20$

Necesitamos dos factores que multiplicados den (–20) y sumados (–8).

$(+4)(-5) = -20$	$(+4) + (-5) = -1$
$(-4)(+5) = -20$	$(-4) + (+5) = +1$
$(+10)(-2) = -20$	$(+10) + (-2) = +8$
$(-10)(+2) = -20$	$(-10) + (+2) = -8$

Los factores son (–10) y (+2) y factorizando $x^2 - 8x - 20$ tenemos que $x^2 - 8x - 20 = (x - 10)(x + 2)$.

Demostración.

$x \cdot x = x^2$ y $(-10)(+2) = -20$, además, la suma de $(-10x) + (+2x) = -8x$, que es el término central del trinomio.

c) $x^2 + 2x - 24$

Necesitamos dos números que multiplicados sean (–24) y sumados (+2)

$(+8)(-3) = -24$	$(+8) + (-3) = +5$
$(+6)(-4) = -24$	$(+6) + (-4) = +2$

Por lo que los factores son (+6)(–4) y al factorizar $x^2 + 2x - 24$ tenemos que $x^2 + 2x - 24 = (x + 6)(x - 4)$.

Demostración.

$x \cdot x = x^2$ y $(+6)(-4) = -24$ y la suma de $(-6x) + (-4x) = +2x$, que es el término central.

Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$:

1. Escribir todos los factores del coeficiente de a del término cuadrático.
2. Escribir todos los factores de la constante c.
3. Intente diversas combinaciones de estos factores hasta encontrar el término correcto, bx.

Ejemplos.

10. Se factorizan las siguientes expresiones:

a) $6x^2 + 7x - 3$

Procederemos de la siguiente manera:

$6x^2 + 7x - 3 = (3x \quad)(2x \quad)$ El producto de los dos primeros términos es $6x^2$

Ahora llenaremos los huecos de los segundos términos con factores que multiplicados den -3 y las dos posibilidades son

$6x^2 + 7x - 3 = (3x + 3)(2x - 1)$ El producto de los últimos términos

$6x^2 + 7x - 3 = (3x - 1)(2x + 3)$ es -3

Para determinar cuál factorización es correcta, utilizaremos la segunda parte de la demostración que se explicó en los ejemplos anteriores $6x^2 + 7x - 3 = (3x + 3)(2x - 1)$, sumaremos los productos de los extremos y medios de los binomios propuestos $(6x) + (-3x) = 3x$, que no es el término central del trinomio, por lo que no son los factores correctos.

Con la segunda posibilidad tenemos que $6x^2 + 7x - 3 = (3x - 1)(2x + 3)$, sumaremos los productos de los extremos y medios de los binomios propuestos $(-2x) + (9x) = 7x$, que es el término central del trinomio.

Por lo que la factorización de $6x^2 + 7x - 3$ es

$$6x^2 + 7x - 3 = (3x - 1)(2x + 3)$$

b) $10a^2 + 3a - 4 = (5a \quad)(2a \quad)$

$= (5a - 2) \quad (2a + 2)$

Comprobaremos si son los correctos

$(5a)(2a) = 10a^2$, $(-2)(2) = 4$, $(-4a) + (10a) = +6a$, que no es el término central.

Otra posibilidad es

$10a^2 + 3a - 4 = (5a \quad)(2a \quad)$

$= (5a - 4) \quad (2a + 1)$

Demostración.

$5a \cdot 2a = 10a^2$, $(-4)(1) = -4$, $(-8a) + (+5a) = -3a$, que no es el término central, ya que éste es negativo.

Otra posibilidad es

$10a^2 + 3a - 4 = (5a \quad)(2a \quad)$

$= (5a - 4) \quad (2a + 1)$

Demostración.

$5a \cdot 2a = 10a^2$, $(+4)(-1) = -4$, $(+8a)(-5a) = +3a$, que sí es el términos central del trinomio.

Por lo que la factorización de $10a^2 + 3a - 4$ es $10a^2 + 3a - 4 = (5a + 4)(2a - 1)$.

Observación. Se sugiere que la comprobación del 1er. término y del 3er. término se haga mentalmente y sólo se compruebe el término central.

c) $3x^2 - 14xy + 8y^2$

$3x^2 - 14xy + 8y^2 = (3x \quad)(x \quad)$

$= (3x - 4y)(x + 2y)$

Demostración.

$(-4xy) + (-6xy) = -10xy$, que no es el término central.

Otra posibilidad es

$3x^2 - 14xy + 8y^2 = (3x \quad)(x \quad)$

$= (3x - 2y)(x - 4y)$

Demostración.

$(-2xy) + (-12xy) = -14xy$ que es el término central.

Por lo que la factorización de $3x^2 - 14xy + 8y^2$ es

$3x^2 - 14xy + 8y^2 = (3x - 2y)(x - 4y)$

d) $10a^2 + 17ab + 3b^2$

$10a^2 + 17ab + 3b^2 = (5a \quad)(2a \quad)$

$= (5a + b)(2a + 3b)$

Demostración.

$(2ab) + (15ab) = 17ab$, que es el término central,

por lo que $10a^2 + 17ab + 3b^2 = (5a + b)(2a + 3b)$

Factorización de la diferencia de cuadrados

> Una diferencia de cuadrados es el resultado de multiplicar dos binomios conjugados.

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ y si utilizamos la propiedad de la simetría de la igualdad podemos afirmar que

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Por lo que podemos afirmar que el proceso para factorizar una diferencia de cuadrados será muy similar al de factorización de trinomios, ya que el resultado será dos binomios (conjugados).

Ejemplos.

11. Se factorizan las siguientes expresiones:

a) $x^2 - 1$

$x^2 - 1 = (x \quad)(x \quad)$

$= (x + 1)(x - 1)$

Demostración.

$(+x) + (-x) = 0x = 0$, es decir, no se tiene término central.

Observación. Si multiplicamos los términos centrales y los extremos, y se suman, el resultado debe ser cero ya que no tenemos término central.

b) $9x^2 - 16 =$

$9x^2 - 16 = (3x \quad)(3x \quad)$

$9x^2 - 16 = (3x + 4)(3x - 4)$

c) $x^2 - y^2 =$

$x^2 - y^2 = (x \quad)(x \quad)$

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

d) $\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{100} =$

$\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{2}b - \text{—}\right)\left(\frac{1}{2}b - \text{—}\right)$

$\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{10}\right)$

e) $a^4 - 81b^4 =$

$a^4 - 81b^4 = (a^2 \quad)(a^2 \quad)$

$= (a^2 - 9b^2)(a^2 + 9b^2)$

Observemos que el primer binomio sigue siendo una diferencia de cuadrados y que esta expresión se puede seguir factorizando:

$$a^4 - 81b^4 = (a^2 - 9b^2)(a^2 + 9b^2)$$
$$a^4 - 81b^4 = (a - 3b)(a + 3b)(a^2 + 9b^2)$$

Observación. Una suma de cuadrados de la forma $a^2 + b^2$ no se puede factorizar.

Factorización de una suma o diferencia de cubos

Cuando analizamos los productos notables teníamos las siguientes igualdades del producto de un binomio y un trinomio especial, cuyo resultado era una suma de cubos o diferencia de cubos:

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Si utilizamos la propiedad simétrica de la igualdad tenemos que

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

> Las igualdades
> $$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
> y $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
> se utilizarán para factorizar una suma o diferencia de cubos.

Observación. Para verificar que es una suma de cubos o diferencia de cubos, se obtendrá la raíz cúbica de los dos términos del binomio.

Ejemplos.

12. Se obtiene la raíz cúbica de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt[3]{a^3} = a$, ya que $(a)^3 = a^3$
b) $\sqrt[3]{8x^3} = 2x$, ya que $(2x)^3 = 8x^3$
c) $\sqrt[3]{27y^6} = 3x^2$, ya que $(3x^2)^3 = 27x^6$
d) $\sqrt[3]{64x^3y^9} = 4xy^3$, ya que $(4xy^3)^3 = 64x^3y^9$
e) $\sqrt[3]{125x^{12}y^{15}z^{18}} = 5x^4y^5z^6$, ya que $(5x^4y^5z^6)^3 = 125x^{12}y^{15}z^{18}$

Ejemplos.

13. Se factorizan las siguientes expresiones:

a) $x^3 - 27$
Puesto que es una diferencia de cubos, su factorización será el producto de un binomio y un trinomio.
$x^3 - 27 = (\quad)(\quad)$
En el binomio se colocará la raíz cúbica de cada término
$x^3 - 27 = (x - 3)(\quad)$
Y en el trinomio tendremos el cuadrado del primer término del binomio, el producto de los términos y el cuadrado del segundo término del binomio.

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

b) $8y^3 + 1 = (\quad)(\quad)$
La raíz cúbica de $8y^3$ la raíz cúbica de 1 en 1. Por lo que
$8y^3 + 1 = (2y + 1)(\quad)$
$= (2y + 1)(4y^2 - 2y + 1)$

c) $64x^3y^9 - 125$
$64x^3y^9 - 125 = (4xy^3 - 5)(64x^2y^6 + 20xy^3 + 25)$

d) $216 + 27x^{12}$
$216 + 27x^{12} = (6 + 3x^4)(36 - 18x^4 + 9x^8)$

Observaciones.

1. La factorización de una suma de cubos es el producto de un binomio por un trinomio, el binomio tendrá signo positivo y el término central del trinomio será negativo.
2. La factorización de una diferencia de cubos es el producto de un binomio por un trinomio, el segundo término del binomio tendrá signo negativo y todos los términos del trinomio serán positivos.

Ejercicios.

I. Se factorizan las siguientes expresiones por factor común o por agrupación, si una expresión no se puede factorizar, indícalo.

1. $5a - 10$
2. $9b - 9$
3. $8x + 9$
4. $15abc - 9a^2c$
5. $4x^3y^2 + 7x^4y$
6. $a^2x^2 + a^2$
7. $9ab^2 - a$
8. $10x^5y^{10}z^{11} - 11x^6y^{11}z^{12}$
9. $45ab^5 - 60b^6$
10. $2abc - 3xyz$
11. $8b^2m^2 + 26b^2mn + 6b^2n^2$
12. $6y^4 - 12y^2 + 10y$
13. $-24x^{15} + 8x^5 - 4x$
14. $3a - 4b + 4ab$
15. $8a^2b^2 - 16ab^4 + 64ab^3$
16. $64x^2y^3z + 64x^4y^4z^2 + 16x^3yz^4$
17. $a(2a - 1) + b(2a - 1)$
18. $2x(2x + y) - y(2x + y)$
19. $5y(3x - 2) - 2x(3x - 2)$
20. $6m(2m + 1) + (2m + 1)$
21. $5x(8x + 2) + 8x + 2$
22. $3x(4 - 3y) + 9xy(4 - 3y)$
23. $9a^2(x^2 + 2y) - 12ab(x^2 + 2y)$
24. $6a^3(4a^3 - b) + 9a^2b(4a^2 - b)$
25. $x^2 + 4x - 2x - 8$
26. $a + b + 3ac + 3bc$

27. $ax - 2ay - 6by + 3bx$
28. $2xy - 7y + 4x - 14$
29. $6t^3 - t^2 - 6t + 1$
30. $m^2 - 4n^2 + m + 2n$
31. $x^3 - 3x^2 + x - 3$
32. $x^4 + 2x^3 - x - 2$

II. Factorizar cada trinomio.

1. $a^2 - 2ab^2 + b^4$
2. $x^2 + 6x + 9$
3. $4x^2 + 12x + 9$
4. $x^2 - 2x + 1$
5. $9b^2 + 12b + 4$
6. $16x^2y^2 + 40xy + 25$
7. $36m^2n^2 - 84mn + 49$
8. $64x^4 - 16x^2y^3 + y^6$
9. $4x^8 + 20x^4y + 25y^2$
10. $\frac{1}{4}c^4 - \frac{1}{2}c^2d + \frac{1}{25}d^2$
11. $2x^2 + 5x - 3$
12. $2x^2 + 7x + 3$
13. $x^2 + 8x + 15$
14. $x^2 - 16x + 15$
15. $x^2 + 5x + 6$
16. $x^2 + 7x + 6$
17. $2a^2 - 12a + 18$
18. $y^2 + 3y + 2$
19. $2m^2 + 3m - 35$
20. $40R^2 - 47R + 12$
21. $144a^2 - 130a + 25$
22. $144a^2 - 125a + 25$
23. $x^2 - 24xy + 119y^2$
24. $9x^2y^2 + 66xy + 121$
25. $6y^2 - 11y - 35$
26. $16x^2 - 12x - 18$
27. $10m^2 - 13mn - 3n^2$
28. $(a - b)^2 + 8(a - b) + 16$
29. $4(x + y)^2 + 12(x + y) + 9$
30. $x^{2n} + 2x^ny^n + y^{2n}$

III. Factorizar cada una de las siguientes expresiones:

1. $a^2 - b^4$
2. $100 - 196b^2$

3. $x^2y^2 - 49z^2$
4. $\frac{R^2}{100} - \frac{t^2}{36}$
5. $49a^6 - 81b^4$
6. $0.01x^{10} - 121$
7. $(a - 2b) - c^2$
8. $\frac{1}{64} - \frac{c^8}{100}$
9. $4a^8 - 25b^{12}$
10. $16a^{12}b^{16} - 36c^2$
11. $a^3b^3 - 8c^3$
12. $m^6 + n^6$
13. $64m^9 - n^3$
14. $\frac{125}{a^{12}} + 1$
15. $x^3y^6 + 27a^6b^3$
16. $a^3 - \frac{b^3}{1000}$
17. $729 - (a + b)^3$
18. $343x^{3n} + y^{3n}$

Sección 4.6

DIVISIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Dividir expresiones algebraicas.
2. Utilizar la división sintética cuando el divisor sea de la forma adecuada.

Si a, b y c son números reales donde $b \neq 0$, la expresión a/b o $\frac{a}{b}$ se llama el cociente de a por b.

Sabemos que $\frac{a}{b} = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$ y se dice que $\frac{1}{b}$ es el inverso multiplicativo de b.

Si a, b y c son números reales donde $b \neq 0$,

$$\frac{a}{b} = c \text{ si y sólo si } a = b \cdot c$$

Cuarta ley de los exponentes.
Si m y n son enteros positivos y x es un número real, entonces

$$\frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} x^{n\ m} & \text{Si } n > m \\ 1 & \text{Si } n = m \\ \dfrac{1}{x^{m-n}} & \text{Si } n < m \end{cases}$$

Ejemplos.

1. *a)* $\dfrac{b^4}{b^2} = b^{4-2} = b^2$

   b) $\dfrac{b^4}{b^2} = 1$

   c) $\dfrac{b^3}{b^5} = \dfrac{1}{b^2}$

Ley de la cancelación.

Si a, b y x son reales donde $x \neq 0$ $b \neq 0$

$$\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

Recordemos la división de números reales con sus respectivos signos, donde a, b y c son enteros positivos:

$$\frac{+a}{+b} = +c \qquad \frac{+a}{-b} = -c \qquad \frac{-a}{+b} = -c \qquad \frac{-a}{-b} = +c$$

División de monomio entre monomio

La división de dos monomios es otro monomio, cuyo coeficiente es el resultado de dividir los coeficientes con sus signos respectivos, y su parte actual se forma al aplicar la cuarta ley de los exponentes.

Ejemplos.

2. Dividir los monomios.

   a) $\dfrac{4a^3}{-2a^2} = -2a$

Demostración.

$$4a^3 = (-2a)(-2a^2) = +4a^3$$

b) $\dfrac{-8x^4y^2z}{-4x^3y} = +2xyz$

Demostración.

$$-8x^4y^2z = (+2xyz)(-4x^3y) = -8x^4y^2z$$

c) $\dfrac{-9b^3c^2}{+9b^2c^2} = -1b$

d) $\dfrac{4x^3y^4}{8x^4y^6} = \dfrac{1}{2xy^2}$

División de polinomio entre monomio

Para esta operación aplicamos la propiedad distributiva de la división y las reglas de la división de monomio entre monomio

Ejemplos.

3. *a)* $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$

b) $\dfrac{x+y+z}{w} = \dfrac{x}{w} + \dfrac{y}{w} + \dfrac{z}{w}$

c) $\dfrac{4a^3 + 8a^2 - 2a}{2} = \dfrac{4a^3}{2} + \dfrac{8a^2}{2} - \dfrac{2a}{2} = 2a^3 + 4a^2 - a$

d) $\dfrac{6x^3y^2 - 9x^2y^3 + 12x^2y^2}{3x^2y^2} = \dfrac{6x^3y^2}{3x^2y^2} - \dfrac{9x^2y^3}{3x^2y^2} - \dfrac{12x^2y^2}{3x^2y^2} = 2x - 3y + 4$

e) $\dfrac{3m^3n^2 - 4mn}{mn^4} = \dfrac{3m^3n^2}{mn^4} - \dfrac{4mn}{mn^4} = \dfrac{3m^2}{n^2} - \dfrac{4}{n^3}$

División de polinomio entre polinomio

El procedimiento para dividir un polinomio entre otro es el siguiente:

1. El dividendo y el divisor del polinomio se ordenan en forma decreciente respecto a una misma variable.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y el resultado es el primer término del cociente. Se multiplica el divisor por este término y se resta el producto obtenido del divisor.

3. El residuo obtenido en el paso anterior se toma como un nuevo dividendo y se repite el paso dos para obtener el segundo término del cociente.
4. Se repite este proceso hasta que se obtenga u residuo nulo o una expresión de grado inferior al divisor.

Ejemplos.

4. Dividir.

a) $(2x^2 + x - 6)$ entre $(x + 2)$

$$x + 2\overline{)\,2x^2 + x - 6}$$

Se divide $\frac{2x^2}{x} = 2x$ y este será el primer término del cociente

$$\begin{array}{r} 2x \\ x + 2\overline{)\,2x^2 + x - 6} \end{array}$$

Este resultado $2x$, se multiplicará por el divisor y colocará abajo del dividendo con su término semejante.

$$\begin{array}{r} 2x \\ x + 2\overline{)\,2x^2 + x - 6} \\ 2x^2 + 4x \end{array}$$

El siguiente paso es restar el resultado del producto de $2x(x + 2)$ del dividendo, y como se va a efectuar una resta de polinomios cambiaremos los signos del polinomio que se va a restar.

$$\begin{array}{r} 2x \\ x + 2\overline{)\,2x^2 + x - 6} \\ \underline{-2x^2 - 4x} \\ -3x - 6 \end{array}$$

Enseguida repetiremos el proceso dividiendo primero $-3x$ entre x que es -3

$$\begin{array}{r} 2x - 3 \\ x + 2\overline{)\,2x^2 + x - 6} \\ \underline{-2x^2 - 4x} \\ -3x - 6 \end{array}$$

Y multiplicamos (–3) por el divisor $(x + 2)$ para colocarlos debajo de $(-3x - 6)$ y lo restaremos, por lo que le cambiaremos de signo a cada término de este producto.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x - 3 \\
\hline
x + 2 & 2x^2 + x - 6 \\
 & -2x^2 - 4x \\
\hline
 & -3x - 6 \\
 & +3x + 6 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

El resultado de dividir $\dfrac{2x^2 + x - 6}{x + 2}$ es $2x - 3$ con residuo 0.

Observación. Para efectuar una división de dos polinomios siga los siguientes pasos:

1. Escriba el dividendo y divisor en potencias descendentes de la variable.
2. Si al acomodar en forma descendente falta un término, se insertará el término con coeficiente cero.
3. Realice la división como se explica en el ejemplo anterior.
4. Continúe el proceso hasta que el grado del residuo sea menor que el divisor.

Ejemplos.

5. Dividir.

   a) $(5x^4 - 10x - 1)$ entre $(x - 2)$

El dividendo es un polinomio de grado cuatro y no tiene término en x^3 ni en x^2, por lo que añadiremos dichos términos con coeficientes cero.

Dividir $(5x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 10x - 1)$ entre $(x - 2)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^3 + 10x^2 - 20x + 30 \\
\hline
x - 2 & 5x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 10x - 1 \\
 & -5x^4 + 10x^3 \\
\hline
 & +10x^3 + 0x^2 - 10x - 1 \\
 & -10x^3 - 20x^2 \\
\hline
 & -20x^2 - 10x - 1 \\
 & +20x^2 + 40x \\
\hline
 & +30x - 1 \\
 & -30x + 60 \\
\hline
 & +59
\end{array}
$$

El resultado de dividir $5x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 10x - 1$ entre $x - 2$ es $5x^3 + 10x^2 - 20x + 20$ con residuo 59.

Observación. Si $P(x)$ y $D(x)$ son dos polinomios cualesquiera y los dividimos obtenemos

$$\begin{array}{r} Q(x) \\ D(x)\overline{)\,P(x)} \\ R(x) \end{array}$$

donde $P(x)$ es el dividendo, $D(x)$ el divisor, $Q(x)$ el cociente o resultado y $R(x)$ es el residuo y así: $P(x) = D(x)\,Q(x) + R(x)$ y esto nos lleva al algoritmo de la división.

> Algoritmo de la división.
>
> $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios de grado n y r respectivamente, tal que $n \geq r$, entonces existe un polinomio $Q(x)$ llamado cociente y un polinomio $R(x)$ llamado residuo, tales que:
>
> - $P(x) = D(x)\,Q(x) + R(x)$, para toda x
> - El grado del residuo $R(x)$ es menor que el de $D(x)$

b) $6x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 10x + 1$ entre $2x^2 - x + 4$

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 5x + \frac{5}{2} \\ \hline 2x^2 - x + 4 & 6x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 10x + 1 \\ & -6x^4 + 3x^3 - 12x^2 \\ \hline & 10x^3 + 0x^2 + 10x + 1 \\ & -10x^3 + 5x^2 - 20x \\ \hline & 5x^2 - 10x + 1 \\ & -5x^2 + \frac{5}{2}x - 10 \\ \hline & -\frac{15}{2}x - 9 \end{array}$$

El resultado es $3x^2 + 5x + \frac{5}{2}$ con residuo $-\frac{15}{2}x - 9$

c) $x^4 - x^3y - x^2y^2 + 7xy^3 - 6y^4$ entre $x^2 + xy - 2y^2$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 2xy - 3y^2 \\ \hline x^2 + xy - 2y^2 & x^4 - x^3y - x^2y^2 + 7xy^3 - 6y^4 \\ & -x^4 - x^3y + 2x^2y^2 \\ \hline & -2x^3y + x^2y^2 + 7xy^3 - 6y^4 \\ & +2x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3 \\ \hline & +3x^2y^2 + 3xy^3 - 6y^4 \\ & -3x^2y^2 - 3xy^3 + 6y^4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

El resultado de la división es $x^2 - 2xy + 3y^2$ con residuo 0

División sintética

Cuando se divide un polinomio entre un binomio de la forma $x - a$ o $x + a$, es decir, $x - a\overline{)P(x)}$ o $x + a\overline{)P(x)}$.

> La división puede abreviarse mediante un proceso llamado división sintética.

Considere el siguiente ejemplo:

$$
\begin{array}{r}
2x^2 + 1x - 3 \\
x - 2\overline{)\,2x^3 - 3x^2 - 5x + 1} \\
\underline{+2x^3 - 4x^2} \\
+1x^2 - 5x + 1 \\
\underline{+1x^2 - 2x} \\
-3x + 1 \\
\underline{-3x + 6} \\
-5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
2\ \ 1\ -3 \\
1 - 2\overline{)\,2 - 3 - 5\ 1} \\
\underline{\ \ 2 - 4} \\
1\ -5\ \ 1 \\
\underline{1\ -2} \\
-3\ \ 1 \\
\underline{-3\ \ 6} \\
-5
\end{array}
$$

Aquí solamente se colocaron los coeficientes.

> Observamos en la parte en la que sólo hay coeficientes, que se repiten y los eliminaremos.

$$
\begin{array}{r}
2\ \ 1\ -3 \\
1 - 2\overline{)\,2 - 3 - 5\ 1} \\
\underline{\ \ -4} \\
1\ -5\ \ 1 \\
\underline{\ \ -2} \\
-3\ \ 1 \\
\underline{\ \ \ \ 6} \\
-5
\end{array}
$$

Se puede comprimir el proceso completo en tres líneas, subiendo para ellos los números esenciales a posiciones directamente bajo los coeficientes del dividendo.

$$
\begin{array}{r}
1 - 2\overline{)\,2 - 3 - 5\ 1} \\
\underline{-4 - 2\ \ 6} \\
+1\ -3\ -5
\end{array}
$$

En el divisor como el coeficiente de x es 1 lo podemos también omitir

$$\begin{array}{r|l} -2 & 2\ -3\ -5\ 1 \\ & \underline{-4\ -2\ \ 6} \\ & +1\ -3\ -5 \end{array}$$

En seguida se colocará el primer coeficiente del dividendo 2 a la tercera línea

$$\begin{array}{r|l} -2 & 2\ -3\ -5\ 1 \\ & \underline{-4\ -2\ \ 6} \\ & 2\ +1\ -3\ -5 \end{array}$$

Para evitar la resta, se cambiará el signo del divisor –2 a +2 y también a la segunda línea.

$$\begin{array}{r|l} +2 & 2\ -3\ -5\ 1 \\ & \underline{-4\ -2\ \ 6} \\ & 2\ \ 1\ -3\ -5 \end{array}$$

Estos datos también se acostumbra colocarlos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll|l} 2 & -3 & -5 & 1 & +2 \\ & 4 & 2 & -6 & \\ \hline 2 & 1 & -3 & -5 & \end{array}$$

Observemos que la división se reduce a una simple multiplicación y suma, donde los tres primeros números son los coeficientes del polinomio cociente, cuyo grado es un grado menor que el dividendo. El último número, –5, es el residuo.

Es decir, el resultado es $2x^2 + x - 3$ con residuo –5

En resumen, podemos explicar la división sintética de la siguiente manera:

Dividir $2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$ entre $x - 2$

Colocamos los coeficientes del dividendo 2 –3 –5 1 y en el divisor se colocará +2

$$\begin{array}{llll|l} 2 & -3 & -5 & 1 & +2 \\ \downarrow & (2)(2) = 4 & (+1)(+2) = 2 & (-3)(+2) = -6 & \\ \hline 2 & (-3)+4 = +1 & (-5)+(2) = -3 & (1)+(-6) = -5 & \end{array}$$

Observación. Si $x - a\overline{)P(x)}$ en la división sintética se colocara en el divisor $+a$ o si $x + a\overline{)P(x)}$ en la división sintética se colocara en el divisor $-a$.

Ejemplos.

6. Se divide por división sintética.

a) $3x^2 - 2x - 4$ entre $x - 3$

Colocaremos los coeficientes

3	-2	-4		$\lfloor +3$
↓	$(3)(2) = 9$	$(+7)(+3) = 21$		
3	$(-2)+9 = 7$	$(-4)+(21) = 17$		

Como el dividendo es de grado dos el resultado será de grado uno, es decir, el resultado es:

$3x + 7$ con residuo 17

b) $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$ entre $x + 1$

2	3	-4	5	6	$\lfloor -1$
↓	$(2)(-1) = -2$	$(+1)(-1) = -1$	$(-5)(-1) = 5$	-10	
2	$(-2)+3 = 1$	$(-4)+(-11) = -5$	$(5)+(5) = 10$	-4	

Como el dividendo es de grado cuatro, el resultado será de grado tres, así, el resultado es:

$2x^3 + x^2 - 5x + 10$ con residuo -4

Observación. Al realizar la división se debe verificar que el dividendo esté escrito en forma descendente respecto a la variable y si falta un término se colocará dicho término con coeficiente cero.

c) $3x^4 + x^2 - 4$ entre $x - 1$

Observamos que el dividendo no tiene el término en x^3 ni el término en x. Colocaremos dichos términos con coeficiente 0, es decir:

$x - 1\overline{)3x^4 + 0x^3 + x^2 + 0x - 4}$

Y por división sintética tendremos

3	0	1	0	−4	+1
↓	3	3	4	4	
3	3	4	4	0	

Y el resultado es el polinomio de grado tres: $3x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ con residuo 0.

Ejercicios.

I. Efectuar la división indicada para cada ejercicio.

1. $\frac{3a^2}{a}$
2. $\frac{9xy}{-3y}$
3. $\frac{-a^2b}{-ab}$
4. $\frac{-12x^3y^4}{+2xy^2}$
5. $\frac{2xy}{4x^2}$
6. $\frac{-3x^5y^7}{-6x^7y^5}$
7. $\frac{6x^2y^2z}{3xyz}$
8. $\frac{5a^2c^2}{3ab^3c^5}$
9. $\frac{18a^2b^3c^4}{3ab^2c^2}$
10. $\frac{8x^4y^3z^2}{4x^2y^2z}$
11. $\frac{7x + 14}{7}$
12. $\frac{4x + 8}{2}$
13. $\frac{8x^2 - 12x}{2x}$

14. $\dfrac{5x^3 + 6x^2 + 3x}{3x}$

15. $\dfrac{6x^4 - 3x^3 + 9x^2}{4x^2}$

16. $\dfrac{10b^3 + 15b^2}{5b^3}$

17. $\dfrac{x^2 - xy}{x}$

18. $\dfrac{8ab - 12abc}{4ab}$

19. $\dfrac{3x^2y^3 - 6x^2y^4}{-3x^2}$

20. $\dfrac{12mn^2 - 18m^3}{3m}$

21. $\dfrac{14a^2bc - 8b^2a^2c}{2bc^2}$

22. $\dfrac{3x^2 - 4xy^2 + 7x^3y^3}{xy}$

23. $\dfrac{x^6 - 2x^4y^2 - 3x^2y^4}{-3x^3y^3}$

24. $\dfrac{3x^3 - 6x^2y + 9xy^2}{3x}$

25. $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

26. $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$

27. $\dfrac{4x^3 + 12x^2 + 7x - 3}{2x + 3}$

28. $\dfrac{6x^2 + x - 2}{3x + 2}$

29. $\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{2x + 3}$

30. $\dfrac{6x^3 - 7x^2 - x + 2}{3x - 2}$

31. $\dfrac{2x^2 + xy - 10y^2}{x - 2y}$

32. $\dfrac{2y^2 + 5y + 6}{2y - 1}$

33. $\dfrac{2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 10x - 1}{2x^2 + x - 5}$

34. $\dfrac{9x^7 - 6x^6 - 3x^5 + x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x + 3}{3x^3 - 2x^2 + x - 1}$

35. $\dfrac{3x^2 - 2xy - 8y^2}{x - 2y}$

36. $\dfrac{8a^2 - 6ab + 12b^2}{2a - 3b}$

37. $\dfrac{8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3}{2x - 3y}$

38. $\dfrac{6x^3 + 4x^2y^2 - 15xy - 10y^3}{2x^2 - 5y}$

39. $\dfrac{2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3}{x^2 - 1}$

40. $\dfrac{x^6 - 8y^6}{x^4 + 2x^2y^2 + 4y^4}$

41. $\dfrac{x^3 - y^3}{x - y}$

42. $\dfrac{x^5 + y^5}{x + y}$

II. Utiliza la división sintética en los siguientes ejercicios.

1. $\dfrac{3x^2 - 2x - 4}{x + 3}$

2. $\dfrac{2x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 7}{x + 3}$

3. $\dfrac{4y^5 - 27y^3 + 15y^2 + 5}{y - 1}$

4. $\dfrac{5x^4 - 10x^2 - 10x - 10}{x - 2}$

5. $\dfrac{x^7 - 5x^5 + 3x^3 + 3x - 1}{x + 2}$

6. $\dfrac{5x^3 + 2x^4 + 7x + 2}{x + 1}$

7. $\dfrac{y^2 - 4y - 32}{y + 4}$

8. $\dfrac{2x^2 - 9x + 15}{x - 6}$

9. $\dfrac{y^3 + 6y^2 + 6y - 7}{y + 5}$

10. $\dfrac{x^4 - 5x^3 + 4x - 48}{x + 2}$

11. $\dfrac{x^4 - 3x + 1}{x - 1}$

12. $\dfrac{y^5 - 3y^3 + 4y - 6}{y - 2}$

13. $\dfrac{2x^5 + x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x - 1/2}$

14. $\dfrac{6x^5 + 8x^4 - x^3 + 2x^2 + 9x + 2}{x + 1/3}$

Sección 4.7

SIMPLIFICACIÓN, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Encontrar los valores de las variables para las cuales una fracción dada no está definida.
2. Reducir una fracción algebraica a su mínima expresión.
3. Multiplicar y dividir fracciones algebraicas.

Definición. Una fracción algebraica o expresión racional es un cociente de dos expresiones algebraicas.

Las siguientes expresiones son fracciones algebraicas:

$$\frac{3}{x}, \frac{5}{x - 1}, \frac{x}{x^2 - 1}, \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Como la división por cero no está definida ($\frac{a}{0}$ no existe) en los números reales, una fracción en donde el denominador es cero no existe o tendremos que la fracción no está definida.

Ejemplos.

1. Se indica si las siguientes fracciones están definidas en los reales.

   a) $\frac{5}{x}$ no está definida si $x = 0$

   ya que al sustituir $x = 0$ en la fracción, no existe en los reales.

   b) $\frac{3}{x+1}$ no está definida si $x = -1$ ya que $\frac{3}{(-1)+1} = \frac{3}{0}$ = no existe.

   c) $\frac{x+3}{x^2-9}$ no existe si $x = 3$ o $x = -3$ ya que

   $\frac{3+5}{(-3)^2-9} = \frac{8}{9-9} = \frac{8}{0}$ = no existe

   o $\frac{3+5}{(-3)^2-9} = \frac{8}{9-9} = \frac{8}{0}$ = no existe.

Observación. Si a es un número real diferente de cero $\frac{0}{a} = 0$ y $\frac{a}{0}$ = no existe.

Ejemplos.

2. *a*) $\frac{0}{5} = 0$, $\frac{0}{-3} = 0$ $\frac{0}{8} = 0$

   b) $\frac{6}{0}$ = no existe, $\frac{-4}{0}$ = no existe

> Una fracción algebraica está reducida a sus términos más simples cuando el numerador y el denominador no tienen más factores en común que la unidad.

Recordemos la ley de la cancelación:

$$\frac{a \cdot x}{b \cdot x} = \frac{a}{b}, \; b \neq 0, \; x \neq 0$$

Para simplificar fracciones el proceso que seguiremos será factorizar por completo el numerador y el denominador para luego eliminar los factores en común del numerador y denominador utilizando la ley de la cancelación.

Observación. La ley de la cancelación nos permite eliminar solamente factores y no términos.

Ejemplos.

3. Se simplifican las siguientes fracciones algebraicas:

   a) $\frac{2}{x+2}$ no se puede eliminar el factor común 2.

   b) $\frac{3+x}{3+2x}$ no se puede simplificar el término común 3 ya que no son factores en el numerador y en el denominador.

4. Se simplifican las fracciones a sus términos más simples:

   a) $\frac{3x+3}{3}$

   Factorizado el numerador tenemos que $\frac{3x+3}{3} = \frac{3(x+1)}{3}$

   y el factor en común es 3 y se puede eliminar, es decir:

   $$\frac{3x+3}{3} = \frac{3(x+1)}{3} = x+1$$

   b) $\frac{3x^2}{6x^2-6xy}$

   $$\frac{3x^2}{6x^2-6xy} = \frac{3x^2}{6x(x-y)}$$

   Se simplifica el 3 con el 6 y x^2 con x es decir:

   $$\frac{3x^2}{6x^2-6xy} = \frac{3x^2}{6x(x-y)} = \frac{x}{2(x-y)}$$

   c) $\frac{2a^3-10a}{10a^2}$

   Se factorizará el numerador por factor en común
   $2a^3 - 10a = 2a(a^2 - 5)$
   y los factores del denominador son $10a^2 = 5a(2a)$
   así

   $\frac{2a^3-10a}{10a^2} = \frac{(2a)(a^2-5)}{(2a)(5a)}$ y se eliminará el factor en común.

es decir:

$$\frac{2a^3 - 10a}{10a^2} = \frac{(2a)(a^2 - 5)}{(2a)(5a)} = \frac{a^2 - 5}{5a}$$

Observación. En este último ejemplo, en el resultado de simplificado tenemos un 5 en el numerador y el denominador, pero no podemos simplificarlo ya que en el numerador es un término y en el denominador un factor de a.

d) $$\frac{x^2 + 3x - 10}{4x + 20} = \frac{(x + 5)(x - 2)}{4(x + 5)} = \frac{x - 2}{4}$$

e) $$\frac{x^3 - 9x}{x^2 - x - 6} = \frac{x(x^2 - 9)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{x(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{x(x + 3)}{x + 2}$$

Observación. Utilizando la propiedad distributiva podemos decir que:

$-(a + b) = (-1)(a + b) = (-1)(a) + (-1)(b) = -a - b$

$-(a - b) = (-1)(a - b) = (-1)(a) - (-1)(b) = -a + b$

$-(-a - b) = (-1)(-a - b) = (-1)(-a) - (-1)(b) = +a + b$

Es decir: $-a - b = -(a + b)$

$-a + b = b - a = -(a - b)$

$a + b = -(-a - b)$

Estas igualdades pueden ser de utilidad al simplificar fracciones.

Ejemplos.

5. Se simplifican las fracciones a sus términos más simples:

a) $$\frac{x - 3}{3 - x} = \frac{x - 3}{-(x - 3)} = \frac{1(x - 3)}{-1(x - 3)} = -1$$

b) $$\frac{4(y^2 - x^2)}{2(x^2 - y^2)} = \frac{4(y - x)(y + x)}{2(x - y)(x + y)} = \frac{4(y - x)(x + y)}{2(x - y)(x + y)}$$
$$= \frac{2(y - x)}{(x - y)} = \frac{2(y - x)}{(-1)(y - x)} = -2$$

6. Se simplifican las fracciones a sus términos más simples:

a) $$\frac{x^2 - 5xy - 6y^2}{y^2 - x^2} = \frac{(x - 6y)(x + y)}{(y - x)(y + x)} = \frac{x - 6y}{y - x}$$

b) $$\frac{x^4 - 6x^3 + 8x^2}{6x^4 - 24x^2} = \frac{x^2(x^2 - 6x + 8)}{6x^2(x^2 - 4)} = \frac{x^2(x - 4)(x - 2)}{6x^2(x - 2)(x + 2)} = \frac{x - 4}{6(x + 2)}$$

$$c)\ \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

$$d)\ \frac{a^2+3a-ab-3b}{a^2-ab+5a-5b}=\frac{(a^2+3a)-(ab+3b)}{(a^2-ab)+5(a-b)}$$

$$=\frac{a(a+3)-b(a+3)}{a(a-b)+5(a-b)}=\frac{(a+3)(a-b)}{(a-b)(a+5)}=\frac{a+3}{a+5}$$

Observación. Algunos de los errores que se cometen al simplificar fracciones se basan en las siguientes igualdades que no son correctas:

1. $\frac{k+a}{k+b}=\frac{a}{b}$ es falso si $k\neq 0$

2. $\frac{k+a}{k}=a$ es falso

   En la segunda igualdad lo que sí podemos decir es que

   $$\frac{k+a}{k}=\frac{k}{k}+\frac{a}{k}=1+\frac{a}{k},\ \text{si } k\neq 0$$

Ejemplos.

7. Se simplifican las fracciones a sus términos más simples:

   a) $\frac{x^2+4}{x^2+3}$ no se puede simplificar y $\frac{x^2+4}{x^2+3}\neq\frac{4}{3}$

   b) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+6x+5}$ no se puede simplificar y $\frac{x^2+6x+9}{x^2+6x+5}\neq\frac{9}{5}$

   c) $\frac{3x+7}{3x}\neq 7$ y $\frac{3x+7}{3x}=\frac{3x}{3x}=\frac{7}{3x}=1+\frac{7}{3x}$

   d) $\frac{x^2+6}{x}\neq x+6$ y $\frac{x^2+6}{x}=\frac{x^2}{x}+\frac{6}{x}=x+\frac{6}{x}$

   e) $\frac{x+8}{4}\neq x+2$ y $\frac{x+8}{4}=\frac{x}{4}+\frac{8}{4}=\frac{x}{4}+2$

Multiplicación de fracciones algebraicas

Para efectuar la multiplicación de fracciones haremos uso del teorema:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\quad b\neq 0,\quad d\neq 0$$

y el procedimiento es primero indicar el producto del numerador por numerador y el producto del denominador por el denominador, después factorizar lo que se indica en el numerador y en el denominador, y por último utilizar la ley de la cancelación para eliminar factores en común en el numerador y denominador.

Ejemplos.

8. Multiplicar y simplificar las siguientes expresiones.

$$a)\ \frac{4x^3}{y}\cdot\frac{2y^4}{8x}=\frac{(4x^3)(2y^4)}{y(8x)}=\frac{(4)(x^2)(x)(2y^3)(y)}{(y)(4)(2)(x)}=\frac{x^2y^3}{1}=x^2y^3$$

$$b)\ \frac{2a+2b}{4}\cdot\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{(2a+2b)(a-b)}{4(a^2-b^2)}=\frac{2(a+b)(a-b)}{4(a-b)(a+b)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$c)\ \frac{x^2-3x-10}{x^2-25}\cdot\frac{2x+10}{6x+12}=\frac{(x^2-3x-10)(2x+10)}{(x^2-25)(6x+12)}$$

$$=\frac{(x-5)(x+2)(2)(x+5)}{(x-5)(x+5)(6)(x+2)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$d)\ \frac{x-4}{2x+8}\cdot\frac{4x+8}{x^2-16}\cdot\frac{x+4}{x+2}=$$

$$\frac{(x-4)(4x+8)(4)}{(2x+8)(x^2-16)(x+2)}=\frac{(x-4)(4)(x+2)(x+4)}{(2)(x+4)(x-4)(x+4)(x+2)}$$

$$=\frac{2}{x+4}$$

División de fracciones algebraicas

Para la división haremos uso del siguiente teorema:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

o también podemos decir que

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Por lo que, para dividir dos fracciones algebraicas transformaremos la división a un producto de fracciones algebraicas y seguiremos el proceso de producto de fracciones.

Ejemplos.

9. Se dividen y simplifican las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{6b^2}{4a} \div \dfrac{3b}{4a^2} = \dfrac{(6b^2)(2a^2)}{(4a)(3b)} = \dfrac{(3b)(b)(2a)(a)}{2(2a)(3b)} = \dfrac{ab}{2}$

b) $\dfrac{4a^2b}{5a^2} \div a^2b^3 = \dfrac{4a^2b}{5a^2} \div \dfrac{a^2b^3}{1} = \dfrac{(4a^2b)(1)}{(5a^2)(a^2b^3)}$

$$= \frac{4a^2b}{(5a^2)(a^2)((\ ))} = \frac{4a^2b}{(5a^2)(a^2)(b)(b^2)} = \frac{4}{5a^2b^2}$$

c) $\dfrac{x-1}{4} \div \dfrac{3x-3}{8} = \dfrac{(x-1)(8)}{(4)(3x-3)} = \dfrac{(x-1)(4)(2)}{4(3)(x-1)} = \dfrac{2}{3}$

d) $\dfrac{3x-15}{x+3} \div \dfrac{12x+18}{4x+12} = \dfrac{(3x-15)(4x+12)}{(x+3)(12x+18)} =$

$$\frac{3(x-5)(4)(x+3)}{(x+3)(6)(2x+3)} = \frac{3(x-5)(2)(2)}{3 \cdot 2(2x+3)} = \frac{2(x-5)}{2x+3} = \frac{2x-10}{2x+3}$$

e) $\dfrac{2x}{3x-15} \div \dfrac{x^2-3x}{x^2-8x+15} =$

$$\frac{(2x)(x^2-8x+15)}{(3x-15)(x^2-3x)} = \frac{2x(x-5)(x-3)}{3(x-5)(x)(x-3)} = \frac{2}{3}$$

También podemos tener fracciones combinadas de producto y división.

Ejemplos.

10. Se efectúan las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{(x^2-9)(x)}{(x)(x-3)} \div \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{(x^2-9)(x)(x+3)}{x(x-3)(3)} =$

$$\frac{(x-3)(x+3)(x)(x+3)}{x(x-3)(3)} = \frac{(x+3)^2}{3}$$

b) $\dfrac{x^2+x-2}{x-1} \div \dfrac{x+2}{x^2-3x+2} \cdot \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{(x^2+x-2)(x^2-3x+2)}{(x-1)(x+2)} \cdot \dfrac{4}{x-2} =$

$$\frac{(x^2+x-2)(x^2-3x+2)(4)}{(x-1)(x+2)(x-2)} =$$

$$\frac{(x+2)(x-1)(x-2)(x-1)(4)}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{4(x-1)}{1} = 4x-4$$

Ejercicios.

I. Indicar los valores en donde la fracción no existe en los números reales.

1. $\frac{8}{x}$
2. $\frac{3}{x-3}$
3. $\frac{9}{x+5}$
4. $\frac{x}{x+3}$
5. $\frac{2x}{x^2-1}$
6. $\frac{x+5}{x^2-25}$
7. $\frac{x}{x^2+2x}$
8. $\frac{x-4}{x+5}$

II. Indicar si cada una de las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

1. $\frac{4+5}{5} = 4$
2. $\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2} = 0$
3. $\frac{x^2+9}{x^2+4} = \frac{9}{4}$
4. $\frac{3(a+b)}{(c+d)(3)} = \frac{a+b}{c+d}$
5. $\frac{6x+3}{1+6x} = 3$
6. $\frac{a-b}{b-a} = 1$
7. $\frac{x^2}{y^2} = \frac{x}{y}$
8. $-\frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

9. $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$

10. $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

III. Reducir cada expresión algebraica a sus términos más simples. Para todos los casos el denominador es diferente de 0.

1. $\frac{x-2}{2-x}$

2. $\frac{5-x}{x-5}$

3. $\frac{2x+3}{-3-2x}$

4. $\frac{3x-2y}{2y-3x}$

5. $\frac{-5a-7b}{5a+7b}$

6. $\frac{3xy-2z}{2z-3xy}$

7. $\frac{x^2-x}{x-x^2}$

8. $\frac{y^2-4}{4-y^2}$

9. $\frac{a^2-16}{4-a}$

10. $\frac{a^2-16}{4+a}$

11. $\frac{8x^5}{12x^6+4x^5}$

12. $\frac{27a^3+9a^5}{27a^3+81a^4}$

13. $\frac{2x^2y-xy^2}{2xy^2-y^3}$

14. $\frac{8b+16b^2}{32b^3+16b^2}$

15. $\frac{(y+1)^2}{y^2-1}$

16. $\dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$

17. $\dfrac{x^4 + x^2}{x^3 + x^2}$

18. $\dfrac{3a - 9b}{6a - 18b}$

19. $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x}$

20. $\dfrac{x^3 - y^3}{6x - 6y}$

21. $\dfrac{x^2 - 16}{x^2 + 8x + 16}$

22. $\dfrac{y - x}{x^2 - y^2}$

23. $\dfrac{4b^2 - 20b}{b^2 - 4b - 5}$

24. $\dfrac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$

25. $\dfrac{2x^2 + 5x - 12}{4x^2 - 4x - 3}$

26. $\dfrac{6a^2 - 7a - 3}{4a^2 - 8a + 3}$

27. $\dfrac{12 + a - a^2}{a^2 - 2a - 8}$

28. $\dfrac{6 - 5b - b^2}{b^2 + 7b - 8}$

29. $\dfrac{9x^2 - 1}{9x^2 - 3x - 2}$

30. $\dfrac{2y^2 - 11y + 12}{4y^2 - 9}$

31. $\dfrac{x^2 - x - 2}{2 - 3x + x^2}$

32. $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{-x^2 - 6x - 9}$

33. $\dfrac{ay + a - y - 1}{a^3 - 1}$

34. $\dfrac{ax + ay - bx - by}{am \quad bm - an + bn}$

IV. En los siguientes ejercicios efectuar operaciones indicadas y simplificar.

1. $\frac{30y}{8x} \cdot \frac{2x}{5y}$
2. $\frac{6x^2}{4a^2b} \cdot \frac{8a^3b}{3x}$
3. $9xy^2 \cdot \frac{2}{3xy}$
4. $\frac{6a^3}{33b} \cdot \frac{11b^2}{15a^4}$
5. $\frac{15z^2}{27xy^2} \cdot \frac{9xy}{45z}$
6. $\frac{6ab}{8c} \div \frac{2a}{12c}$
7. $256y^4 \div \frac{16y^2x}{3}$
8. $\frac{5}{2xy} \div 10xy^2$
9. $\frac{17x^2}{54ab} \div \frac{34x}{9ab^2}$
10. $\frac{5a^4x^3}{8b^2y} \div \frac{a^3x^4}{4by}$
11. $\frac{x^3y^4}{36} \cdot \frac{12}{x^4y^3} \div \frac{18xy}{2}$
12. $\frac{8a^4b^4}{7ab^2} \div \frac{44a^4b^3}{28a^2b^2} \cdot \frac{11ab}{7a^5b^3}$
13. $\frac{x+y}{a-2b} \cdot \frac{2b-a}{2x+2y}$
14. $\frac{y^2+y}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{xy+1}$
15. $\frac{x-y}{x^2+xy} \cdot \frac{x^2}{y^2-xy}$
16. $\frac{y^2}{y^4-49} \cdot (6y^2-42)$
17. $\frac{1-x}{1-a^3} \cdot \frac{1-a^2}{x^2-1}$
18. $\frac{x-y}{a-b} \div \frac{y-x}{29-2b}$

19. $\dfrac{3x-18}{4x} \div (x-6)$

20. $\dfrac{4x^2-9}{x+3y} \div \dfrac{2x+3}{2x-3}$

21. $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2} \div \dfrac{x-y}{x+y}$

22. $\dfrac{x^2}{y^2-49} \div \dfrac{3x^2}{6y+42}$

23. $\dfrac{a^3-b^3}{a^3+ab^2} \div \dfrac{a^3-ab^2}{a^2b+b^3}$

24. $\dfrac{3-x}{x^2-8x+15} \div \dfrac{1}{5-x}$

25. $\dfrac{2x^2+5x-3}{6x^2-5x+1} \cdot \dfrac{3x^2-7x+2}{x^2+x-6}$

26. $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-7x+12} \cdot \dfrac{x^2+6x+5}{3x^2+2x-1}$

27. $\dfrac{7x+21}{x^2-16y^2} \cdot \dfrac{x^2-5xy+4y^2}{4x^2+11x-3}$

28. $\dfrac{2x^2+3xy+y^2}{2x^2+3xy-2y^2} \div \dfrac{x^2-y^2}{2x^2-5xy+2y^2}$

29. $\dfrac{a^2}{1-a^2} \div \dfrac{2a}{1-a} \cdot \dfrac{1+a}{1-a}$

30. $\dfrac{x^4-y^4}{(x-y)^2} \cdot \dfrac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{x-y}{xy-y^2}$

31. $\dfrac{x^2}{9-x^2} \div \left(\dfrac{x}{3-x} \div \dfrac{3-x}{3+x}\right)$

32. $(a^2-b^2) \div \left(\dfrac{a^2+ab}{b^2+ab} \div \dfrac{a^2-ab}{b^2-ab}\right)$

33. $\left(\dfrac{a-5}{a^2-a} \cdot \dfrac{a^2+a-2}{a^2-25}\right) \div \dfrac{a^2-2a-8}{a^2+a-20}$

34. $\dfrac{2ax-bx+4ay-2by}{4x^2-16y^2} \div \dfrac{8}{4x-8y}$

35. $(x^{2K}-y^{2K}) \div \dfrac{x^{K+1}-xy^K}{y^{K+1}+x^Ky}$

36. $\dfrac{4a^2+b^3-8a^3-b^2}{2a-b} \cdot \dfrac{4a^2-b^2}{2a+b}$

37. $\dfrac{y^4-16}{2y^2-y^3+8-4y} \div \dfrac{y^2-2}{4}$

Sección 4.8

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Obtener el mínimo común denominador de una suma o resta de fracciones algebraicas dadas.
2. Sumar o restar fracciones algebraicas.

Suma y resta de fracciones algebraicas con denominadores iguales

Para sumar o restar dos fracciones algebraicas utilizaremos el mismo proceso que para sumar fracciones numéricas, éste depende de que sus denominadores sean iguales o diferentes.

Para sumar o restar fracciones con el mismo denominador haremos uso de lo siguiente:

Si a, b y c son números reales:

i. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}, \quad b \neq 0$

ii. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{b} = \dfrac{a-c}{b}, \quad b \neq 0$

Ejemplos.

1. Se realizan y simplifican las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{6-x}{3} = \dfrac{x+6-x}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

b) $\dfrac{x-2}{4} - \dfrac{x+5}{4} = \dfrac{(x-2)-(x+5)}{4} = \dfrac{x-2-x-5}{4} = \dfrac{-7}{4}$

c) $\dfrac{5x+4}{9} + \dfrac{4x+5}{9} = \dfrac{5x+4+4x+5}{9} = \dfrac{9x+9}{9} = \dfrac{9(x+1)}{9} = x+1$

d) $\dfrac{8}{a+b} - \dfrac{5}{a+b} = \dfrac{8-5}{a+b} = \dfrac{3}{a+b}$

e) $\dfrac{4x}{x^2+x-2} + \dfrac{8}{x^2+x-2} = \dfrac{4x+8}{x^2+x-2}$

$$= \frac{4(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{4}{x-1}$$

$$f)\ \frac{x^2+10}{x-6}-\frac{3x+30}{x-6}+\frac{2x-10}{x-6}=$$

$$\frac{(x^2+10)-(3x+30)+(2x-10)}{x-6}=$$

$$\frac{x^2+10-3x-30+2x-10}{x-6}=$$

$$\frac{x^2+(-3x+2x)+(10-30-10)}{x-6}=$$

$$\frac{x^2-x-30}{x-6}=\frac{(x-6)(x+5)}{x-6}=x+5$$

Suma y resta de fracciones algebraicas con diferentes denominadores

Para sumar o restar fracciones algebraicas con denominadores diferentes, se obtendrá el mínimo común múltiplo de los denominadores y se volverá a escribir cada expresión usando el mínimo común múltiplo. Para obtener el mínimo común múltiplo (m.c.m) de polinomios seguiremos el siguiente proceso:

1. Factorizar completamente cada polinomio. Cualquier factor que aparezca más de una vez debe ser expresado como una potencia, por ejemplo:

   $$8=2^3,\quad 12=2^2\cdot 3\quad (2x+1)(2x+1)=(2x+1)^2$$

2. Enumerar todos los factores diferentes de 1 que aparezcan. Cuando aparezca el mismo factor en más de un polinomio, se escribe el factor de mayor potencia.
3. El mínimo común múltiplo es el producto de todos los factores encontrados en el paso anterior.

Ejemplos.

2. Se obtiene el mínimo común múltiplo de las siguientes expresiones algebraicas:

   a) $8x,\ 2x^3,\ 12x^4$

   Factorizando se tendrá

   $8x=2^3\cdot x$

   $2x^3=2\cdot x^3$

   $12x^4=2^2\cdot 3\cdot x^4$

El m.c.m. es $2^3 \cdot 3x^4 = 24x^4$
es decir, el m.c.m. de $8x$, $2x^3$, $12x^4$ es $24x^4$ ya que esta expresión dividirá a cada expresión

$$\frac{24x^4}{8x} = 3x^3, \quad \frac{24x^4}{2x^3} = 12x, \quad \frac{24x^4}{12x^4} = 2$$

b) $3x + 3$, $3x^3 + 3x^2$

Factorizando tenemos que

$$3x + 3 = 3(x + 1)$$
$$3x^3 + 3x^2 = 3x^2(x + 1)$$

El m.c.m. es $3(x + 1)(x^2) = 3x^2(x + 1)$
es decir, el m.c.m. de $3x + 3$ y $3x^3 + 3x^2$ es $3x^2(x + 1)$

El proceso para sumar o restar fracciones algebraicas es el siguiente:

1. Factorizar completamente cada una de las expresiones de los numeradores y denominadores de las fracciones a sumar o restar.
2. Obtener el m.c.m. de las fracciones.
3. Reescribir cada fracción como una fracción equivalente con el m.c.m. Esto se obtendrá multiplicando el numerador y denominador de cada fracción por los factores necesarios para obtener el m.c.m.
4. Dejar expresado el denominador en forma factorizada.
5. Desarrollar el denominador de cada fracción.
6. Sumar o restar los numeradores conservando el m.c.m.
7. Simplificar el resultado.

Ejemplos

1. Se suman o restan las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{5x}{6} + \frac{3x}{9}$

Primero se obtendrá el m.c.m. de los denominadores y se factorizarán los denominadores

$$6 = 3 \cdot 2$$

$$9 = 3^2$$

El m.c.m. es $3^2 \cdot 2 = 18$

Así $\frac{5x}{6} + \frac{2x}{9} = \frac{5x(3)}{6(3)} + \frac{2x(2)}{9(2)}$

$= \frac{15x}{18} + \frac{4x}{18}$

$= \frac{15x + 4x}{18} + \frac{19}{18}x$

b) $\frac{5}{2a} - \frac{7}{3a^2} + \frac{1}{4}$

Los factores de los denominadores son

$2a = 1(2a)$

$3a^2 = 1(3a^2)$

$4 = 2^2$

El m.c.m. es $2^2 \cdot 3 \cdot a^2 = 12a^2$
Por lo que

$$\frac{5}{2a} - \frac{7}{3a^2} + \frac{1}{4} = \frac{5(6a)}{2a(6a)} - \frac{7(4)}{3a^2(4)} + \frac{1(3a^2)}{4(3a^2)}$$

$$= \frac{30a - 28 + 3a^2}{12a^2}$$

$$= \frac{30a^2 + 30a - 28}{12a^2}$$

c) $\frac{2x - 1}{x} + \frac{x^2}{x - 1}$

Los factores de los denominadores son

$x = (x)(1)$

$x - 1 = (x - 1)(1)$

y el m.c.m. es $x(x - 1)$

así $\frac{2x - 1}{x} + \frac{x^2}{x - 1} = \frac{(2x - 1)(x - 1)}{x(x - 1)} + \frac{x^2(x)}{(x - 1)(x)}$

como son los mismos denominadores entonces

$$\frac{2x - 1}{x} + \frac{x^2}{x - 1} = \frac{(2x - 1)(x - 1)}{x(x - 1)} + \frac{x^2(x)}{(x - 1)(x)} = \frac{(2x - 1)(x - 1) + x^2(x)}{x(x - 1)}$$

$$= \frac{2x - x - 2x + 1 + x^3}{x(x - 1)}$$

$$= \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x(x - 1)}$$

d) $\dfrac{x+1}{x-5} - \dfrac{x+1}{x+5} =$

Los factores de los denominadores son

$x - 5 = (x - 5)(1)$

$x + 5 = (x + 5)(1)$

El m.c.m. es $(x - 5)(x + 5)$

Así

$$\frac{x+1}{x-5} - \frac{x+1}{x+5} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x-5)(x+5)} - \frac{(x+1)(x-5)}{(x+5)(x-5)}$$

$$= \frac{(x+1)(x+5) - (x+1)(x-5)}{(x-5)(x+5)}$$

$$= \frac{(x^2 + 6x + 5) - (x^2 - 4x - 5)}{(x-5)(x+5)}$$

$$= \frac{x^2 + 6x + 5 - x^2 + 4x + 5}{(x-5)(x+5)}$$

$$= \frac{10x + 10}{(x-5)(x+5)} = \frac{10(x+1)}{(x-5)(x+5)}$$

e) $\dfrac{x}{x+3} + \dfrac{5x^2}{x^2-9}$

Los factores de los denominadores son

$x + 3 = (1)(x + 3)$

$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

El m.c.m. es $(x + 3)(x - 3)$

Así

$$\frac{x}{x+3} + \frac{5x^2}{x^2-9} = \frac{x}{(x+3)} + \frac{5x^2}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{5x^2}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{x(x-3) + 5x^2}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 5x^2}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{6x^2 - 3x}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{3x(2x-1)}{(x^2-9)}$$

f) $\dfrac{x+5}{x^2+7x+10} - \dfrac{x-1}{x^2+5x+6}$

Los factores de los denominadores son

$x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$

$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

El m.c.m. es $(x + 5)(x + 2)(x + 3)$

Así

$$\frac{x+5}{x^2+7x+10} - \frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{(x+5)}{(x+5)(x+2)} - \frac{(x-1)}{(x+3)(x+2)}$$

$$= \frac{(x+5)(x+3)}{(x+5)(x+2)(x+3)} - \frac{(x-1)(x+5)}{(x+3)(x+2)(x+5)}$$

$$= \frac{(x+5)(x+3) - (x-1)(x+5)}{(x+5)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{(x^2+8x+15) - (x^2+4x-5)}{(x+5)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2+8x+15-x^2-4x+5}{(x+5)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{4x+20}{(x+5)(x+2)(x+3)} = \frac{4(x+5)}{(x+5)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{4}{(x+2)(x+3)}$$

g) $\dfrac{5}{x-3} + \dfrac{7}{3-x}$

El denominador es $3 - x$, lo podemos reescribir como $(-1)(x - 3)$ así:

$$\frac{5}{x-3} + \frac{7}{3-x} = \frac{5}{x-3} + \frac{7}{(-1)(x-3)}$$

$$= \frac{5}{(x-3)} + \frac{-7}{(x-3)} = \frac{5-7}{x-3} - \frac{-2}{x-3}$$

h) $y + 2 + \dfrac{5}{y-5} = \dfrac{y+2}{1} + \dfrac{5}{y-5}$

El común denominador es $(y - 5)(1)$

Así,

$$\frac{y+2}{1} + \frac{5}{y-5} = \frac{(y+2)(y-5)}{(y-5)} + \frac{5}{(y-5)}$$

$$= \frac{(y+2)(y-5)+5}{y-5}$$

$$= \frac{y^2 - 3y - 10 + 5}{y - 5}$$

$$= \frac{y^2 - 3y - 5}{y - 5}$$

Ejercicios.

I. Para cada ejercicio sumar o restar según se indica y simplificar su resultado.

1. $\frac{3y}{x} + \frac{5y}{x}$
2. $\frac{-8x}{3y} + \frac{6x}{3y}$
3. $\frac{3}{x} - \frac{8}{-x}$
4. $\frac{2}{a} - \frac{-5}{a}$
5. $\frac{-9y}{x+y} + \frac{16y}{x+y}$
6. $\frac{3a^2}{a-b} + \frac{-4a^2}{a-b}$
7. $\frac{25xy}{x^2+y^2} - \frac{16xy}{x^2+y^2}$
8. $\frac{37a^2b}{a^2-b} - \frac{42a^2b^2}{a^2-b}$
9. $\frac{a-3b}{a+b} + \frac{a+5b}{a+b}$
10. $\frac{x+5y}{x-y} + \frac{x-7y}{x-y}$
11. $\frac{4y+3}{y-2} - \frac{y-2}{y-2}$
12. $\frac{3t+2}{t-4} - \frac{t-4}{t-4}$
13. $\frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b}$
14. $\frac{R^2}{R-S} + \frac{S^2}{S-R}$

15. $\dfrac{2x-10}{x^2-25}-\dfrac{5-x}{25-x^2}$

16. $\dfrac{y-9}{y^2-16}-\dfrac{7-y}{16-y^2}$

II. Efectuar las operaciones de las siguientes fracciones que tienen diferente denominador y simplificar el resultado.

1. $\dfrac{7}{6x}+\dfrac{5}{8x}$

2. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

3. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

4. $\dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{3}+\dfrac{2a}{1^2}$

5. $8-\dfrac{3}{a}+\dfrac{5}{a}$

6. $2a-5+\dfrac{8}{a+1}$

7. $\dfrac{3}{2x}-\dfrac{11}{x}$

8. $\dfrac{5}{p}+\dfrac{4}{q}-\dfrac{3}{R}$

9. $a+b+\dfrac{a^2}{a-b}$

10. $\dfrac{2a-b}{3(a+b)}-\dfrac{a+2b}{7(a+b)}$

11. $\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{5}{x+2}$

12. $\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{8x}{1-x^2}$

13. $\dfrac{7}{y}-\dfrac{35+6y}{y^2+5y}-\dfrac{1}{y+5}$

14. $2y+3+\dfrac{6}{2y+3}$

15. $\dfrac{5}{1-2b}-\dfrac{9}{8b-4}-\dfrac{5}{6-12b}$

16. $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{2}{3-x} + \dfrac{2x}{9-x^2}$

17. $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{2x}{4-x^2}$

18. $\dfrac{a+3}{a^2-4} - \dfrac{4}{a} + \dfrac{1}{2-3a+a^2}$

19. $\dfrac{3}{x-3} - \dfrac{8}{x+3} - \dfrac{1-2x}{3-x} - \dfrac{2x}{x+3}$

20. $\dfrac{3a+3}{2a^2+6a} - \dfrac{a-4}{a^2-a-12}$

21. $\dfrac{3a+3}{2a^2+6a} - \dfrac{a-4}{a^2-a-12} + \dfrac{a+1}{3a^2-12a}$

22. $\dfrac{2m-1}{3m-6} - \dfrac{m-1}{m^2-m-2} + \dfrac{5}{6}$

23. $2y - 3 + \dfrac{y-2}{4y^2-12y+9} + \dfrac{y+2}{2y^2-y-3}$

24. $\dfrac{2x-1}{2x^2-x-6} + \dfrac{x+3}{6x^2+x-12} - \dfrac{2x-3}{3x^2-10x+8}$

Sección 4.9

FRACCIONES COMPLEJAS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Reconocer fracciones complejas.
2. Simplificar una fracción compleja a su mínima expresión.

Una fracción compleja es aquella fracción algebraica que tiene una expresión fraccionaria en el numerador o en el denominador.

Ejemplo.

1. Las siguientes expresiones son fracciones complejas:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{3}}, \quad \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{5}}, \quad \frac{\frac{6}{7}}{5}, \quad \frac{4x}{\frac{x+4}{x}}, \quad \frac{\frac{y}{x}}{y+1}, \quad \frac{\frac{x-y}{x}}{\frac{x+y}{x}}, \quad \frac{5+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x}}$$

El proceso para simplificar una fracción compleja es el siguiente:
1. Se efectúan las operaciones en el numerador y en el denominador de la fracción compleja.
1. Se divide el resultado obtenido en el numerador entre el resultado que se obtenga en el denominador.

Observación. Para simplificar fracciones complejas usaremos la siguiente definición:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Es decir, el resultado de dividir dos fracciones es una fracción en donde el numerador es el producto de los extremos de las fracciones y el denominador es el producto de los medios.

Ejemplos.

2. Se efectúan las operaciones indicadas:

a) $$\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1(4)}{3(4)}+\frac{2(3)}{4(3)}}{\frac{1(2)}{2(2)}-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{12}-\frac{6}{12}}{\frac{2}{4}-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{4-6}{12}}{\frac{2-3}{4}} = \frac{\frac{-2}{12}}{\frac{-1}{4}} = \frac{(-2)(4)}{(12)(-1)}$$

$$= \frac{-8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

b) $$\frac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{5}{x}} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{5}{x}} = \frac{\frac{x+5}{x}}{\frac{x-5}{x}} = \frac{(x+5)(x)}{x(x-5)} = \frac{x+5}{x-5}$$

c) $$\frac{\frac{x}{y}+\frac{x}{z}}{xy+xz} = \frac{\frac{xz}{yz}+\frac{xy}{yz}}{xy+xz} = \frac{\frac{xy+xz}{yz}}{\frac{xy+xz}{1}} = \frac{(xy+xz)(1)}{(xy+xz)(yz)} = \frac{1}{yz}$$

d) $$\frac{x}{x+\frac{1}{2-\frac{1}{x}}} = \frac{x}{x+\frac{1}{\frac{2x-1}{x}}} = \frac{x}{x+\frac{1}{\frac{2x-1}{x}}} = \frac{x}{x+\frac{\frac{1}{1}}{\frac{2x-1}{x}}}$$

$$= \frac{x}{x+\frac{1(x)}{1(2x-1)}} = \frac{x}{x+\frac{x}{2x-1}}$$

$$= \frac{x}{\frac{x(2x-1)}{(2x-1)} + \frac{x}{(2x-1)}} = \frac{x}{\frac{x(2x-1)+x}{2x-1}}$$

$$= \frac{x}{\frac{2x^2 - x}{2x-1}} = \frac{\frac{x}{1}}{\frac{2x^2}{2x-1}} = \frac{x(2x-1)}{1(2x^2)} = \frac{x(2x-1)}{2x \cdot x} = \frac{2x-1}{2x}$$

e) $$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{2(1)}{1(1)}} = 1 - \frac{1}{1-2} = 1 - \frac{1}{-1} = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

f) $$\frac{x - \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{x(x)}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x^3}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x^3}{x^8} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x^3 - 1}{x^2}} = \frac{(x^2 - 1)(x^2)}{x(x^3 - 1)}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)(x)(x)}{x(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{(x+1)(x)}{x^2 + x + 1} = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}$$

g) $$\frac{\frac{x+2}{x^2-1} + \frac{3}{x+1}}{\frac{4x-1}{x^2+2x-3}} = \frac{\frac{x+2}{(x-1)(x+1)} + \frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)}}{\frac{4x-1}{(x+3)(x-1)}}$$

$$= \frac{\frac{(x+2) + 3(x-1)}{(x-1)(x+1)}}{\frac{(4x-1)}{(x+3)(x-1)}} = \frac{\frac{x+2+3x-3}{(x-1)(x+1)}}{\frac{(4x-1)}{(x+3)(x-1)}}$$

$$= \frac{\frac{(4x-1)}{(x-1)(x+1)}}{\frac{(4x-1)}{(x+3)(x-1)}} = \frac{(4x-1)(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)(4x-1)} = \frac{x+3}{x+1}$$

Ejercicios.

I. Simplificar cada una de las siguientes fracciones complejas:

1. $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{12}}$

2. $\dfrac{\frac{1}{12}-5}{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}$

3. $\dfrac{6-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-4}$

4. $\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{1}{3}}{\frac{3}{x}+\frac{1}{3}}$

5. $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}$

6. $\dfrac{\frac{5}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{y}+\frac{2}{x}}$

7. $\dfrac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{5}{x}}$

8. $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{a}{c}}{ab+ac}$

9. $\dfrac{x-\frac{x}{y}}{y-\frac{1}{y}}$

10. $\dfrac{a^2-\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}$

11. $\dfrac{\dfrac{a^2}{x} - x}{\dfrac{a}{x} + 1}$

12. $\dfrac{\dfrac{y}{x-y} - \dfrac{x}{x+y}}{\dfrac{y}{x-y} + \dfrac{x}{x+y}}$

13. $\dfrac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}}{\dfrac{a^2}{b^2} - \dfrac{b^2}{a^2}}$

14. $\dfrac{1 - \dfrac{2}{x^2+1}}{x-1}$

15. $\dfrac{\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + 2}$

16. $\dfrac{x - y + \dfrac{y^2}{x+y}}{x^2 - \dfrac{x^2}{x+y}}$

17. $\dfrac{a - 1 - \dfrac{5}{a+3}}{a + 5 - \dfrac{35}{a+3}}$

18. $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a} - \dfrac{a+2b}{a+b}}$

19. $\dfrac{1 + \dfrac{a+1}{a-1}}{\dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{a+1}}$

20. $\dfrac{1}{x + \dfrac{1}{1-x}}$

21. $x - \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{1-x}}$

22. $2x - \dfrac{1}{x - \dfrac{4}{x}}$

23. $\dfrac{x}{x - \dfrac{x}{2 - \dfrac{1}{x}}}$

24. $x - \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - x}}}$

25. $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x}}}$

26. $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2}}}$

Sección 4.10

EXPONENTES ENTEROS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Dar el significado del símbolo x^n, donde:
   a) n es entero positivo
   b) n es entero negativo
   c) n es cero.
2. Aplicar las leyes de los exponentes en la resolución de problemas.

En secciones anteriores analizamos el significado de $x^n (x \neq 0)$, donde n es un entero positivo. En esta sección la definición de un exponente se extiende para incluir el cero y a los enteros negativos.

Exponente negativo y exponente cero.
Sea x un número real tal que $x \neq 0$, y sea P un entero

1. $x^0 = 1$,
2. $x^{-P} = \dfrac{1}{x^P}$, P es un número natural

Estas definiciones son congruentes con las propiedades de los exponentes, por ejemplo:

$$x^0 \cdot x^m = x^{0+m} = x^m = (1)(x^m)$$

$$x^0 = 1$$

Por otro lado, podemos decir que $\frac{1}{x^P}$ es el inverso multiplicativo de x^P puesto que $x^P \cdot x^{-P} = x^{P-P} = x^0 = 1$.

Ejemplo.

1. Se escribe cada expresión sin exponente negativo o cero.

   a) $3^0 = 1$

   b) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

   c) $(xy)^0 = 1$

   d) $(a + b)^0 = 1$

   e) $x^{-5} = \frac{1}{x^5}$

   f) $y^{-3} = \frac{1}{y^3}$

   g) $(x + y)^{-2} = \frac{1}{(x + y)^2}$

   h) $x^0 + y^{-3} = 1 + \frac{1}{y^3}$

La cuarta ley de los exponentes la expresamos como:
Si m y n son enteros positivos y x es un número real, entonces

$$\frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} x^{n-m} & \text{Si } n > m \\ 1 & \text{Si } n = m \\ \frac{1}{x^{m-n}} & \text{Si } n < m \end{cases}$$

Dado que se han definido los exponentes negativos o cero, se puede reescribir simplemente como

$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $x \neq 0$ y m, n son enteros positivos.

Las leyes de los exponentes serán válidas para todos los exponentes enteros, incluyendo los que son cero o negativos, las escribiremos de nuevo:

Leyes de los exponentes

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
2. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$
3. $(xy)^n = x^n y^n$
4. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \; x \neq 0$
5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^m}{y^n}, \; y \neq 0$

y se agregarán las dos definiciones del exponente cero y negativo:

6. $x^n = 1, \; x \neq 0$
7. $x^{-P} = \dfrac{1}{x^P}, \; x \neq 0$

Ejemplos.

2. Se escribe la siguiente expresión sin exponente negativo:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^{n}} = \frac{1}{\frac{x^n}{y^n}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{x^n}{y^n}}$$

$$= \frac{(y^n)(1)}{(x^n)(1)} = \frac{y^n}{x^n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$$

Por lo que podemos agregar a la lista de las siete propiedades de los exponentes, la siguiente:

8. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n, \; x \neq 0, \; y \neq 0$

Ejemplos.

3. Se utilizan las leyes de los exponentes para simplificar y dar la respuesta sin exponente negativo o cero.

   a) $5^6 \cdot 5^{-4} = 5^{6+(-4)} = 6^2 = 36$

   b) $3^{-1} \cdot 3^{-2} = 3^{(-1)+(-2)} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

   c) $(4^{-1})^{-2} = 4^{(-1)(-2)} = 4^{+2} = 4^2 = 16$

   d) $(2 \cdot 3)^{-1} = \frac{1}{(2 \cdot 3)^1} = \frac{1}{6}$

   e) $\frac{6^{-2}}{6^{-3}} = 6^{(-2)-(-3)} = 6^{-2+3} = 6^1 = 6$

   f) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{3^{-2}}{5^{-2}} = \frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{5^2}} = \frac{(5^2)(1)}{(3^2)(1)} = \frac{25}{9}$

Ejemplos.

4. Se utilizan las leyes de los exponentes para simplificar la expresión dada y dar la respuesta sin exponentes negativos o cero.

   a) $a^{-2} \cdot a^{-3} = a^{(-2)+(-3)} = a^{-5} = \frac{1}{a^5}$

   b) $x^{-2}x^{+2} = x^{-2+2} = x^0 = 1$

   c) $(x^{-3})^2 = x^{(-3)(2)} = x^{-6} = \frac{1}{x^6}$

   d) $(xy)^{-5} = x^{-5}y^{-5} = \frac{1}{x^5} \cdot \frac{1}{y^5} = \frac{1}{x^5y^5}$

   e) $\left(\frac{y}{x}\right)^4 = \frac{x^{-4}}{y^{-4}} = \frac{\frac{1}{x^{-4}}}{\frac{1}{y^{-4}}} = \frac{y^4}{x^4}$

Hay operaciones de expresiones en donde se tienen que utilizar dos o más leyes de los exponentes y la definición de exponente negativo o cero.

Ejemplos.

5. Se simplifica cada expresión y se da la respuesta sin exponente negativo o cero.

   a) $(x^2 + 3xy)^0 = 1$

b) $5^{x-3}y^0 = 5 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot (1) = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{x^3}$

c) $$\frac{6a^2b^{-3}}{5a^{-3}} = \frac{6a^2 \cdot \frac{1}{b^3}}{5 \cdot \frac{1}{a^3}} = \frac{\frac{6a^2}{1} \cdot \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{a^3}} = \frac{\frac{6a^2}{b^3}}{\frac{5}{a^3}}$$

$$= \frac{6a^2b^3}{5b^3} = \frac{6a^6}{5b^3}$$

Observaciones.

a) Cualquier factor del numerador de una expresión se puede pasar al denominador y viceversa con tal de cambiarle el signo a su exponente.

b) Si se tiene un término que no es factor en el numerador o denominador no se debe cambiar.

El último ejemplo se puede resolver de la siguiente manera:

$$\frac{6a^2b^{-3}}{5a^{-3}} = \frac{6a^2a^3}{5b^3} = \frac{6a^5}{5b^3}$$

Hay que recordar que esto se puede hacer, ya que el numerador y el denominador son factores.

c) $$\left(\frac{3a^{-5}}{b^{-3}}\right)^{-4} = \frac{(3a^{-5})^{-4}}{(b^{-3})^{-4}} = \frac{(3)^{-4}(a^{-5})^{-4}}{b^{(-3)(-4)}}$$

$$= \frac{3^{-4}a^{(-5)(-4)}}{b^{12}} = \frac{3^{-4}a^{20}}{b^{12}} = \frac{\frac{1}{34} \cdot \frac{a^{20}}{1}}{b^{12}} = \frac{\frac{a^{20}}{34}}{\frac{b^{12}}{1}} = \frac{a^{20}}{3^4b^{12}} = \frac{a^{20}}{81b^{12}}$$

d) $4b^{-2} = 4 \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{4}{b^2}$

e) $(4b)^{-2} = \frac{1}{(4b)^2} = \frac{1}{16b^2}$

f) $-3x^{-4} = -3 \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{-3}{1} \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{-3}{x^4}$

g) $(-3x)^{-4} = \frac{1}{(-3x)^4} = \frac{1}{(-3)^4x^4} = \frac{1}{+81x^4} = \frac{1}{81x^4}$

h) $(-x^3)^4 = [(1-1)^4(x^3)^4] = [(+1)(x)^{3\ 4}] = [(+1)x^{12}] = x^{12}$

$$i)\quad (-y^{-1})^{-2} = \frac{1}{(-y^{-1})^2} = \frac{1}{[(-1)^2(y^{-1})^2]} = \frac{1}{[(+1)(y^{-2})]}$$

$$= \frac{1}{y^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{y^2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{y^2}} = y^2$$

o también se puede desarrollar de la siguiente manera:

$$(-y^{-1})^{-2} = [(-1)(y^{-1})]^{-2} = [(-1)^{-2}(y^{-1})^{-2}]$$

$$= \left[\frac{1}{(-1)^2} \cdot y^2\right] = \left[\frac{1}{+1} y^2\right] = y^2$$

$$j)\quad \frac{(a^2 - b^2)^{-1}}{2} = \frac{\frac{1}{(a^2 - b^2)^1}}{\frac{2}{1}} = \frac{\frac{1}{a^2 - b^2}}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{2(a^2 - b^2)}$$

$$k)\quad \frac{a^{-1} + b^{-1}}{(a + b)^{-1}} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{(a + b)^1}} = \frac{\frac{b + a}{ab}}{\frac{1}{a + b}}$$

$$\frac{(b + a)(a + b)}{(ab)(1)} \quad \frac{(a + b)(a + b)}{ab} = \frac{(a + b)^2}{ab}$$

Ejercicios.

1. Efectuar las operaciones indicadas donde el resultado numérico no tenga exponente negativo o cero. Usar las leyes de los exponentes cuando sea necesario.

   1. 5^{-1}
   2. -4^{-1}
   3. 8^{-2}
   4. -6^{-1}
   5. $(-3)^{-2}$
   6. 7^{-1}
   7. 2^0
   8. $(\frac{1}{4})^0$
   9. $(-3)^0$
   10. -5^0
   11. $(-2)^0$
   12. $(\frac{2}{3})^0$
   13. $2^{-3} \cdot 2^{-4}$
   14. $6^{-6} \cdot 6^{-1}$

15. $3^{-2}3^{-5}$
16. $(-3)^4(-3)^2$
17. $5^2 5^3$
18. $4^{-6}4^3$
19. $(-2)^{-2}(-2)^3$
20. $2^3 \cdot 2^{-4}$
21. $2^3 2^{-4} 2^5$
22. $(-4)^2(-4)^3(-4)^4$
23. $5^2/5^3$
24. $\dfrac{2^3}{2^{-4}}$
25. $\dfrac{6^5}{6^{-1}}$
26. $\dfrac{3^{-2}}{3^{-5}}$
27. $\dfrac{4^{-6}}{4^3}$
28. $(3^2)^3$
29. $(5^{-1})^2$
30. $(4^3)^{-4}$
31. $(3^{-2})^{-3}$
32. $(-6^{-1})^{-3}$
33. $(-2^3)^4$
34. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$
35. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$
36. $\left(\dfrac{5}{6}\right)^2$
37. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$
38. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$
39. $\left(\dfrac{9}{8}\right)^2$
40. $(3 \cdot 5)^2$
41. $(2^2 3^{-1})^3$
42. $(5^{-1}3^{-1})^{-2}$
43. $(3^3 5^{-1})^{-3}$
44. $(2^0 5^{-2})^2$
45. $(4^3 \cdot 5^0)^{-3}$

II. En los siguientes ejercicios efectuar las operaciones utilizando las leyes de los exponentes y simplificar cada resultado sin exponentes negativos o cero.

1. $9y^0$
2. $(9y)^0$
3. $5x^{-1}$
4. $(5x)^{-1}$
5. $(a+b)^0$
6. $(3xyz - 2x^2y^2z^2)^0$
7. $(a+b)^{-1}$
8. $a + b^0$
9. $a + b^{-1}$
10. $a^{-1} + b$
11. $(3x^{-2})(4y^0)$
12. $(5x^{-3})(5y^0)(6x^{-1}y^{-3})$
13. $(5a^3b^{-2})(2ab^0)$
14. $ab^2(a^{-2}b^3c^{-2})$
15. $(6ab^3)^{-1}(5a^{-3}b^0)^{-3}$
16. $(5xy^{-3})(x^{-1}y^{-1})^2$
17. $(2x^{-1}y^2z)(3x^0y^{-2})$
18. $(2ab)^{-2}(3a^3b)$
19. $\dfrac{3x^{-4}}{(3y)^{-2}}$
20. $\dfrac{6^{-1}a^{-2}b^3}{2^{-1}a^0b^{-2}c}$
21. $\dfrac{3^{-2}x^3y^4}{6^{-1}x^{-3}y^0}$
22. $\dfrac{(5^{-1}ab)^{-1}}{(10a^{-2}b^3)^{-2}}$
23. $\left(\dfrac{2x}{2y^3}\right)^2$
24. $\left(\dfrac{2a^{-2}b}{a^{-1}}\right)^2$
25. $\left(\dfrac{4^{-1}x^4y^8}{8^{-2}x^8y^4}\right)^{-2}$
26. $\dfrac{(3^{-1}x^{-6}y^9)^2}{(3^{-2}x^3y^{-6})^3}$
27. $\dfrac{(a^2b^{-4}c)^{-3}}{(5^{-1}a^4b^2c^{-5})^{-2}}$

28. $\left(\frac{a^{-4}b^{-3}}{3^0c^{-2}}\right)^{-3}$

29. $\left(\frac{a^3b^5}{ab^{-2}}\right)^{-3}$

30. $\left(\frac{x^2y^0}{z^3}\right)^{-1}$

III. Simplificar las siguientes expresiones dejando las respuestas sin exponentes negativos o cero.

1. $\frac{4^{-1}-2^{-1}}{4^{-1}+2^{-1}}$

2. $\frac{5^{-1}}{10^{-1}+5^{-1}}$

3. $\frac{3^{-1}+6^{-1}}{3^{-1}}$

4. $\frac{1^{-1}+5^{-1}}{5^{-1}-1^{-1}}$

5. $\frac{ab^{-2}+a^{-2}b}{a^{-1}+b^{-1}}$

6. $\left(\frac{x^0-y^{-2}}{x^0+y^{-1}}\right)^{-1}$

7. $\frac{a}{b^{-1}}+\frac{b}{a^{-1}}$

8. $\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-2}b^{-2}}$

9. $\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}y^{-1}}$

10. $\frac{xy^{-1}+x^{-1}y}{x^{-1}+y^{-1}}$

11. $\frac{x^{-1}y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$

12. $\frac{b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}$

13. $\frac{a^{-3}-b^{-3}}{a^{-3}+b^{-3}}$

14. $\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}$

15. $\left(\dfrac{y^0 - y^{-2}}{x^0 + y^{-1}}\right)^{-1}$

16. $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$

17. $\left(\dfrac{p+q}{p-q}\right)^{-1}$

18. $\dfrac{3x + y}{(3x + y)^{-2}}$

19. $(a^{-1} + 2b^{-2})^2$

20. $(a^{-2} + b^{-1})^2$

21. $(a^{-2} + b^{-3})(a^{-2} - b^{-3})$

22. $(2a^{-1} - 3b^{-2})^3$

23. $(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2}b^{-1} + b^{-2})$

24. $(2x^0 - y^{-1})^{-3}$

25. $(a^{-2} - b^{-2})(a^{-4} + a^{-2}b^{-2} + b^{-4})$

Sección 4.11

RAÍCES Y EXPONENTES FRACCIONARIOS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir el símbolo a^n, donde:

   a) $n = \dfrac{1}{p}$, p es un número natural

   b) n es un número racional.

2. Dada una potencia con exponente fraccionario transformarlo a un radical y viceversa.

3. Resolver problemas que involucran exponentes positivos, negativos, fraccionarios u otros, aplicando las leyes de los exponentes.

Raíz n-ésima principal de un número.
Si x, y son números reales y si n es positivo, se dirá que y es la raíz n-enésima de x que se denotará por

$$\sqrt[n]{x} = y \qquad \text{si y sólo si} \qquad y^n = x$$

Además, si n es par, x y y no deben ser negativos.

Al símbolo $\sqrt{\ }$ se le llama **radical,** a x se le llama radicando o subradical y n es el índice del radical. Si el índice es 2 generalmente no se escribe.

Observaciones.

a) Si x es un número real positivo y n es par, entonces x tiene dos raíces n-ésimas.
b) Si x es un número real y n es impar, entonces x solamente tiene una raíz n-ésima.
c) Si x es un número real negativo y n es par, entonces a no tiene raíz n-ésima principal.

Ejemplos.

1. Se obtiene la raíz que se indica.

a) $\sqrt[2]{16} = +4$, porque $(4)^2 = 16$

$\sqrt[2]{16} = -4$, porque $(-4)^2 = 16$

Es decir $\sqrt[2]{16} = \pm 4$

b) $\sqrt[4]{81} = 3$, porque $(3)^4 = 81$

c) $\sqrt[3]{-27} = -3$, porque $(-3)^3 = -27$

d) $\sqrt{-4}$ = no existe en los números reales, ya que no existe un número real x tal que $(x)^2 = -4$

e) $(\sqrt[3]{64})^3 = (4)^3 = 64$

f) $(\sqrt[2]{9})^2 = (3)^2 = 9$

g) $\sqrt[2]{(-2)^2} = \sqrt[2]{4^2} = 2$

Exponentes racionales

Sea x un número real y n un entero tal que $n \geq 2$. Si la raíz n principal de x existe, se define $x^{m/n}$ como $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$ con la condición de que si n es par, x debe ser positivo.

Observaciones.

a) $x^{m/n} = (x^{1/n})^m = (\sqrt[n]{x})^m$ o $(x^{m/n}) = (x^m)^{1/n} = \sqrt[n]{x^m}$

Por lo que podemos afirmar que

$$x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

b) En la expresión $x^{m/n}$ el numerador m del exponente racional indica la potencia a la que se eleva la base y el denominador n indica a la raíz que se toma.

Ejemplos.

2. Se simplifica cada expresión:

a) $9^{1/2} = \sqrt[2]{9^1} = 3$

b) $(-64)^{1/3} = \sqrt[3]{-64} = -4$

c) $(-1)^{1/2} = \sqrt[2]{-1}$ no existe

d) $35^{1/5} = \sqrt[5]{32} = 2$

e) $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

f) $(-1)^{4/3} = \sqrt[3]{(-1)^4} = \sqrt[3]{+1} = 1$

g) $(-4)^{3/4} = \sqrt[4]{(-4)^3} = \sqrt[4]{-64}$ no existe

Las leyes de los exponentes son válidas para exponentes fraccionarios.

Leyes de los exponentes

Si x es un real, u y v son números racionales.

1. $x^u x^v = x^{u+v}$
2. $(x^u)^v = x^{uv}$
3. $\dfrac{x^u}{x^v} = x^{u-v}$, $x \neq 0$
4. $(xy)^u = x^u y^u$
5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^u = \dfrac{x^u}{y^u}$, $y \neq 0$

También podemos agregar la definición de exponente negativo y cero si éste es una fracción:

6. $x^{-u} = \dfrac{1}{x^u} =, x \neq 0$
7. $x^0 = 1$

Ejemplos.

3. Se realizan y simplifican las operaciones indicadas con las respuestas sin exponentes negativos o cero.

a) $x^{4/3} \cdot x^{6/3} = x^{\frac{4}{3}+\frac{6}{3}} = x^{10/3} = \sqrt[3]{x^{10}}$

b) $x^{1/2} \cdot x^{-1/4} = x^{\frac{1}{2}+\left(\frac{-1}{4}\right)} = x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$

c) $\dfrac{a^{3/5}}{a^{2/5}} = a^{3/5-2/5} = a^{1/5} = \sqrt[5]{a}$

d) $\dfrac{a^{2/5}}{a^{1/10}} = a^{\frac{2}{5}-\frac{1}{10}} = a^{\frac{4}{10}-\frac{1}{10}} = a^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{a^3}$

e) $(3a^{1/2}b^{-1/3})^{-2} = (3)^{-2}(a^{1/2})^{-2}(b^{-1/3})^{-2} = \dfrac{1}{3^2}(a^{-1})(b^{+2/3})$

$$= \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{b^{2/3}}{1}\right) = \frac{b^{2/3}}{9a} = \frac{\sqrt[3]{b^2}}{9a}$$

f) $(2a^{2/3}b)^3(2a^{1/2}b^{1/4})^2 = \left[(2)^3(a^{2/3})^3(b)^3\right]\left[(2)^2(a^{1/2})^2(b^{1/4})^2\right]$

$$= \left[8a^2b^3\right]\left[4ab^{2/4}\right] = 32a^2ab^3b^{1/2}$$

$$= 32a^3b^{3+\frac{1}{2}} = 32a^3b^{7/2}$$

g) $\left(\dfrac{4x^{-6}y^2}{16x^8y^{-4}}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{4y^2y^4}{16x^6x^8}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{y^6}{4x^{14}}\right)^{1/2}$

$$= \frac{(y^6)^{1/2}}{(4x^{14})^{1/2}} = \frac{y^{6\cdot(1/2)}}{4^{1/2}x^{14/2}} = \frac{y^3}{2x^7}$$

h) $(a^{1/2}+b^{1/2})^2(a^{1/2})^2 + 2(a^{1/2})(b^{1/2}) + (b^{1/2})^2 = a + 2a^{1/2}b^{1/2} + b$

i) $(a^{1/4}-b^{1/4})(a^{1/4}+b^{1/4}) = (a^{1/4})^2 - (b^{1/4})^2$

$$= a^{2/4} - b^{2/4} = a^{1/2} - b^{1/2}$$

$$j)\ (a^{-1}+2)(a^{-1}+1) = (a^{-1})(a^{-1}) + (a^{-1})(1) + (2)(a^{-1}) + (2)(1)$$
$$= a^{-1-1} + a^{-1} + 2a^{-1} + 2 = a^{-2} + 3a^{-1} + 2$$
$$= \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a} + 2$$

$$k)\ \frac{xy^{-1/2} + yx^{-1/2}}{x^{-1/2} - y^{-1/2}} = \frac{x \cdot \dfrac{1}{y^{1/2}} + y \cdot \dfrac{1}{x^{1/2}}}{\dfrac{1}{x^{1/2}} - \dfrac{1}{y^{1/2}}} = \frac{\dfrac{x}{y^{1/2}} + \dfrac{y}{x^{1/2}}}{\dfrac{y^{1/2} - x^{1/2}}{x^{1/2}y^{1/2}}}$$
$$= \frac{\dfrac{xx^{1/2}}{y^{1/2}} + \dfrac{yy^{1/2}}{x^{1/2}}}{\dfrac{y^{1/2} - x^{1/2}}{x^{1/2}y^{1/2}}} = \frac{\dfrac{x^{3/2} + y^{3/2}}{y^{1/2}x^{1/2}}}{\dfrac{y^{1/2} - x^{1/2}}{y^{1/2}x^{1/2}}}$$
$$= \frac{(x^{3/2} + y^{3/2})(y^{1/2} + x^{1/2})}{(y^{1/2}x^{1/2})(y^{1/2} - x^{1/2})} = \frac{x^{3/2} + y^{3/2}}{y^{1/2} - x^{1/2}}$$

Ejercicios.

I. Dar una expresión equivalente con radical.

1. $a^{2/3}$
2. $a^{3/4}$
3. $13^{2/3}$
4. $a^{1/2}b^{1/2}$
5. $4m^{2/5}$
6. $(4m)^{2/5}$
7. 5^{25}
8. 9^{5}
9. $8^{2/6}$

II. Dar una expresión equivalente con exponente fraccionario.

1. $\sqrt[3]{12^2}$
2. $\sqrt[4]{81x^3}$
3. $\sqrt[3]{6x^5y^4}$
4. $\sqrt[9]{a^2(b-c)^{18}}$
5. $\sqrt[3]{x^2}\ \sqrt{y^3}$
6. $\sqrt[4]{a+b}$
7. $\sqrt{x^2 - y^2}$
8. $\sqrt[3]{(2a-b)^2}$
9. $\sqrt[5]{32(a+b)^{10}}$

III. Efectuar las siguientes operaciones dando un resultado numérico sin exponentes negativos o cero. Usar las leyes de los exponentes si es necesario.

1. $8^{1/3}$
2. $25^{1/2}$
3. $32^{3/5}$
4. $16^{-1/2}$
5. $8^{-2/2}$
6. $4^{-1/2}$
7. $(-8)^{-1/3}$
8. $(-4)^{-1/2}$
9. $(-27)^{2/3}$
10. $(-125)^{4/3}$
11. $(9/16)^{-1/2}$
12. $(27/64)^{2/3}$
13. $(1/256)^{1/4}$
14. $(16/81)^{1/4}$
15. $(125/216)^{-2/3}$
16. $(8^{-1/2})^2$
17. $(2^{-6})^{1/3}$
18. $(5^{-1/2})^4$
19. $(16^{-1/2})^{1/2}$
20. $(64^{1/3})^{1/2}$
21. $\dfrac{2^{1/2}}{2^{1/3}}$
22. $\dfrac{3^{1/4}}{3^{1/2}}$
23. $\dfrac{5^{1/3}}{5^{1/4}}$
24. $\dfrac{4^{1/3}}{4^{1/2}}$
25. $\dfrac{6^{1/6}}{6^{1/5}}$
26. $\dfrac{2^{1/2}}{2^{1/3}}$
27. $\dfrac{3^{1/4}}{3^{1/2}}$
28. $5^{1/3}5^{1/4}$

29. $4^{-1/3}4^{-1/2}$
30. $6^{1/6}6^{1/5}$

IV. Efectuar las operaciones indicadas usando las leyes de los exponentes y simplificar, dejando las respuestas sin exponentes negativos o cero.

1. $(x^{-1/2})^2$
2. $(x^{1/4})^{-1/5}$
3. $(x^{1/2})^{1/2}$
4. $(b^{2/3})^{3/2}$
5. $(a^{-5})^{1/10}$
6. $(y^{1/10})^5$
7. $x^{4/3}x^{-3}$
8. $x^{1/4}x^{-1/5}$
9. $y^{1/2}y^{-1/4}y^{1/3}$
10. $x^{-2/3}x^{1/2}$
11. $x^{1/6}x^{-5/6}$
12. $a^{2/5}/a^{3/4}$
13. $b^{1/3}/b^{2/3}$
14. $x^{4/3}/x^{1/3}$
15. $x^{2/3}/x^{-1/2}$
16. $x^{-5/6}/x^{1/6}$
17. $(9a^{-4}b^2)^{1/2}$
18. $(64m^3n^{-9})^{-1/3}$
19. $(a^{1/2}b^{1/4})^2$
20. $(2x^{-1/2}y^{1/4})^4$
21. $(-3^{1/3}x^{2/3}y^{4/3})^3$
22. $(5ab^0)(a/b)^{-1/5}$
23. $(2x^{1/3}y)^3(3x^{1/2}2^{1/2})^2$
24. $(9a^{-4}b^2)^{1/2}(2ab)^{1/4}$
25. $\left(\dfrac{9a^{-4}b^2}{36}\right)^{1/2}$
26. $\left(\dfrac{125x^4y^3}{27x^2y^6}\right)^{1/3}$
27. $\left(\dfrac{3^{1/3}a^{3/2}}{2^{1/3}a^{1/2}}\right)^6$
28. $\left(\dfrac{2^5x^{10}y^{20}}{3^{-1}x^{15}y^{10}}\right)^{1/5}$

29. $\dfrac{5a^{1/3}}{a^{2/3}b^{-1/4}}$

30. $\dfrac{9^{1/2}x^{-2}y^{-3}}{25^{1/2}x^{1/2}y^{-1/3}}$

31. $\dfrac{16^{3/2}a^{1/4}b^{7/4}}{9^{1/2}a^{-3/4}b^{-1/4}}$

32. $\dfrac{4^{3/2}a^{1/5}b^{-3/4}}{8^{1/3}a^{-4/5}b^{+1/4}}$

V. Simplificar las siguientes expresiones dejando las respuestas sin exponentes negativos o cero.

1. $(x^{1/2} + y^{1/2})^2$
2. $(x^{1/2} + y^{1/2})^2(x^{1/2} - y^{1/2})$
3. $(x^{1/3} - y^{1/3})(x^{1/3} + y^{1/3})$
4. $(x + y^{1/2})^2$
5. $(x + y^{1/2})(x - y^{1/2})$
6. $(x + y^{1/2})^0$
7. $(x + y)^{-1/2}$
8. $(x^{1/3} - y^{1/3})^0$
9. $(x^{1/3} + y^{1/3})(x^{2/3} - x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$
10. $(x^{1/3} - y^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$
11. $(2 + x^{-2})(1 - x^{-2})$
12. $\dfrac{ab^{-1/2} + ba^{-1/2}}{a^{-1/2} + b^{-1/2}}$
13. $\dfrac{x^{-1/2} + y^{-1/2}}{(xy)^{-1/2}}$
14. $\dfrac{x^{-1/2}}{x^{-1/2} - y^{-1/2}}$
15. $\dfrac{x^{1/2} + y^{1/2}}{x^{-1/2} - y^{-1/2}}$

Sección 4.12
RADICALES
Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Enunciar y aplicar las leyes de los radicales.
2. Simplificar radicales.

Como los radicales pueden ser sustituidos por potencias, las operaciones con radicales pueden efectuarse utilizando las leyes de los exponentes, obteniendo las siguientes leyes de los radicales:

Sean x y y números reales, si las raíces n-ésimas de x y y son reales, las siguientes propiedades son verdaderas:

1. $\sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
2. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}},\ y \neq 0$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

Observaciones.

a) De la primera ley de los radicales se puede decir que la raíz n-ésima de un producto es el producto de la raíz n-ésima de cada factor:

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y}$$

b) De la segunda ley de los radicales se puede decir que la raíz n-ésima del cociente es el cociente de la raíz n-ésima del numerador entre la raíz n-ésima del denominador:

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}},\ y \neq 0$$

c) $\sqrt[mn]{x} = x^{\frac{1}{mn}} = x^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$

Así $\sqrt[mn]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$ o $\sqrt[mn]{x} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$

Simplificación de radicales cuyos radicandos son números naturales

Para simplificar radicales cuyos radicandos son números naturales se sigue el siguiente proceso:

1. Escribir el radicando como el producto de dos números, uno de los cuales sea el mayor número que es potencia perfecta para el índice dado.
2. Utilizar la ley de los radicales del producto $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y}$.
3. Determinar las raíces de los números que son potencias perfectas.

Observaciones.

a) Potencias perfectas son aquellas que son cuadrados perfectos o cubos perfectos o cuarta potencia perfecta, etcétera.

Los números 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81... son cuadrados perfectos ya que $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, etcétera.

Los números 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343... son cubos perfectos ya que $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[3]{125} = 5$, etcétera.

Los números 1, 16, 81, 256... son cuarta potencia perfecta ya que $\sqrt[4]{1} = 1$, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[4]{256} = 4$, etcétera.

b) La raíz cuadrada de cualquier cuadrado perfecto es un número entero no negativo, por ejemplo:

$\sqrt{36} = \sqrt{6^2}$, al transformarlo a exponente fraccionario se puede decir que $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6^{2/2} = 6^1 = 6$.

De manera similar, la raíz cúbica de un cubo perfecto es un número entero no negativo, por ejemplo:

$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3}$ al transformarlo a exponente fraccionario se puede decir que $^3 64 = \sqrt[3]{4^3} = 4^{3/3} = 4^1 = 4$.

c) Al proceso de simplificar el radicando se le conoce como eliminación de cuadrados perfectos o cubos perfectos, etcétera.

Ejemplos.

1. Se simplifica cada radical:

Para simplificar cada radical, primero se factorizará cada radicando en potencias perfectas, después se utilizará la ley de $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ o $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ y al final se simplificará.

a) $\sqrt{48} = \sqrt{(16)(3)} = \sqrt{16}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
b) $\sqrt{50} = \sqrt{25(2)} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
c) $\sqrt{108} = \sqrt{36(3)} = \sqrt{36}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
d) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27(3)} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$
e) $\sqrt[3]{256} = \sqrt[3]{64(4)} = \sqrt[3]{64}\sqrt[3]{4} = 4\sqrt[3]{4}$
f) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{(16)(2)} = \sqrt[4]{16}\sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$
g) $\sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8(2)}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8(2)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

Simplificación de radicales cuyos radicandos son variables

De manera similar a las potencias perfectas de números naturales, se puede hablar de potencias perfectas con variables y decir que x^n es una potencia perfecta si n es un múltiplo del índice del radical o, simplemente, si n es divisible entre el índice, por ejemplo:

$x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}, x^{12}\ldots$ son cuadrados perfectos ya que

$$\sqrt[2]{x^2} = x^{2/2} = x^1 = x \qquad \sqrt[2]{x^4} = x^{4/2} = x^2$$
$$\sqrt[2]{x^6} = x^{6/2} = x^3 = x \qquad \sqrt[2]{x^8} = x^{8/2} = x^4$$
$$\sqrt[2]{x^{10}} = x^{10/2} = x^5 \qquad \sqrt[2]{x^{12}} = x^{12/12} = x^6$$

$x^3, x^6, x^9, x^{12}, x^{15}, x^{18}\ldots$ son cubos perfectos ya que

$$\sqrt[3]{x^3} = x^{3/3} = x^1 = x \qquad \sqrt[3]{x^6} = x^{6/3} = x^2$$
$$\sqrt[3]{x^9} = x^{9/3} = x^3 \qquad \sqrt[3]{x^{12}} = x^{12/3} = x^4$$
$$\sqrt[3]{x^{15}} = x^{15/3} = x^5 \qquad \sqrt[3]{x^{18}} = x^{18/3} = x^6$$

$x^4, x^8, x^{12}, x^{16},\ldots$ son cuartas potencias perfectas ya que

$$\sqrt[4]{x^4} = x^{4/4} = x \qquad \sqrt[4]{x^8} = x^{8/4} = x^2$$
$$\sqrt[4]{x^{12}} = x^{12/4} = x^3 \qquad \sqrt[4]{x^{16}} = x^{16/4} = x^4$$

El proceso para simplificar radicales cuyos radicandos son variables es el siguiente:

1. Escribir cada variable como el producto de dos factores, uno de los cuales sea la máxima potencia perfecta de la variable para el índice dado.
2. Utilizar la ley de los exponentes $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$ para escribir el radical como producto de radicales. Se trata de colocar todas las potencias perfectas bajo el mismo radical.
3. Determinar las raíces de todas las potencias perfectas.

Ejemplos.

2. Se simplifica cada radical:

   a) $\sqrt[3]{x^7} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{x^6}\sqrt{x} = x^{6/3}\sqrt{x} = x\sqrt{x}$

   b) $\sqrt[3]{y^{14}} = \sqrt[3]{y^{12}y^2} = \sqrt[3]{y^{12}}\sqrt[3]{y^2} = y^{12/3}\sqrt[3]{y^2} = y^4\sqrt[3]{y^2}$

$c)\ \sqrt[4]{z^9} = \sqrt[4]{z^8 \cdot z} = \sqrt[4]{z^8}\sqrt[4]{z} = z^{8/4}\sqrt[4]{z} = z^2\sqrt[4]{z}$

$d)\ \sqrt[5]{x^{24}} = \sqrt[5]{x^{20}x^4} = \sqrt[5]{x^{20}}\sqrt[5]{x^4} = x^{20/5}\sqrt[5]{x^4} = x^4\sqrt[5]{x^4}$

$e)\ \sqrt[6]{y^{27}} = \sqrt[6]{y^{24}y^3} = \sqrt[6]{y^{24}}\sqrt[6]{y^3} = y^{24/6}y^{3/6} = y^4y^{12} = y^4\sqrt[2]{y}$

$f)\ \sqrt[7]{a^{16}} = \sqrt[7]{a^{14}a^2} = \sqrt[7]{a^{14}}\sqrt[7]{a^2} = a^{14/7}\sqrt[7]{a^2} = a^2\sqrt[7]{a^2}$

$g)\ \sqrt{a^{13}b^{15}} = \sqrt{a^{12}ab^{14}b} = \sqrt{a^{12}}\sqrt{b^{14}}\sqrt{ab} =$
$= a^{12/2}b^{14/2}\sqrt{ab} = a^6b^7\sqrt{ab}$

$h)\ \sqrt[3]{x^6y^{20}} = \sqrt[3]{x^6y^{18}y^2} = \sqrt[3]{x^6}\sqrt[3]{y^{18}}\sqrt[3]{y^2} =$
$= x^{6/3}y^{60/3}\sqrt[3]{y^2} = x^2y^6\sqrt[3]{y^2}$

$i)\ \sqrt[5]{x^6y^7z^4} = \sqrt[5]{x^5xy^5y^2z^4} = \sqrt[5]{x^5}\sqrt[5]{y^5}\sqrt[5]{xy^2z^4}$
$= xy\sqrt[5]{x^2yz^4}$

Simplificación de radicales cuyos radicandos es la combinación de números naturales y variables

El proceso para simplificar radicales será muy similar al explicado con números naturales y variables.

Ejemplos.

3. Se simplifica cada uno de los radicales:

$a)\ \sqrt[3]{32a^4b^5}\sqrt[3]{(16)(2)a^4b^4b} = \sqrt[3]{16}\sqrt[3]{a^4}\sqrt[3]{b^2}\sqrt[3]{b^2}$
$= 4a^{4/2}b^{2/2}\sqrt[3]{2b} = 4a^2b\sqrt[3]{2b}$

$b)\ \sqrt[3]{81x^7y^9} = \sqrt[3]{(27)(3)x^6xy^9} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{y^9}\sqrt[3]{y^9}\sqrt[3]{3x}$
$= 3x^{6/3}y^{9/3}\sqrt[3]{3x} = 3x^2y^3\sqrt[3]{3x}$

$c)\ \sqrt[4]{162x^2y^9z^{12}} = \sqrt[4]{(81)(2)x^2y^8yz^{12}}$
$= \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{y^8}\sqrt[4]{z^{12}}\sqrt[4]{2x^2}\,y = 3y^{8/4}z^{12/4}\sqrt[4]{2x^2y}$
$= 3y^2z^3\sqrt[4]{2x^2y}$

Racionalización de una fracción que posee radicales

La racionalización consiste en transformar el radicando en no fraccionario, y en multiplicar numerador y denominador por un factor de tal manera que se tenga una potencia n-ésima perfecta en el denominador.

Ejemplos.

4. Para cada ejercicio, se racionaliza el denominador:

$a)\ \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

Se multiplicó por $\sqrt{3}$ numerador y denominador para tener una raíz exacta en el denominador.

b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$ Multiplicamos por $\sqrt[3]{9}$ numerador y denominador ya que al multiplicar por $\sqrt[3]{3}$ se tiene $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Así $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{2\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{2\sqrt[3]{9}}{3}$

c) $\sqrt{\dfrac{a}{3b^3}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{3b^3}} = \dfrac{\sqrt{a}\sqrt{3b}}{\sqrt{3b^3}\sqrt{3b}} = \dfrac{\sqrt{3ab}}{\sqrt{9b^4}} = \dfrac{\sqrt{3ab}}{3b^2}$

d) $\dfrac{8}{\sqrt{5}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{8\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

Simplificar el índice de un radical

Simplificar el índice de un radical es transformar un radical a otro radical de menor índice. Para esto, se utiliza la propiedad siguiente:

$$\sqrt[nm]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$$

Ejemplos.

5. Se simplifica el índice del radical y, en caso necesario, se racionaliza.

a) $\sqrt[4]{\dfrac{25x^2}{4y^4}} = \sqrt[2]{\sqrt{\dfrac{25x^2}{4y^4}}} = \sqrt[2]{\dfrac{5x}{2y^2}} = \dfrac{\sqrt[2]{5x}}{\sqrt[2]{2y^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[2]{2}}{\sqrt[2]{2}} = \dfrac{\sqrt[2]{10x}}{\sqrt[2]{4y^2}} = \dfrac{\sqrt[2]{10x}}{2y}$

b) $\sqrt[6]{27x^6y^9z^{12}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{27x^6y^9z^{12}}} = \sqrt[2]{3x^{6/3}y^{9/3}z^{12/3}}$

$= \sqrt[2]{3x^2y^3z^4} = \sqrt[2]{3x^2y^2yz^4} = xyz^2\sqrt[2]{3y}$

c) $\sqrt[6]{16x^4y^8z^{10}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{16x^4y^8z^{10}}} = \sqrt[3]{4x^2y^4z^5}$

$= \sqrt[3]{4x^2y^3yz^3z^2} = yz\sqrt[3]{4x^2yz^2}$

Otra operación para realizar es un factor que multiplica a un radical incluido dentro de él. Esta operación es inversa a la simplificación de radicales.

Para introducir un factor que multiplica a un radical se eleva dicho coeficiente a la potencia que indique el índice del radical y se multiplica por el radicando.

Ejemplos.

6. Se introduce el factor que multiplica al radical dentro de él.

   a) $3\sqrt[2]{x} = 3\sqrt[2]{x} = 9x$

   b) $2x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(2x)^3}\, x = \sqrt[3]{8x^3 x} = \sqrt[3]{8x^4}$

   c) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^4 x^2} = \sqrt[4]{\frac{16}{81}x^2}$

   d) $5x^2y\sqrt{5} = \sqrt[2]{(5x^2y)^2(5)} = \sqrt[2]{25x^4y^2(5)} = \sqrt{125x^4y^2}$

Ejercicios.

I. Dar la raíz principal para cada uno de los siguientes ejercicios:

1. $\sqrt{49}$
2. $\sqrt{9}$
3. $\sqrt{\frac{4}{9}}$
4. $\sqrt[3]{27}$
5. $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$
6. $\sqrt[4]{(-1)^2}$
7. $\sqrt[5]{32}$
8. $\sqrt[5]{243}$
9. $\sqrt[2]{x^{16}}$
10. $\sqrt[2]{a^{20}}$
11. $\sqrt[3]{y^{21}}$
12. $\sqrt[3]{z^{27}}$
13. $\sqrt[4]{x^{24}}$
14. $\sqrt[4]{a^{32}}$
15. $\sqrt[5]{y^{30}}$
16. $\sqrt[5]{z^{50}}$
17. $\sqrt[2]{x^{24}y^{30}}$
18. $\sqrt[4]{x^8y^{16}}$
19. $\sqrt[4]{x^8y^{16}}$

20. $\sqrt[5]{a^{45}b^5}$
21. $\sqrt[3]{25x^2}$
22. $\sqrt[3]{-8b^3}$
23. $\sqrt[3]{144c^{10}}$
24. $\sqrt[3]{8a^3b^6c^9}$
25. $\sqrt[5]{-32a^{10}b^5}$
26. $\sqrt[3]{\frac{125}{x^6}}$
27. $\sqrt[4]{\frac{16a8}{81b^{12}}}$
28. $\sqrt{81x^4y^{12}}$

II. Simplifica cada radical:

1. $\sqrt{27}$
2. $\sqrt[3]{24}$
3. $\sqrt[4]{162}$
4. $\sqrt[3]{96}$
5. $\sqrt[3]{54}$
6. $\sqrt[3]{-81}$
7. $\sqrt{75}$
8. $\sqrt[4]{243}$
9. $\sqrt[3]{108}$
10. $\sqrt{7/4}$
11. $\sqrt[3]{\frac{108}{8}}$
12. $\sqrt[4]{\frac{3125}{16}}$
13. $\sqrt[4]{32a^5b^6}$
14. $\sqrt[3]{45a^7b^4c^{10}}$
15. $\frac{1}{8}\sqrt{64x^5y^9}$
16. $3\sqrt[3]{375a^6b^8}$
17. $8\sqrt[4]{96x^8y^{10}}$
18. $9a\sqrt{192a^7b^{12}}$

III. Racionalizar y simplificar cada uno de los siguientes ejercicios:

1. $\sqrt{\frac{75}{2}}$
2. $\sqrt{\frac{1}{5}}$
3. $\sqrt{\frac{1}{24}}$
4. $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$
5. $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$
6. $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$
7. $\sqrt{\frac{4x^2}{3y^3}}$
8. $x^2\sqrt[3]{\frac{125}{4a^2}}$
9. $6\sqrt{\frac{9x}{5y^3}}$
10. $5\sqrt{\frac{5x^3}{24y^2}}$
11. $\sqrt[3]{\frac{27}{9a^2}}$
12. $3ab\sqrt[4]{\frac{256}{5a^3b}}$
13. $\sqrt[3]{\frac{1}{2ab}}$
14. $\sqrt[3]{\frac{3x^3y^3}{2}}$
15. $\sqrt[4]{\frac{4}{4x^8y^{10}}}$
16. $\frac{3}{\sqrt{2}}$
17. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
18. $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$

IV. Simplificar el índice del radical:

1. $\sqrt[4]{16}$
2. $\sqrt[6]{16}$
3. $\sqrt[9]{27}$
4. $\sqrt[4]{\frac{48}{9}}$
5. $\sqrt[6]{8a^3}$
6. $\sqrt[6]{64x^3}$
7. $\sqrt[4]{\frac{9x^2}{y^2}}$
8. $\sqrt[6]{25x^8y^4}$
9. $\sqrt[6]{27a^6b^9c^3}$
10. $\sqrt[4]{\frac{25z^2}{16x^2}}$
11. $\sqrt[8]{16x^4y^4}$
12. $\sqrt[9]{64x^9y^{12}z^6}$

V. Introducir en los siguientes ejercicios el factor que multiplica al radical dentro de él.

1. $5\sqrt{3}$
2. $4\sqrt{5}$
3. $6x\sqrt{y}$
4. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
5. $5x\sqrt{2x^2}$
6. $4xy^2\sqrt{5}$
7. $xy^3\sqrt[3]{xy^2}$
8. $4z^3\sqrt{3z^2}$
9. $2x\sqrt[4]{8xy^2}$
10. $\frac{2x}{y}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$
11. $\frac{3a^2}{5}\sqrt[3]{ab}$
12. $\frac{2}{z}\sqrt[3]{\frac{6x}{5}}$

Sección 4.13

OPERACIONES CON RADICALES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Simplificar radicales semejantes.
2. Sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones con radicales.

Dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando y no son semejantes si difieren en el radicando o en el índice.

Ejemplos. Se indica si los radicales son semejantes o no.

1.

a)	$2\sqrt[2]{3}$	y	$-3\sqrt[2]{3}$	Son semejantes
b)	$4\sqrt{2}$	y	$3\sqrt{2}$	Son semejantes
c)	$4\sqrt{a}$	y	$2\sqrt{a}$	Son semejantes
d)	$5\sqrt[3]{xy}$	y	$3\sqrt[3]{xy}$	Son semejantes
e)	$\sqrt{4}$	y	$\sqrt[3]{4}$	No son semejantes, difieren en el índice
f)	$\sqrt{5}$	y	$\sqrt{6}$	No son semejantes, difieren en el radicando
g)	$\sqrt{a}$	y	$\sqrt{3a}$	No son semejantes, difieren en el radicando
h)	$\sqrt{a}$	y	$\sqrt[4]{b}$	No son semejantes, difieren en el índice y en el radicando
i)	$\sqrt[4]{ab}$	y	$\sqrt[4]{a^2b}$	No son semejantes, difieren en el índice y en el radicando.

Para sumar o restar dos o más radicales, éstos deben ser semejantes y para efectuar la operación se reducen como términos semejantes, se encuentra la suma algebraica de los coeficientes y se coloca como coeficiente de la parte radical.

Ejemplos.

2. Se efectúan las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (1 + 2)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = (5 - 7)\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{a} + 2\sqrt{a} = (3 + 2)\sqrt{a} = 5\sqrt{a}$

Observación. Si los radicales no son semejantes tal vez se puedan convertir a semejantes si se simplifican para luego efectuar las sumas o restas.

$$d)\ 3\sqrt{18} - 2\sqrt{32} = 3\sqrt{9\cdot 2} - 2\sqrt{16\cdot 2} = 3\sqrt{9}\sqrt{2} - 2\sqrt{16}\sqrt{2}$$
$$= 3(3)\sqrt{2} - 2(4)\sqrt{2} = 9\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$e)\ 5\sqrt{12} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{50} + \sqrt{8} = 5\sqrt{4(3)} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{25(2)} + \sqrt{4(2)}$$
$$= 5\sqrt{4}\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{25}\sqrt{2} + \sqrt{4}\sqrt{2} = 5(2)\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 2(5)\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$
$$= 10\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 10\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (10 - 3)\sqrt{3} + (-10 + 2)\sqrt{2}$$
$$= 7\sqrt{3} - 8\sqrt{2}$$

$$f)\ 2\sqrt{2a} - \sqrt{8a^3} + \sqrt[3]{4a^2}$$
$$= 2\sqrt{2a} - \sqrt{4\cdot 2a^2a} + \sqrt[3]{\sqrt{4a^2}} = 2\sqrt{2a} - \sqrt{4a^2}\sqrt{2a} + \sqrt[3]{2a}$$
$$= 2\sqrt[3]{2a} - 2a\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{2a} = \sqrt[3]{2a}(2 - 2a + 1)$$
$$= \sqrt[3]{2a}(3 - 2a) = (3 - 2a)\sqrt[3]{2a}$$

$$g)\ \sqrt{a^2} + \sqrt{a^2b} + 2a\sqrt{b} = \sqrt{a^2} + \sqrt{a^2}\sqrt{b} + 2a\sqrt{b}$$
$$= a^{2/2} + a^{2/2}\sqrt{b} + 2a\sqrt{b} = a + a\sqrt{b} + 2a\sqrt{b} = a + 3a\sqrt{b}$$

Para multiplicar o dividir radicales se utilizan las leyes de los radicales:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Observación. Se puede multiplicar o dividir dos radicales siempre y cuando ambos tengan el mismo índice.

Ejemplos.

3. Se realiza la operación indicada y se simplifica el resultado:

$$a)\ \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{2(3)} = \sqrt{6}$$

$$b)\ \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$$

$$c)\ \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$d)\ \sqrt{2a}\sqrt{5ab} = \sqrt{(2a)(5ab)} = \sqrt{10a^2b} = \sqrt{a^2}\sqrt{10b} = a\sqrt{10b}$$

e) $(2\sqrt[3]{2x})(3\sqrt[3]{4x^2y}) = (2)(3)\sqrt[3]{(2x)(4x^2y)} = 6\sqrt[3]{8x^3y} = 6\sqrt[3]{8x^3}\sqrt[3]{y}$
$= 6\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{y} = 6(2)x^{3/3}\sqrt[3]{y} = 12x\sqrt[3]{y}$

f) $\sqrt{2}(\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$

Se utilizará la propiedad distributiva para realizar el producto:

$$\sqrt{2}(\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) = \sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}(2\sqrt{5}) = \sqrt{(2)(2)} + 2\sqrt{2(5)} = \sqrt{4} + 2\sqrt{10}$$
$$= 2 + 2\sqrt{10}$$

g) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

Se utilizará el producto notable binomio al cuadrado:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 = \sqrt{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2/3} + \sqrt{3}\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{4} + 2\sqrt{6} + \sqrt{9} = 2 + 2\sqrt{3} + 3 = 5 + 2\sqrt{3}$$

h) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

Son binomios conjugados y se utilizará el producto notable que ya conocemos:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}\sqrt{a} - \sqrt{b}\sqrt{b}$$
$$= \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = a^{2/2} - b^{2/2} = a - b$$

i) $\sqrt{3 + \sqrt{2}}\sqrt{3 + \sqrt{2}} = \sqrt{(3 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \sqrt{9 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{4}}$
$= \sqrt{9 + 6\sqrt{2} + 2} = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

j) $2\sqrt{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{2^{\frac{2}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{2^{\frac{2}{2} + \frac{1}{2}}} = 2\sqrt{2^{\frac{3}{2}}}$
$= 2(2^{3/2})^{1/2} = 2(2^{3/4}) = 2\sqrt[4]{2^3} = 2\sqrt[4]{8}$

Racionalización de una fracción en donde el denominador es un binomio y al menos uno de los términos del binomio es una raíz

Para racionalizar el denominador se multiplicará el numerador y denominador por el conjugado del denominador para obtener una diferencia de cuadrados y eliminar el radical del denominador.

Ejemplos.

4. Se racionaliza el denominador:

a) $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

Se multiplicará numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{(2)^2+2(2)(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2}{(2)^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{4+4\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{4+4\sqrt{3}+\sqrt{9}}{4-\sqrt{9}}$$

$$= \frac{4+4\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4-3} = \frac{7+4\sqrt{3}+\sqrt{9}}{1}$$

$$= 7+4\sqrt{3}$$

b) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ Se multiplicará numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^2-(1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x^2}-1}$$

$$= \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(x-1)} = \sqrt{x}-1$$

c) $$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} = \frac{h}{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})} \cdot \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}$$

$$= \frac{h(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2} = \frac{h(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{(x+h)-(x)}$$

$$= \frac{h(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{x+h-x} = \frac{h(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{h}$$

$$= \sqrt{x+h}-\sqrt{x}$$

Multiplicación de radicales con diferente índice

Se considera lo siguiente:

$$\sqrt[nc]{a^c} = a^{\frac{c}{nc}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Por lo que podemos afirmar que:

$$\sqrt[nc]{a^c} = \sqrt[n]{a}$$

Con esta propiedad se puede transformar un radical con un índice n a otro de índice nc y elevar el radicando al exponente c.

Ejemplos.

4. Convertiremos cada radical a otro de índice mayor:

   a) $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4(2)]{2^2} = \sqrt[8]{4}$

   b) $= \sqrt[2]{5} = \sqrt[2(3)]{5^3} = \sqrt[6]{125}$

   c) $\sqrt[2]{8} = \sqrt[2(5)]{8^5} = \sqrt[10]{8^5}$

   d) $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3(3)]{3^3} = \sqrt[9]{27}$

Para multiplicar o dividir radicales de diferente índice, deberán transformase a radicales del mismo índice y que éste sea el mínimo común múltiplo de los índices de los radicales dados.

Ejemplos.

5. Se efectúan las siguientes operaciones:

   a) $\sqrt[2]{5}\ \sqrt[3]{3}$

   El m.c.m. de los índices 2 y 3 es 6 y se transformará cada radical a que su índice sea el 6.

   $$\sqrt[2]{5} = \sqrt[2\cdot3]{5^3} = \sqrt[6]{125} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{3} = \sqrt[3\cdot2]{3^2} = \sqrt[6]{9}$$

   Así

   $$\sqrt[2]{5}\ \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{125}\ \sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{(125)(9)} = \sqrt[6]{1125}$$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}}$

El m.c.m. de los índices de los radicales 4 y 3 es el 12 y se transformará cada radical a que su índice sea el 12.

$$\sqrt[4]{2} = \sqrt[4\cdot 3]{2^3} = \sqrt[12]{8} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[3\cdot 4]{2^4} = \sqrt[12]{16}$$

Así

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[12]{8}}{\sqrt[12]{16}} = \sqrt[12]{\frac{8}{16}} = \sqrt[12]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$$

Ejercicios.

I. Efectuar las siguientes operaciones y simplificar:

1. $\sqrt{3}\ 2 - \sqrt{2}\ 2$
2. $5\sqrt[3]{6} + 8\sqrt[3]{8}$
3. $2\sqrt{8} + 3\sqrt{8} - \sqrt{8}$
4. $4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3$
5. $6\sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{15} - 8\sqrt[3]{15}$
6. $\sqrt[4]{5} + 2\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5}$
7. $5\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$
8. $3\sqrt{y} - 2\sqrt{y}$
9. $4\sqrt{a} - \sqrt{a} + 3$
10. $2\sqrt{3} - \sqrt{a} + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{a}$
11. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$
12. $8 - 7\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x}$
13. $\sqrt{12} - \sqrt{8}$
14. $\sqrt{30} + \sqrt{75}$
15. $2\sqrt{160} - \sqrt{250}$
16. $\sqrt{108} - \sqrt{128}$
17. $\sqrt{32} - \sqrt{18} + \sqrt{50}$
18. $2\sqrt{20} + 5\sqrt{45} - \sqrt{8}$
19. $\sqrt{48} + 7\sqrt{27} - \sqrt{50}$
20. $2\sqrt[3]{24} - 5\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{192}$
21. $\sqrt{27x^3} - 2\sqrt{3x^3} - \sqrt{48x}$
22. $\sqrt{ab} + \sqrt{9a^3b} + 3\sqrt{4ab^3}$
23. $\sqrt[3]{48a^4b} - \sqrt[3]{27a^8b^3} - 2\sqrt[3]{108a^{10}b^5}$
24. $\sqrt[3]{2xy} + 3\sqrt[3]{16x^4y^7} - \sqrt[3]{128x^{10}y}$

25. $5\sqrt[3]{16x} - \sqrt[3]{54x^4} + \sqrt[3]{16x}$
26. $2\sqrt[4]{32y^5} + 3\sqrt[4]{81y^9} - 4\sqrt[4]{y^{13}}$
27. $3\sqrt{5a} - \sqrt[4]{25a^2} + \sqrt[6]{125a^3}$
28. $2\sqrt[3]{2ab} + 3\sqrt[6]{4a^2b^2} + 4\sqrt[9]{8a^3b^3}$
29. $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$
30. $\sqrt{\frac{a}{3}} + \sqrt{\frac{1}{2a}}$
31. $\sqrt{\frac{5b}{4}} - \sqrt{\frac{5}{a^2b}} + \sqrt{\frac{45}{a^2b}}$
32. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{48b}{a}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27a}{b}}$
33. $2\sqrt{15}\sqrt{27}$
34. $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}$
35. $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}$
36. $\sqrt{3}\sqrt{4}\sqrt{2}$
37. $\sqrt{2}\sqrt[4]{9}$
38. $\sqrt[3]{5}\sqrt{2}\sqrt[4]{4}$
39. $\sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{10})$
40. $\sqrt{3}(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{16})$
41. $(\sqrt{3} - \sqrt{4})^2$
42. $(\sqrt{3} - \sqrt{4})(\sqrt{3} + \sqrt{4})$
43. $(2\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$
44. $(2\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$
45. $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4})^3$
46. $(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})$
47. $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$
48. $\sqrt{6 + \sqrt{11}}\sqrt{6 + \sqrt{11}}$
49. $\sqrt{3 - \sqrt{5}}\sqrt{3 + \sqrt{5}}$
50. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{9}}$
51. $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{44}}$
52. $\frac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt{2}}$

53. $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}}$

54. $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{5}}$

55. $\sqrt{9\sqrt{8}}$

56. $\sqrt{9\sqrt{8\sqrt{4}}}$

57. $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{9}}}$

58. $\dfrac{5\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{\sqrt{4}}$

59. $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$

60. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}$

61. $\dfrac{8\sqrt{18}-3\sqrt{50}}{\sqrt[4]{4}}$

62. $\dfrac{5}{\sqrt{5}-5}$

63. $\dfrac{3-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}$

64. $\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$

65. $\dfrac{\sqrt{8}}{5+\sqrt{3}}$

66. $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

67. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

68. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

69. $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

70. $\dfrac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$

71. $\dfrac{\sqrt{a-b}}{9-\sqrt{a-b}}$

72. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

73. $\dfrac{x+1}{3-\sqrt{x+10}}$

74. $\dfrac{x-2}{3-\sqrt{2x+5}}$

75. $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

76. $\dfrac{x}{2-\sqrt{4-x}}$

77. $\dfrac{h-9}{\sqrt{h}-3}$

78. $\dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$

79. $\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+1}$

80. $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

81. $\sqrt{x^2\sqrt{x^2}}$

82. $\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2}}$

83. $\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3}}}$

Sección 4.14

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Enunciar el método de demostración de inducción matemática.
2. Explicar qué tipo de problemas se resuelven por inducción matemática.
3. Aplicar el método de inducción matemática en la resolución de problemas.

Desde muy pequeños, los niños descubren la ley de la gravedad tan sólo con observar varias ocasiones que, si sueltan un juguete, éste cae hacia el suelo. Una familia decide que el restaurante de mariscos en la localidad, después de muchas veces de haber experimentado la sensación de una buena comida. Los estudiantes de preparatoria deciden aceptar una ley física como verdadera después de observar, en el laboratorio, el cumplimiento de dicha ley en repetidos experimentos.

Los niños, la familia y los preparatorianos han razonado haciendo uso de lo que llamamos razonamiento inductivo. Éste consiste en aceptar como

verdadero un principio general después de haber observado, en casos particulares, que dicho principio se cumple. En esta unidad estudiaremos un método de prueba que formaliza el pensamiento inductivo.

En Matemáticas, como resultado de diversos problemas prácticos, tenemos necesidad de establecer proposiciones abiertas cuantificadas universalmente y con dominio de la variable en el conjunto de los naturales (N). Es decir, tenemos proposiciones del tipo siguiente:

Para toda n, p (n) $(n \in N)$ que se lee: para todo n la proposición abierta p (n) se cumple y el dominio de n es el conjunto de los naturales.

Ejemplos.

1. Para toda x, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2x - 1) = x^2$
2. Para toda x, $2^{2^x} + 1$ es un número primo $(x \in N)$
3. Todo número natural impar diferente de 1 es igual a la suma de un número primo y el doble del cuadrado de un entero.
4. Si tenemos que $U_1 = 1$, $U_2 = 2$, . . . , $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ entonces, para toda $n \in N$

$$U_n < (7/4)^n$$

5. La suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados es $[\ 180\ (n - 2)\ ]^\circ$

6. $$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\ (n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$$

Podríamos pensar que el método exhaustivo sería un método de demostración para este tipo de proposiciones. Esto es imposible, porque el dominio de la variable (N) es un conjunto infinito.

También podríamos pensar que la proposición es válida con sólo probar que ella es verdadera para algunos valores de la variable y concluir que la proposición siempre es verdadera.

Trateremos de probar algunas de las proposiciones anteriores usando este razonamiento inductivo.

En el ejemplo 2 tenemos:

Para toda x, $2^{2^x} + 1$ es un número primo $(x \in N)$
para $x = 1$ tenemos $2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$, que es primo.
para $x = 2$ tenemos $2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17$, que es primo.
para $x = 3$ tenemos $2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 256 + 1 = 257$, que es primo.

Sin embargo, si se toma $x = 5$ tenemos:

$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 =$ 4,294,967,297, que no es primo porque:
4,294,967,297 = (641) (6,700,417).

por lo tanto, la proposición es falsa.

En el ejemplo 3 tenemos:

Todo número natural impar diferente de 1 es igual a la suma de un número primo con el doble del cuadrado de un entero.

$$
\begin{aligned}
3 &= 3 + 2.0^2 \\
5 &= 5 + 2\,0^2 \\
7 &= 7 + 2.0^2 \\
9 &= 7 + 2\,1^2 \\
11 &= 11 + 2.0^2 \\
13 &= 13 + 2.0^2 \\
15 &= 13 + 2.1^2 \\
17 &= 17 + 2.0^2 \\
23 &= 23 + 2.0^2 \\
25 &= 23 + 2.1^2 \\
27 &= 19 + 2.2^2 \\
29 &= 29 + 2.0^2 \\
31 &= 31 + 2.0^2 \\
33 &= 31 + 2.1^2 \\
35 &= 17 + 2.3^2
\end{aligned}
$$

Y podemos continuar este proceso, sin embargo, se puede probar que 5,777 es un número impar que no satisface la proposición de donde la proposición es falsa. Entonces podemos decir que este razonamiento inductivo no es en sí mismo un método de demostración, sin embargo, basados en él, estableceremos un método que llamaremos el método de *inducción matemática*.

Antes consideremos la siguiente situación ideal:

Tenemos una fila innumerable de automóviles en una pista, si suponemos que al mover el auto que se encuentra en el lugar K, éste moverá al siguiente auto, es decir, moverá al que esté en el lugar $K + 1$, y si sabemos que el primer auto fue movido, entonces, todos los autos se mueven.

La idea que se da en esta situación puede formalizarse haciendo uso del quinto axioma de los números naturales. Recordemos lo que nos dice este axioma:

Si $K \in N$, es tal que:

1. $1 \in K$

2. Si $k \in K$, entonces $(k + 1) \in K$

Entonces concluimos que $K = N$

Aplicaremos este axioma para probar la validez de cada proposición del tipo: para toda n, $p\ (n)$; $n \in N$.

Sea $K = \{\ n \in N \mid p\ (n)$ es verdadera $\} = \{$ Naturales donde $p\ (n$ es verdadera $\}$

$K \subset N$.

Si podemos probar que $1 \in K$ y si $k \in K$, entonces $(k + 1) \in K$, entonces $K = N$.

Esta conclusión nos dice que la proposición $p\ (n)$ es verdadera para todo número natural, es decir, esto nos proporciona un método de demostración para proposiciones abiertas cuantificadas universalmente y con variable en los números naturales (para toda n, $p\ (n)$: $n \in N$).

Este método de inducción nos dice que si la proposición $p\ (n)$ es verdadera para $n = 1$ y si también lo es para $n = k + 1$ siempre que lo sea para $n = k$, podemos concluir que $p\ (n)$ es verdadera para toda $n \in N$.

Es decir, este método consiste en dos pasos:

1. $p\ (1)$ es verdadera
2. Si $p\ (n)$ es verdadera para $n = k$, entonces $p\ (n)$ debe ser verdadera para $n = k + 1$.

Ejemplos.

7. $p\ (n) : 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

a) Si $n = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} 2\ (1)\quad & 1 = 1^2 \\ 2\quad & 1 = 1^2 \\ & 1 = 1 \end{aligned}$$

$p\ (1)$ es verdadera.

b) Supongamos que $p\ (n)$ es verdadera para $n = k$, es decir,

$p\ (k) : 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k^2$.

Ahora, usando esta suposición probaremos que $p\ (k + 1)$ es verdadera.

$$\begin{aligned} p\ (k + 1) : 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + \mid 2\ (k + 1) - 1 \mid \\ = k^2 + 2k + 2 - 1 \\ = k^2 + 2k + 1 \\ = (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Y así tenemos que:

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + [\, 2(k + 1) - 1\,] = (k + 1)^2$

De donde $p\,(n)$ es verdadera para todo n.

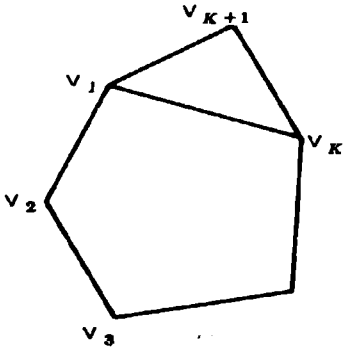
8. $p\,(n)$: La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es $[\, 180\,(n - 2)\,]^\circ$, para toda $n \geq 3$.

Llamaremos S_n a la suma de los ángulos interiores del polígono convexo de n lados.

a) Para $n = 3$ tenemos:
$[\, 180\,(3 - 2)\,]^\circ = [\, 180\,(1)\,]^\circ = 180^\circ = S_3$
de donde $p\,(3)$ es verdadera.

b) Supongamos que $p\,(k)$ es verdadera, entonces $S_k = [\, 180\,(k - 2)\,]^\circ$
Ahora probaremos que $p\,(k + 1)$ es verdadera usando el hecho de que $p\,(k)$ es verdadera.

$p\,(k + 1)$: Consideremos un polígono convexo de $(k + 1)$ lados como se muestra en la gráfica



Tracemos el segmento $V_1\ V_k$ para que el polígono quede dividido en el triángulo $V_1\ V_{k+1} V_k$ y un polígono convexo de k lados.

Ahora $S_{k+1} = S_k + S_3$
$= [\, 180\,(k - 2)\,]^\circ + 180^\circ$
$= [\, 180\,(k - 2 + 1)\,]^\circ$
$= [\, 180\,((k + 1) - 2)\,]^\circ$

de donde la proposición $p\,(n)$ es verdadera para toda $n \in N$.

9 $p(n)$ $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

a) $p(1)$ $\frac{1}{(1)(1+1)}=\frac{1}{1(2)}=\frac{1}{2}$

suponganos que es verdadera para $n=k$

b) $p(k)$ $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

ahora probaremos que es verdadera para $n=k+1$

$p(k+1)$ $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}$

$+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}$

$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$

entonces $p(n)$ es verdadera para toda $n\in N$

10 $p(n)$ $4^{2n}-1$ es divisible por 4

a) Si $n=1$, tenemos

$4^{2(1)}-1=9-1=8$ y es divisible por 4 por lo que $p(1)$ es verdadera

b) Supongamos que $p(n)$ es verdadera si $n=k$

o sea

$(4^{2k}-1)$ es divisible por 4 lo cual significa que existe un entero s tal que

$4^{2k}-1=4s$

o $4^{2k}=1+4s$

Ahora usando esta suposición probaremos que $p(k+1)$ es verdadera

$4^{2(k+1)}-1=4^{2k}4^2-1$

$=9(4^{2k})-1$

$=9(1+4s)-1$ (utilizando la hipótesis)

$= 9 + 36x - 1$
$= 8 + 36x$
$= 4(2 + 9x)$ que es divisible por 4, ya que x es entero.

Ejercicios.

1. En cada uno de los problemas siguientes use Inducción Matemática para probar las proposiciones propuestas.

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n}{2}(3n - 1)$

c) $3 + 6 + 9 + \cdots + 3n = \dfrac{3}{2} n(n + 1)$

d) $5 + 10 + 15 + \cdots + 5n = \dfrac{5}{2} n(n + 1)$

e) $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d]$
$= \dfrac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$

f) $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$

g) $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \dfrac{3}{2} (3^n - 1)$

h) $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{n-1} = \dfrac{1}{4} (5^n - 1)$

i) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$

j) $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

k) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n}{3} (4n^2 - 1)$

l) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2}{4} (n + 1)^2$

m) $(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \dfrac{n^2}{4} (n + 1)^2$

n) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2 (2n^2 - 1)$

ñ) $1 + 3 + 6 + \cdots + \dfrac{n}{2} (n + 1) = \dfrac{n}{6} (n + 1)(n + 2)$

o) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \dfrac{n}{3} (n + 1)(n + 2)$

p) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n + 2) = \dfrac{n}{6} (n + 1)(2n + 7)$

q) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n + 1)(n + 2)$
$= \dfrac{n}{4} (n + 1)(n + 2)(n + 3)$

r) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

s) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$

$= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

t) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n\,2^n = (n-1)\,2^{(n+1)} + 2$

u) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + n(2n-1)^2$

$= \frac{n}{6}(n+1)(6n^2 - 2n - 1)$

v) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-1)\,3^n = (n-1)\,3^{n+1} + 3$

w) $2^{4n} - 1$ es divisible entre 15.

x) $2^{2n} + 5$ es divisible entre 3.

y) $3^{2n} + 7$ es divisible entre 8.

Sección 4.15

TEOREMA DEL BINOMIO

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir los conceptos: $n!$ y $\binom{n}{R}$
2. Dados n y R, calcular: $\binom{n}{R}$
3. Utilizar el teorema del binomio en el desarrollo de un binomio elevado a una potencia.
4. Encontrar cualquiera de los términos en $(a+b)^n$ para cualquier a, b y n sin necesidad de efectuar el desarrollo.

Para formarnos una idea de la estructura del desarrollo de $(a+b)^n$, donde $n \in$ Enteros positivos, escribiremos el resultado para los primeros 5 valores de n, que se obtuvieron por multiplicación directa.

$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Observemos que cada uno de estos desarrollos tienen las siguientes características:

1. El número de términos es $(n+1)$, es decir, una unidad más que el exponente del binomio.

2. En el primer término, el exponente de a es n. En cada uno de los términos siguientes, decrece una unidad.
3. La b aparece por vez primera en el segundo término, con exponente 1; su exponente aumenta de unidad en unidad en cada uno de los términos siguientes.
4. La suma de los exponentes de a y b es igual a n en cualquiera de los términos.
5. El coeficiente del primer término es la unidad y el del segundo término es n.
6. Si en cualquiera de los términos, el coeficiente se multiplica por el exponente de a y este producto se divide entre el exponente de b aumentado en 1, el resultado es el coeficiente del siguiente término.

Existe una fórmula para el desarrollo de $(a + b)^n$, donde n es un entero positivo cualquiera, que es conocida como *fórmula del binomio*; antes de escribirla y demostrarla enunciaremos dos definiciones que son necesarias.

Definición. Si n es entero no negativo definimos n ! que se lee "n factorial" o "factorial de n" como:

$$n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

Observación. O ! se define como 1, o sea 0 ! = 1, para encontrar un significado a esto observemos lo siguiente:

$$n\,! = (n)\,(n-1)\,!$$

Y si $n = 1$

$$1\,! = 1\,(0)\,!$$
$$1 = 1\,(1)$$

y para que esto sea válido, se establece que:

$$0\,! = 1$$

Ejemplos.

1. $5\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
2. $3\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
3. $4\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
4. $n\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots\cdots\cdots (n-1)\,(n)$
5. $(n \quad 1)\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots\cdots\cdots (n-2)\,(n-1)$

Definición. El símbolo $\binom{n}{R}$, donde n y R son enteros mayores o iguales que cero y n mayor o igual a R, se define por:

$$\binom{n}{R} = \frac{n!}{(n-R)!\,R!}$$

y se conocen como *números combinatorios*.

Ejemplos.

6. $\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2!\,(1\cdot 2)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1\cdot 2)(1\cdot 2)} = 6$

7. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1$

8. $\binom{4}{4} = \frac{4!}{(4-4)!\,4!} = \frac{4!}{0!\,4!} = \frac{1}{0!} = 1$

9. $\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{n!} = 1$

Tomando en cuenta esta última definición, podemos reescribir los primeros 5 desarrollos de $(a+b)^n$:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$$

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$$

Observamos que los coeficientes de los desarrollos para cualquier n son de la forma:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$

Teorema del binomio

Sea n entero positivo.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$\cdots + \binom{n}{R-1} a^{n-R+1} b^{R-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Observación. El término de orden R o el término que está en el lugar R es:

$$\binom{n}{R-1} a^{n-R+1} b^{R-1}$$

que se conoce como término general.

Demostración.

Puesto que debemos demostrar el teorema para todos los valores de n, emplearemos la inducción matemática.

La fórmula se verifica para $n = 1$ aunque ya la hemos verificado para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5.

Ahora debemos demostrar la verdad del segundo caso del principio de inducción matemática. En éste debemos demostrar que: $\forall\ K \geqslant 1$, si el coeficiente de $a^{K-R}\ b^R$ en el desarrollo de $(a + b)^K$ es $\binom{K}{R}$ el coeficiente de $a^{K+1-R} b^R$, en el desarrollo de $(a + b)^{K+1}$ debe ser $\binom{K+1}{R}$. Así pues,

$$(a+b)^K = a^K + \cdots + \binom{K}{R-1} a^{K-R+1} b^{R-1} + \binom{K}{R} a^{K-R} b^R + \ldots + b^K.$$

Ahora, $(a + b)^{K+1} = (a + b)^K (a + b)$. O sea:

$$[\, a^K + \cdots + \binom{K}{R-1} a^{K+1-R} b^{R-1} + \binom{K}{R} a^{K-R} b^R + \ldots + b^K \,](a+b)$$

$$= [\, a^{K+1} + \cdots + \binom{K}{R-1} a^{K+2-R} b^{R-1} + \binom{K}{R} a^{K+1-R} b^R$$

$$+ \cdots + ab^K \,] + [\, a^K b + \cdots + \binom{K}{R-1} a^{K+1-R} b^R + \binom{K}{R} a^{K-R} b^{R+1}$$

$$+ \cdots + b^{K+1} \,] = a^{K+1} + \cdots + [\, \binom{K}{R} + \binom{K}{R-1} \,] a^{K+1-R} b^R$$

$+ \cdots + b^{K+1}$. De donde el coeficiente de $a^{K+1-R} b^R$ es:

$\binom{K}{R} + \binom{K}{R-1}$ y simplificándolo obtenemos:

$$\binom{K}{R} + \binom{K}{R-1} = \frac{K!}{(K-R)!\,R!} + \frac{K!}{(K-R+1)!\,(R-1)!}$$

$$= \frac{K!}{(K-R)!\,(R-1)!\,R} + \frac{K!}{(K-R)!\,(K-R+1)\,(R-1)!}$$

$$= \frac{(K-R+1)\,K! + RK!}{(K-R+1)!\,(R)!}$$

$$= \frac{K!\,[\,(K-R+1)+R\,]}{(K-R+1)!\,R!}$$

$$= \frac{K!\,(K+1)}{(K-R+1)!\,R!} = \frac{(K+1)!}{(K-R+1)!\,R!}$$
$$= \binom{K+1}{R}$$

Observación. Existe cierta simetría en los coeficientes de los términos del desarrollo del binomio. Esta simetría se muestra en el siguiente arreglo triangular, que es conocido como triángulo de Pascal; que da los coeficientes de los términos del desarrollo de $(a + b)^n$ para valores enteros y positivos de n.

$n = 0$						1						
$n = 1$					1		1					
$n = 2$				1		2		1				
$n = 3$			1		3		3		1			
$n = 4$		1		4		6		4		1		
$n = 5$	1		5		10		10		5		1	
$n = 6$	1	6		15		20		15		6		1

En el triángulo de Pascal observamos que los elementos extremos de cualquier fila son igual a 1. Cada elemento inferior puede obtenerse como la suma de los dos elementos que aparecen en la fila inmediata superior y a la derecha e izquierda de ese elemento.

Ejemplos.

10. Desarrollar, por el teorema del binomio, $(2x + 5y)^5$:

$$(2x + 5y)^5 = \binom{5}{0}(2x)^5 + \binom{5}{1}(2x)^4(5y) + \binom{5}{2}(2x)^3(5y)^2$$
$$+ \binom{5}{3}(2x)^2(5y)^3 + \binom{5}{4}(2x)(5y)^4 + \binom{5}{5}(5y)^5$$
$$= (1)(32x^5) + (5)(16x^4)(5y) + (10)(8x^3)(25y^2)$$
$$+ (10)(4x^2)(125y^3) + (5)(2x)(625y^4) + (1)(3125y^5)$$
$$= 32x^5 + 400x^4y + 2000x^3y^2 + 5000x^2y^3 +$$
$$6250xy^4 + 3125y^5$$

11. Desarrollar $(3a - b^2)^4$.

$$\begin{aligned}(3a \quad b^2)^4 &= (3a)^4 + 4(3a)^3(-b^2) + 6(3a)^2(-b^2)^2 \\ &\quad + 4(3a)(-b^2)^3 + (-b^2)^4 \\ &= 81a^4 + 4(27a^3)(-b^2) + 6(9a^2)(b^4) \\ &\quad + 4(3a)(-b^6) + b^8 \\ &= 81a^4 - 108a^3b^2 + 54a^2b^4 - 12ab^6 + b^8\end{aligned}$$

12. Sin desarrollar el binomio, obtener el cuarto término de $(a + 2b)^5$. Utilizando el término general del desarrollo y tomando $n = 5$ y $R = 4$, tenemos:

$$\begin{aligned}\binom{5}{3}(a)^2(2b)^3 &= 10(a)^2(8b^3) \\ &= 80a^2b^3\end{aligned}$$

13. En el desarrollo $(2x^2 - \frac{xy}{2})^9$, obteniendo el término que contiene x^{14}.

También utilizaremos el término general del desarrollo, pero ahora lo que buscamos es el valor de R.
$n = 9$.

$$\binom{9}{R-1}(2x^2)^{9-R+1}(-\frac{xy}{2})^{R-1}$$
$$= \binom{9}{R-1}(2)^{9-R+1}(x^2)^{9-R+1}(\frac{-xy}{2})^{R-1}$$

Y así, el exponente de x en este término es:
$2(9 - R + 1) + (R - 1) = 2(10 - R) + R - 1 = -R + 19$
y, como nos interesa que el exponente de x sea 14, tenemos:

$$\begin{aligned}-R + 19 &= 14 \\ R &= 5\end{aligned}$$

por tanto, el término buscando es el quinto término de:

$$(2x^2 - \frac{xy}{2})^9$$

Que es:

$$\binom{9}{4}(2x^2)^5(-\frac{xy}{2})^4 = (126)(32x^{10})(\frac{x^4y^4}{16})$$
$$= 252x^{14}y^4$$

Ejercicios.

1 Calcular:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{9}{8}$$

2. Efectuar el desarrollo indicado por el teorema del binomio:

   a) $(3a - 2b)^4$
   b) $(x^2 - y^2)^5$
   c) $(\frac{b}{2} - \frac{2}{b})^4$
   d) $(x^2 + x^{1/2})^3$
   e) $(a^2 - a^{-2})^5$
   f) $(\frac{a^2}{2} + \frac{2}{a^2})^6$
   g) $(2x^2 - 3y^2)^5$
   h) $(2ab - c)^6$
   i) $(3x^3 - 1)^5$
   j) $(xy + z)^4$
   k) $(2x + yz)^4$
   l) $(x^{-3} - y^{-3})^4$
   m) $(2/x^2 - 1/x^3)^5$

3. Escribir y simplificar los primeros cuatro términos del desarrollo de la potencia de los siguientes binomios:

   a) $(x - 2y)^7$
   b) $(b + \frac{y}{3})^{10}$
   c) $(x^{1/2} + y^{1/2})^{12}$
   d) $(3x^2 - y^3)^8$
   e) $(1 + x)^{20}$
   f) $(\frac{a}{2} - \frac{b}{3})^9$
   g) $(5ab - 1)^{15}$
   h) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^{18}$
   i) $(6x^2 + 2y)^{11}$
   j) $(xy + z)^{12}$
   k) $(5xy - z)^{13}$
   l) $(a^3/3 - 3/b^3)^{10}$
   m) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^9$

4. En los siguientes ejercicios, obtener solamente el término o términos indicados en el desarrollo correspondiente.

   a) Quinto término de $(3 - x^2)^9$.
   b) Séptimo término de $(x^{1/2} + y^{1/2})^{10}$
   c) Sexto término de $(\frac{a}{2} \quad b)^{12}$

d) Término central de $(\frac{x}{y} - \frac{y}{x})^8$

e) Los dos términos centrales de $(\frac{a^2}{2} - b)^9$

f) Término en a^7 de $(\frac{a}{3} + 9b)^{10}$

g) Término en x^4 de $(x^2 + \frac{1}{x})^5$

h) Noveno término de $(a^3/3 - 3/b^3)^{10}$

i) Doceavo término de $(5xy - z)^{13}$

j) Quinceavo término de $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^{18}$

k) Los dos términos centrales de $(5xy - z)^{13}$

l) Término que contiene y^7 en $(6x^2 + 2y)^{11}$

m) Término que contiene $a\ x^6$ en $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^{18}$

n) Término que contiene y^6 en $(b + y/3)^{10}$

ñ) Término que contiene x^{36} en $(x^3 - 1/x)^{20}$

o) Término que contiene a^{45} en $(2a^2b - a^5)^{15}$

p) Los dos términos centrales de $(5ab - 1)^{25}$

q) Término central de $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12}$

r) Término central de $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^{20}$

CAPÍTULO 5

Números complejos

INTRODUCCIÓN

En el capítulo 2 (Reales) nos dimos cuenta que el conjunto de los números naturales fue el punto de partida para la construcción de los enteros y que a partir de los enteros podíamos construir los números racionales; después advertimos que existían números que no podían expresarse como razón de los enteros y formamos el conjunto de los irracionales. Finalmente, llamamos reales a la unión de los números racionales y los números irracionales.

También observamos que el conjunto de los números reales era un campo. Desde el punto de vista algebraico, los reales son una estructura numérica muy completa y podríamos pensar que la extensión que se hizo desde los naturales hasta los números reales sería la última extensión necesaria para la solución de los problemas que se nos presentan. Sin embargo, la ecuación $x^2 = a$ para toda $a \in R$, no siempre tiene solución en el campo de los reales, así es que tendremos necesidad de realizar una extensión de los números reales que nos conducirá al campo de los números complejos.

Sección 5.1

ÁLGEBRA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el alumno deberá ser capaz de:

1. Definir número complejo.
2. Definir suma de números complejos.
3. Probar las propiedades de la suma de números complejos.
4. Definir producto de números complejos.
5. Probar algunas propiedades de los números complejos.
6. Efectuar operaciones de sumas y productos con números complejos.
7. Encontrar el inverso aditivo y multiplicativo de un número complejo.
8. Efectuar divisiones de números complejos.
9. Dados complejos como parejas, escribirlas en la forma rectangular.
10. Encontrar el complejo z tal que $z^2 + 1 = 0$.
11. Definir el conjugado de un número complejo
12. Encontrar el conjugado de un número complejo

Si $x \in R$, podemos tener:

a) x es un número negativo
b) $x = 0$
c) x es un número positivo.

Si x es positivo, entonces $x^2 = x \cdot x$, que es un número positivo.
Si $x = 0$, entonces $x^2 = 0 \cdot 0 = 0$.
Y si x es negativo, entonces $x^2 = x \cdot x$, que es un número positivo.

En general, podemos decir que para cualquier número real x, x^2 es un número mayor o igual que cero. Entonces la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en los números reales porque $x^2 + 1 = 0$ es equivalente a tener $x^2 = -1$ y se acaba de ver que si $x \in R$, x^2 nunca es negativo.

El propósito fundamental de esta unidad es construir una estructura numérica (un campo) que contenga a los números reales y en el que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tenga solución. Nuestro punto de partida es el campo de los números reales.

Definición. Un número complejo z es una pareja (a, b) de números reales. El conjunto de los números complejos lo denotaremos con la letra C. Entonces:

$$C = \{ (a, b) \mid a, b \in R \}$$

En la pareja de números llamaremos parte real al número a y parte imaginaria al número b.

Ejemplo.

1. $(0, 1)$, $(3, -3)$, $(\pi, -6)$, $(1/2, \sqrt{7}/11)$, $(5, 5)$ y $(\sqrt{5}/2, 7/4)$ son algunos números complejos, donde 0, 3, π, $1/2$, 5, $\sqrt{5}/2$, son la parte real y $1, -3, -6, \sqrt{7}/11, 5, 7/4$ son la parte imaginaria.

Definición. Diremos que los números complejos $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$, son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Ejemplos.

2. $(2 \times 3, 6 - 2) = (6, 4)$
3. $(2\sqrt{9}, 4(4 + 2)) = (6, 24)$
4. Si $(a, 10) = (5, d) \Rightarrow a = 5$ y $d = 10$

Ahora consideremos los siguientes números complejos:

$$z_1 = (a, b); z_2 = (c, d) \text{ y } z_3 = (e, f).$$

Supongamos que $z_1 = z_2$ y $z_2 = z_3$, entonces $(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c$ y $b = d$ y $(c, d) = (e, f) \Rightarrow c = e$ y $d = f$, es decir, $a = c = e$ y $b = d = f$, de donde concluimos que $a = e$ y $b = f$, lo cual significa, por definición, que $(a, b) = (e, f)$ o simplemente $z_1 = z_3$.

Entonces podemos afirmar que la igualdad de números complejos tiene la siguiente propiedad:

Si $z_1 = z_2$ y $z_2 = z_3 \Rightarrow z_1 = z_3$.
Esta propiedad es llamada *propiedad transitiva de la igualdad.*

Suma de números complejos

Definición. Si $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ entonces definimos

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Ejemplos.

5. $(3, -2) + (4, 3) = (3 + 4, -2 + 3) = (7, 1)$
6. $(1/2, -5) + (3, 3/4) = (1/2 + 3, -5 + 3/4) = (7/2, -17/4)$
7. $(3, 0) + (4, 0) = (7, 0)$
8. $(2, 8) + (-2, -8) = (0, 0)$
9. $(-4, 5) + (0, 0) = (-4, 5)$

Propiedades de la suma

1. *Conmutativa.*
Si Z_1 y Z_2 complejos, entonces.
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Demostración.

Sean $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ dos números complejos, entonces:

$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ por definición de suma
$= (c + a, d + b)$ conmutatividad en los reales

$$= (c, d) + (a, b) \qquad \text{por definición de suma}$$
$$= z_2 + z_1.$$

La suma de complejos es conmutativa.

2. *Asociativa*

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) + z_3 &= [\,(a, b) + (c, d)\,] + (e, f)\\ &= (a + c, b + d) + (e, f)\\ &= (\,(a + c) + e, (b + d) + f)\\ &= (a + (c + e), b + (d + f)\,)\\ &= (a, b) + (c + e, d + f)\\ &= (a, b) + [\,(c, d) + (e, f)\,]\\ &= z_1 + (z_2 + z_3).\end{aligned}$$

La suma de complejos es asociativa.

3. *Identidad aditiva.*

Existe $z_0 \in C$, tal que, para todo $z \in C$
$$z + z_0 = z$$

Demostración:

Sea $z_0 = (x, y)$ y $z = (a, b)$.
Averiguaremos qué valores deben tomar x y y.

$$z + z_0 = z$$
$$(a, b) + (x, y) = (a, b)$$
$$(a + x, b + y) = (a, b)$$

entonces: $a + x = a$ y $b + y = b$
de donde se tiene que: $x = 0$ y $y = 0$
así que el elemento identidad aditivo es $z_0 = (0, 0)$.

Nota: Los valores de x y y no dependen de a ni de b, por lo que z_0 es el mismo para todo $z \in C$

$z_0 = (0, 0)$ es el elemento identidad de los complejos respecto a la suma.

4. Inverso aditivo.

Para cada $z \in C$ existe un elemento $(-z) \in C$, tal que:

$$z + (-z) = z_0.$$

Demostración.

Sea $z = (a, b)$ y $-z = (x, y)$.

Averiguaremos qué valores deben tomar x y y.

$$z + (-z) = z_0$$
$$(a, b) + (x, y) = (0, 0)$$
$$(a + x, b + y) = (0, 0).$$

Así:
$$a + x = 0$$
$$b + y = 0$$

de donde:
$$x = -a \text{ y } y = -b.$$

Por lo tanto, si $z = (a, b)$

$$-z = (-a, -b).$$

Nota: Los valores de x y y dependen de a y de b, por lo que $-z$ es diferente para cada $z \in C$

$-z = (-a, -b)$ también es llamado el inverso aditivo de $z = (a, b)$.

Con esto podemos definir la resta como sigue:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

Ejemplos

10. Si $z_1 = (-7, -1), z_2 = (6, 3)$

$$z_1 + z_2 = (-7, -1) + (6, 3) = (-7 + 6, -1 + 3)$$
$$= [6 + (-7), 3 + (-1)] = z_2 + z_1$$

11. Si $z_3 = (2, -5)$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (-7, -1) + [(6, 3) + (2, -5)]$$
$$= (-7, -1) + [6 + 2, 3 + (-5)]$$
$$= (-7, -1) + (8, -2) = (1, -3)$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = [(-7, -1) + (6, 3)] + (2, -5)$$

$$= (-7 + 6, -1 + 3) + (2, -5)$$
$$= (-1, 2) + (2, -5) = (1, -3)$$

12. Si $z_1 = (4, 3)$ y $0 = (0, 0)$, entonces: $(4, 3) + (0, 0) = (4, 3)$, por lo tanto $z_1 + 0 = z_1$.

13. Si $z = (2, 7)$; $-z = (-2, -7)$
$z + (-z) = (2, 7) + (-2, -7) = (0, 0)$

14. Si $z_1 = (8, 6)$ y $z_2 = (3, -2)$
$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (8, 6) + (-3, 2) = (5, 8)$

Multiplicación de números complejos

Definición. Si $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ definimos:
$$z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Ejemplo.

15. $(3, 2) \cdot (-1, 6) = [(3)(-1) - (2)(6), (3)(6) + (2)(-1)]$
$= (-3 - 12, 18 - 2) = (-15, 16)$

Propiedades de la multiplicación

Teorema 1.

Para todo z_1, z_2 se tiene $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

Demostración.

$z_1 = (a, b), z_2 = (c, d)$
$z_1 \cdot z_2 = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
$z_2 \cdot z_1 = (c, d)(a, b) = (ca - db, cb + da)$
$z_2 \cdot z_1 = (c, d)(a, b) = (ca - db, da + cb)$
$= (ac - bd, ad + bc)$

así: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

y podemos concluir:

El producto de complejos es conmutativo.

Teorema 2.

Si z_1, z_2, z_3 son cualesquier tres números complejos, se tiene

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3).$$

La demostración se ve en los ejercicios.

El producto de complejos es asociativo.

Teorema 3.

Existe un complejo $1 = (x, y)$, tal que $z \cdot 1 = z$ para todo $z \in C$.

Demostración.

Sea $z = (a, b)$

$z \cdot 1 = z$

$(a, b) \cdot (x, y) = (a, b)$

$$(ax - by, ay + bx) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{array}{r} ax - by = a \\ \underline{bx + ay = b} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 x - aby = a^2 \\ \underline{b^2 x + aby = b^2} \\ (a^2 + b^2) x = a^2 + b^2 \end{array}$$

$$x = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

$$x = 1.$$

Sustituyendo en la primera ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} ax - by &= a \\ a(1) - by &= a \\ a - by &= a \\ -by &= 0 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $1 = (x, y) = (1, 0)$

$(1, 0)$ es el elemento identidad multiplicativo de C.

Teorema 4.

Para cada $z \in C$ diferente de $(0, 0)$ existe un número complejo z^{-1} tal que $z \cdot z^{-1} = 1$.

Demostración.

Sea $z = (a, b)$; $z^{-1} = (x, y)$

$z \cdot z^{-1} = 1$

$(a, b)(x, y) = (1, 0)$

$(ax - by, ay + bx) = (1, 0)$

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 x - aby &= a \\ b^2 x + aby &= 0 \end{aligned}$$

$$(a^2 + b^2)\, x = a$$

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Ahora $bx + ay = 0$

$$y = \frac{-bx}{a}$$

$$y = \frac{-b\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}\right)}{a}$$

$$y = \frac{-ab}{a(a^2 + b^2)}$$

$$y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Entonces, si $z = (a, b)$, $z^{-1} = (x, y) = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$

$z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$ es el inverso multiplicativo de $z = (a, b)$.

Ejemplos.

16. $z_1 = (3, 5)$, $z_2 = (-3, -2)$, $z_3 = (1, -4)$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (3, 5)(-3, -2) &= ((3)(-3) - (5)(-2) + 5(-3)) \\ &= (-9 + 10, -6 - 15) \\ &= (1, -21) \end{aligned}$$

$$z_2 \cdot z_1 = (-3, -2)(3, 5) = [(-3)(3) - (-2)(5), (-3)(5) + (-2)(3)]$$
$$= (-9 + 10, -15 - 6)$$
$$= (1, -21)$$

17. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = [(3, 5)(-3, -2)] \cdot (1, -4)$
$$= (1, -21) \cdot (1, -4)$$
$$= (1 - 84, -4 - 21) = (-83, -25)$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (3, 5)[(-3, -2) \cdot (1, -4)]$$
$$= (3, 5)(-3 - 8, 12 - 2)$$
$$= (3, 5)(-11, 10) = (-33 - 50, 30 - 55)$$
$$= (-83, -25)$$

18. $z_1 \cdot 1 = (3, 5)(1, 0) = (3, 5)$

19. $z_1^{-1} = \left(\frac{3}{9 + 25}, \frac{-5}{9 + 25}\right) = \left(\frac{3}{34}, \frac{-5}{34}\right)$

$$z_1 z_1^{-1} = (3, 5)\left(\frac{3}{34}, \frac{-5}{34}\right) = (1, 0)$$

Es costumbre representar a z^{-1} como $\frac{1}{z}$.

Definición. $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$

Si $z = (0, 0)$, z^{-1} quedará $\left(\frac{0}{0^2 + 0^2}, \frac{0}{0^2 + 0^2}\right) = \left(\frac{0}{0}, \frac{0}{0}\right)$ que no está determinado, por lo tanto, si $z = (0, 0)$ no existe z^{-1}. Tampoco está definida $z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2}$, si $z_2 = (0, 0)$

Ejemplos.

20. Encontrar el valor de z para: $\frac{1}{(2, 3)} \cdot z - (3, 8) = (-2, 1)$

$$\frac{1}{(2, 3)} \cdot z = (-2, 1) + (3, 8)$$

$$\frac{1}{(2, 3)} \qquad z = (1, 9)$$

$$z = (1, 9)(2, 3)$$
$$z = (2 - 27, 3 + 18)$$
$$z = (-25, 21)$$

21. Encontrar el valor de z para: $(-2, -7) \cdot z + (5, 6) = -(3, 2)$

$$(-2, -7) \cdot z = (-3, -2) - (5, 6)$$
$$(-2, -7) \cdot z = (-3, -2) + (-5, -6)$$
$$(-2, -7) \cdot z = (-8, -8)$$
$$z = \frac{(-8, -8)}{(-2, -7)}$$
$$z = (-8, -8)\left(\frac{-2}{53}, \frac{7}{53}\right)$$
$$z = \left(\frac{72}{53}, \frac{-40}{53}\right)$$

Ahora veremos la relación que existe entre los complejos y los reales.

Sea $A = \{(x, 0) \mid x \in R\} \subset C$.

Se puede establecer una correspondencia biunívoca entre A y los reales de la siguiente manera:

$$f : A \to R$$

definida como:

$$f((x, o)) = x.$$

La función f es inyectiva, puesto que si

$z_1 = (x, 0)$, $z_2 = (y, 0)$ y $z_1 \neq z_2$

tenemos que: $z_1 \neq z_2$

$$(x, 0) \neq (y, 0)$$

que es equivalente a decir que $x \neq y$.

Además: $f(z_1) = f((x, 0)) = x \neq y = f((y, 0)) = f(z_2)$.

Y así tenemos que:

$$f(z_1) \neq f(z_2)$$

de donde se concluye que, si $z_1 \neq z_2$, entonces $f(z_1) \neq f(z_2)$.

También la función f es sobreyectiva, puesto que para toda $x \in R$, existe $(x, 0) \in A$, tal que:

$$f((x, 0)) = x$$

por lo tanto, f es una función biyetiva. Es decir, a todo elemento $(x, 0) \in A$ le corresponde el elemento x en los reales, lo cual se indicará escribiendo:

$$(x, 0) \leftrightarrow x$$

Veremos el comportamiento de las operaciones en los conjuntos A y R.

Si $z_1 = (x, 0)$ y $z_2 = (y, 0)$

tenemos lo siguiente:

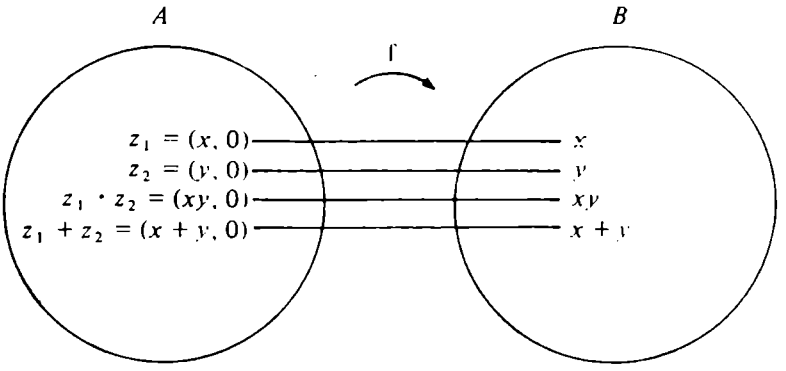
1.

$$\begin{array}{rcl} z_1 = (x, 0) & \Leftrightarrow & x \\ z_2 = (y, 0) & \Leftrightarrow & y \\ \hline z_1 + z_2 = (x, 0) + (y, 0) & & x + y \\ = (x + y, 0) & \Leftrightarrow & x + y. \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl} z_1 = (x, 0) & \Leftrightarrow & x \\ z_2 = (y, 0) & \Leftrightarrow & y \\ \hline z_1 \cdot z_2 = (xy, 0) & \Leftrightarrow & xy. \end{array}$$

Veamos una ilustración de estas propiedades:



Entonces podemos decir que la única diferencia que hay entre A y $f(A) = R$, es la presentación, es decir, la diferencia es de forma, puesto que se estableció una correspondencia biunívoca entre A y R y la estructura algebraica se conserva. Abusando del lenguaje podemos decir que:

$$(x, 0) = x,$$

o sea, podemos afirmar que $A = R$. Y así tenemos que:

$$R \subset C.$$

Forma rectangular de un complejo

El complejo $(0, 1)$ será representado por i, es decir:

$$i = (0, 1).$$

Para todo complejo $z = (x, y)$ tenemos:

$$z = (x, y)$$
$$z = (x, 0) + (0, y)$$
$$z = (x, 0) + (y, 0)\,(0, 1)$$
$$z = x + yi$$

$z = (x, y) = x + yi$, donde $i = (0, 1)$.

donde x es la parte real de z y y su parte imaginaria.

Cuando un número complejo está dado en la forma $x + yi$ diremos que tiene la forma algebraica cartesiana o forma rectangular.

El número complejo $z = i$ satisface la ecuación:

$$z^2 + 1 = 0$$
$$i^2 + 1 = 0$$
$$ii + 1 = 0$$
$$(0, 1)\,(0, 1) + (1, 0) = (0, 0)$$
$$(-1, 0) + (1, 0) = (0, 0)$$
$$(0, 0) = (0, 0).$$

por tanto, hemos encontrado un número complejo que satisface la ecuación

$$z^2 + 1 = 0.$$

Te darás cuenta que decir que $i^2 + 1 = 0$ es equivalente a decir que

$$i^2 = -1, \text{ o que } i = \sqrt{-1}.$$

Si dos números complejos z_1 y z_2 son dados en la forma rectangular $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces podemos efectuar el producto como producto de dos binomios, esto es:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac + (ad + bc)\,i - bd$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)\,i.$$

Esta forma rectangular de un número complejo es útil al realizar divisiones.

Ejemplo.

22. $z_1 = 3 + 8i$, $z_2 = -2 - 3i$.

Entonces: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3 + 8i}{(-2 - 3i)} = \dfrac{(3 + 8i)}{(-2 - 3i)} \cdot \dfrac{(-2 + 3i)}{(-2 + 3i)}$

$$\frac{[(3)(-2)+(8i)(3i)]+[(3)(3)+(8)(-2)]i}{(-2)^2-(3i)^2}$$

$$\frac{(-6-24)+(9-16)i}{4+9}$$

$$\frac{(-30)-7i}{13}=\frac{-30}{13}+\frac{-7}{13}i$$

Lo que hicimos en este cociente, fue multiplicar el numerador y el denominador por un número complejo que convirtiera el denominador en binomios conjugados. Es decir, que tuviera la forma $(a-b)(a+b)$.

A continuación definiremos un concepto que nos será útil para efectuar divisiones de números complejos.

> Sea $z=a+bi$ entonces definimos el conjugado de z, que denotamos por $\bar{z}$ de la siguiente manera: $\bar{z}=a-bi$.

Es decir, se le cambia el signo a la parte imaginaria. Es claro que la suma de un complejo z con su conjugado $\bar{z}$ siempre es un real, esto es:
$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$. También el producto de un complejo z con su conjugado $\bar{z}$ siempre es un número real, es decir: $z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)$
$a^2-(b^2i^2)=a^2+b^2$.

Entonces:

$$z+\bar{z}=2a,\ z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$$

Podemos emplear el conjugado de z para efectuar divisiones de números complejos, de la siguiente manera:

$$z_1=z_1\quad z_2\quad z_1\cdot z_2$$

Ejemplos.

23. Si $z_1 = -3 + 5i$ y $z_2 = 4 + 3i$ entonces tenemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-3 + 5i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{(-12 + 15) + (9 + 20)i}{16 + 9}$$

$$= \frac{3 + 29i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{29}{25} i$$

24. Si $z_1 = 7 + 8i$ y $z_2 = i$ tenemos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(7 + 8i)(-i)}{(i)(-i)} = \frac{-7i + 8}{-i^2}$$

$$= \frac{8 - 7i}{1} = 8 - 7i$$

Raíz cuadrada de números reales negativos

Sabemos que $i^2 = -1$, esto es, que i es una raíz de -1 ($i = \sqrt{-1}$).

Ahora $(-i)^2 = [(-1)(i)]^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = i^2 = -1$, de donde concluimos que $(-i)^2 = -1$, es decir, $-i$ es también una raíz de -1, entonces resumimos:

$$i = \sqrt{-1}; (-i) = -\sqrt{-1}.$$

En general, si x es positiva tenemos que $(i\sqrt{x})^2 = i^2 x = -x$, de donde concluimos que $\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$. Esto nos conduce a la siguiente definición.

> Para todo x positiva, las dos raíces cuadradas de $-x$ son
> $$i\sqrt{x} \text{ y } -i\sqrt{x}$$

Ejemplos.

25. Las raíces cuadradas de -9 son $3i$ y $-3i$, puesto que
$$i\sqrt{9} = 3i, \; -i\sqrt{9} = -3i.$$

26. El conjunto solución de la ecuación $x^2 + 16 = 0$ es $\{4i, -4i\}$, puesto que:

$x^2 + 16 = 0$

$x^2 = -16$

$x = \sqrt{-16}$, de donde concluimos:

$i\sqrt{16} = 4i$ y $-i\sqrt{16} = -4i$ son las raíces cuadradas de -16, y por lo tanto forman el conjunto solución de $x^2 + 16 = 0$.

27. Eliminaremos los radicandos negativos.

$$\sqrt{-8} = i\sqrt{8} = i\sqrt{4 \cdot 2} = i\,2\sqrt{2} = 2i\sqrt{2}$$

$$\sqrt{-75} = i\sqrt{75} = i\sqrt{25 \cdot 3} = i\,5\sqrt{3} = 5i\sqrt{3}$$

28. $(\sqrt{-9})(\sqrt{-4}) = -6$

Puesto que $\sqrt{-9} = i\sqrt{9} = 3i, \sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i$

$$(\sqrt{-9})(\sqrt{-4}) = (3i)(2i) = (3 \cdot 2)(i \cdot i) = 6i^2 = -6.$$

Observaciones.

a) Si a y b son positivos se tiene que:

$$\sqrt{(-a)(-b)} \neq \sqrt{-a}\sqrt{-b}$$

$$\sqrt{ab} \neq i\sqrt{a}\,i\sqrt{b}$$

$$\sqrt{ab} \neq i^2\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{ab} \neq -\sqrt{ab}$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{(-25)(-4)} \neq \sqrt{-25}\sqrt{-4}$$

$$\sqrt{100} \neq (5i)(2i)$$

$$10 \neq 10i^2$$

$$10 \neq -10.$$

b) Las expresiones que contienen raíces cuadradas de números negativos pueden tomar la forma $a + bi$.

$$8 + \sqrt{-32} + 2 - \sqrt{-8} - 5 = (8 + 2 - 5) + (\sqrt{-32} - \sqrt{-8})$$

$$= (10 - 5) + (4i\sqrt{2} - 2i\sqrt{2})$$

$$= 5 + (2\sqrt{2})i.$$

Ejemplo.

29. Resuelva la siguiente ecuación:

$(3x - 8)^2 + 50 = 0$

$$(3x - 8)^2 = -50$$

$$3x - 8 = \pm\sqrt{-50}$$

$$3x = 8 \pm (i\sqrt{50})$$

$$3x = 8 \pm 5i\sqrt{2}$$

$$x = 8/3 \pm \left(\frac{5\sqrt{2}}{3}\right) i$$

Ejercicios

1. Encontrar en cada caso los valores de a y b que hacen verdaderas las siguientes igualdades:

   a) $(3a + b, 5b) = (-3, 2)$

   b) $\left(\frac{3}{a}, \frac{b}{3}\right) = (3, 3)$

   c) $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{5}\right) = (-1, 2)$

   d) $(4m + 3, 6 - n) = (-m, n)$

2. Efectuar las operaciones indicadas.

   a) $(5, -3)(2, 8)$

   b) $[(-2, 3) + (6, -5)] + (4, 5)$

   c) $(-2, 3) + [(6, -5) + (4, 5)]$

   d) $(8, 3) + (3, 8)$

   e) $(3, 8) + (8, 3)$

   f) $[(1/2, 3)(5, 3/4)](3, 1/5)$

   g) $(-1/8, 3/5)(1, 0)$

   h) $(0, 1)^3 + (0, 1)^2$

3. Encuentra z^{-1} en cada caso.

   a) $z = (-3, -2)$

   b) $z = (1/2, 2/3)$

   c) $z = (1, 0)$

   d) $z = (0, 1)$

   e) $z = (-2, 3)$

   f) $z = (3, 7)$

4. Realizar las operaciones indicadas:

   a) $(3 - 2i) + (5 + i)$

b) $(-2 + i) - (-3 + i)$

c) $(1/2 + i/3) + (1/3 - i/2) - (1 - i)$

d) $(-4 - 2i) - (3 - 5i) + (7 - 3i)$

e) $(\sqrt{2} - i/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{2} - i\sqrt{2})$

f) $(3 + 2i)(i)$

g) $(4 - 8i)(2)$

h) $(3i)(5i)$

i) $(3 + 2i)(4 + 8i)$

j) $(i)(i)(i)$

k) $(5 - 3i)(-3i)(i + 2)$

l) $(6i)^2$

m) $(3 + 2i)^3$

n) $(4 - 3i)(4 + 3i)$

ñ) $(9 - 3i)^2$

o) $(1/2 - 4i)(1/2 + 4i)$

p) $(3 - 2i)(9 + 6i - 4)$

q) $(1 + i)(1 - i + i^2)$

r) $\dfrac{i}{i^3}$

s) $\dfrac{3 + 3i}{3 - 2i}$

t) $\dfrac{1 - i}{2 + 3i}$

u) $\dfrac{1}{i}$

v) $\dfrac{i}{1 + i}$

w) $\dfrac{3}{5i - 9}$

x) $(1 - i)[(3i - 1) - (9 - i)]$

y) $[(-i + 4i) + (5 + 8i)](1/2 - i/3)$

z) $\dfrac{3i}{2 - i} - \dfrac{5}{4 + 2i}$

a') $\dfrac{8}{3-2i}+\dfrac{5i}{-1-2i}$

b') $\dfrac{(5i+2)^2}{3i-1}$

c') $\dfrac{(3+i)(i-2)(i+4)}{(2i-5)i}$

d') $\dfrac{(-i-1)^2(1+i)^3}{i}$

5. Efectuar las operaciones indicadas escribiendo el resultado sin radicandos negativos y darle la forma $a+bi$:

a) $\sqrt{-2}\sqrt{-32}$

b) $\sqrt{-4}\sqrt{-16}$

c) $\sqrt{-32}\sqrt{-30}\sqrt{-1/4}$

d) $\sqrt[3]{-8}-\sqrt{-8}$

e) $\sqrt{-50}+2\sqrt{-100}+\sqrt{50}$

f) $\sqrt{-5}(\sqrt{-10}+\sqrt[3]{-1})$

g) $\dfrac{\sqrt[3]{-64}+\sqrt{-64}}{i}$

h) $\dfrac{\sqrt{-9}-i}{2-i}$

i) $\dfrac{\sqrt{-6}(\sqrt{-6}+\sqrt{-10})}{\sqrt[3]{-27}(\sqrt{-12}-\sqrt{-8})}$

j) $(\sqrt{-3}+\sqrt{-2})^2$

k) $(\sqrt[3]{-64}-\sqrt[4]{-1})^2$

l) $(\sqrt{-4}-\sqrt{-6})(\sqrt{-4}+\sqrt{-6})$

m) $(\sqrt{-2}+\sqrt{-1})(-2-\sqrt{2}-1)$

n) $\dfrac{4-\sqrt{-4}}{4+\sqrt{-4}}$

ñ) $\dfrac{\sqrt{25}+5}{\sqrt{-25}-5}$

CAPÍTULO 6

Ecuaciones

INTRODUCCIÓN

Un aeroplano recorre 650 km a favor del viento en 1 hr y 20 min y retorna contra el viento en 3 hr y 15 min. Encuentra la rapidez del aeroplano en aire tranquilo y la rapidez del viento.

Al plantearte este problema puedes pensar que tiene poca relación con las matemáticas que ya conoces, es decir, con conjuntos, funciones, expresiones algebraicas y otros temas. Sin embargo, una de las preocupaciones de las matemáticas es el poder asociar un modelo matemático a las diversas situaciones de la vida cotidiana, para plantear problemas matemáticos que sean equivalentes al problema original.

En matemáticas, tenemos una correspondencia entre problemas y expresiones matemáticas que representan a dichos problemas. El presente capítulo nos ayudará a darnos cuenta de que esta correspondencia nos conduce a definir los conceptos de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Además, conoceremos el significado de soluciones de ecuaciones y aprenderemos técnicas para obtener dichas soluciones.

Sección 6.1

ECUACIONES LINEALES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir función lineal.
2. Definir ecuación lineal y dar su solución.
3. Definir ecuación con fracciones y dar su solución.
4. Resolver problemas cuya redacción conduce a una ecuación lineal.

Entre las funciones que estudiaremos, las más simples, aparte de la constante $f(x) = c$, es la *función lineal*.

Definición. La función f, definida por la ecuación:

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son constantes, recibe el nombre de función lineal.

El nombre que esta función recibe, se debe a que su gráfica es una línea recta. También es verdadero que cualquier línea recta puede representarse mediante una ecuación de la forma:

$$f(x) = mx + b$$

excepto cuando la recta sea paralela al eje de las y; en este caso la recta se puede representar mediante la ecuación $x = a$, donde a es una constante.

En esta sección nos dedicaremos, en especial, a las propiedades y los ceros de las funciones lineales, antes que a sus propiedades geométricas; éstas las veremos en secciones posteriores.

Definición. Un número a es un cero de una función $f(x)$ si $f(a) = 0$.

Ejemplos.

1. Si $f(x) = 3x - 3, x = 1$ es un cero de la función, ya que:

$$\begin{aligned} f(1) &= 3\,(1) - 3 \\ &= 3 - 3 \\ f(1) &= 0. \end{aligned}$$

2. Si $f(x) = x/5 + 2, x = -10$ es un cero de la función, ya que:

$$\begin{aligned} f(-10) &= \tfrac{1}{5}\,(-10) + 2 \\ &= -2 + 2 \\ f(-10) &= 0. \end{aligned}$$

Existe una relación entre los ceros de una función y las soluciones o raíces de las ecuaciones.

Observaciones.

a) Un cero de la función $f(x)$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.
b) Cuando se resuelva una ecuación, hay que recordar que las soluciones son los ceros de la función.
c) La gráfica de $f(x)$ cruza al eje x en el cero de la función.

En los siguientes ejemplos presentaremos los métodos para resolver ecuaciones. Para ello, nos basaremos en las propiedades de los números reales y en los siguientes teoremas, que ya se demostraron en el capítulo anterior.

Teorema 1.

Si $a, b, c, d \in R$ y si $a = b$ y $c = d$, entonces: $a + c = b + d$.

Teorema 2.

Si $a, b, c, d \in R$, y si $a = b$ y $c = d$, entonces: $ac = bd$.

Observación. Lo que afirman estos teoremas es que podemos sumar, restar, multiplicar o dividir una misma cantidad a ambos miembros de una igualdad.

Ejemplo.

3. Resolver la siguiente ecuación: $x - 5 = 3$

$$\begin{aligned} x - 5 &= 3 \\ x - 5 + 5 &= 3 + 5 \qquad \text{Teorema 1} \\ x &= 3 + 5 \\ x &= 8. \end{aligned}$$

Observación: Una cantidad que está restando en un miembro la podemos pasar al otro sumándolo.

Ejemplo.

4. $x + 3 = 8$

$$\begin{aligned} x + 3 - 3 &= 8 - 3 \qquad \text{Teorema 1} \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Observación: Una cantidad que está sumando en un miembro pasa al otro restándolo.

Ejemplo.

5. $3x = 12$

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{1}{3}\right) 3x &= \left(\tfrac{1}{3}\right)(12) \qquad \text{Teorema 2} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Observación: Una cantidad que está multiplicando en un miembro pasa al otro lado dividiendo si es diferente de cero.

Ejemplo.

6. $\frac{1}{4}\, x = 5$

$$(4)\left(\frac{1}{4}x\right) = (4)(5) \qquad \text{Teorema 2}$$
$$x = 20$$

Observación: Una cantidad que está dividiendo pasa al otro multiplicando.

También podemos tener una combinación de estas operaciones:

Ejemplos.

7. $3x - 12 = 5$

$$3x = 5 + 12 \qquad \text{Teorema 1}$$
$$3x = 17$$
$$x = \frac{17}{3} \qquad \text{Teorema 2}$$

8. $\frac{3}{5}x + 2 = 7$

$$\frac{3}{5}x = 7 - 2 \qquad \text{Teorema 1}$$
$$\frac{3}{5}x = 5$$
$$3x = 25 \qquad \text{Teorema 2}$$
$$x = \frac{25}{3} \qquad \text{Teorema 3}$$

Observaciones.

a) Cuando en una ecuación se tengan varias operaciones con la variable, hay que tener especial cuidado al aplicar los teoremas, ya que se debe aplicar primero el teorema 1 para quitar lo que suma o resta a la variable antes que el producto o cociente.
b) Las observaciones que se hicieron en los ejemplos 3, 4, 5 y 6 se basan directamente en los teoremas 1 y 2 de la igualdad.

Ejemplo.

9. $6x - 7 = 2x + 29$

$$6x - 2x = 29 + 7$$
$$4x = 36$$
$$x = 9$$

Ejercicio 6.1.1.

Resolver las siguientes ecuaciones.

1. $x + 3 = 5$
2. $x - 2 = 9$
3. $x + 9 = 7$
4. $x - 8 = 3$
5. $3x = 6$
6. $6x = -10$
7. $12x = 144$
8. $-5x = 100$
9. $\frac{x}{-2} = -9$
10. $\frac{x}{-7} = 7$
11. $\frac{x}{3} = 6$
12. $\frac{x}{11} = 3$
13. $\frac{5x}{4} = 20$
14. $\frac{2x}{9} = 1$
15. $\frac{-6x}{5} = 3$
16. $\frac{8x}{13} = 2$
17. $\frac{2}{3}x = \frac{9}{4}$
18. $\frac{5}{6}x = \frac{30}{36}$
19. $\frac{-3}{8}x = \frac{-3}{8}$
20. $\frac{8}{9}x = -\frac{56}{81}$
21. $0.01x = -1$
22. $1.2x = 144$
23. $0.13x = 1.69$
24. $-0.002x = 12$
25. $2x - 3 = 5$
26. $8 - 5x = 3$
27. $4x + 3 = 9$
28. $7 + 2x = -1$
29. $\frac{3}{5}x - 1 = \frac{2}{5}$
30. $3 - \frac{1}{6}x = \frac{1}{3}$
31. $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$
32. $\frac{3}{7} - \frac{8}{3}x = \frac{3}{14}$
33. $6x = 5 + 2x$
34. $8x = 3 - 5x$
35. $2x - 12 = 6x - 2$
36. $8 - x = 5 - 2x$
37. $7x - 3 = 2x + 9$
38. $12x - 7x - 2 = 20 - 6x$
39. $9x + 4 - 11x = 8 + 6x - 5$
40. $9 - 8x = 7x + 10$
41. $\frac{x}{3} - \frac{x}{12} = \frac{x}{4} - \frac{1}{3}$
42. $\frac{7x}{8} - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 3$

43. $\frac{2x}{7} - \frac{1}{4} = \frac{3x}{8} + \frac{1}{5}$

44. $\frac{9x}{4} - 5 = \frac{4}{3} - \frac{x}{8}$

45. $\frac{13x}{4} - \frac{5}{3}x = x - \frac{14}{3}$

46. $\frac{17x}{12} + \frac{13}{3} = \frac{14}{8} - \frac{5}{3}$

47. $3(x - 5) + 3 = 10$

48. $9(x + 7) - 9 = 81$

49. $5 + 2(4x - 1) = 0$

50. $2 - 3(7 - x) = -3$

51. $6(1 - x) - 2(x - 2) = 10$

52. $8(x - 3) + 4(3x - 2) = 4$

53. $10(1 - 7x) = 6 - 8(2 - 3x)$

54. $3(9 + 4x) = 6 + 5(2 - x)$

55. $(6 - x)(3 - x) - x(x + 2) = 0$

56. $5(x - 1)^2 - (5x + 4)(x - 3) = -2$

ECUACIONES CON LITERAL

Una ecuación literal es una ecuación en la que, además de la variable por resolver, aparecen otras letras que deben interpretarse también como números reales.

Ejemplo.

10. Resolver para x, $ax = bx + c$

$$ax - bx = c$$
$$x(a - b) = c$$
$$x = \frac{c}{a - b}, \quad a \neq b$$

11. Resolver para "c" la ecuación dada por

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{b - a}{ab} = \frac{1}{c}$$

$$c(b - a) = ab$$

$$c = \frac{ab}{b - a}$$

12. Si $S = \frac{a - aR^n}{1 - R}$, despejar la variable "$a$"

$S(1 \quad R) = a \quad a R^n$

$S(1 \quad R) = a(1 \quad R^n)$

$\frac{S(1 \quad R)}{1 \quad R^n} = a$ por lo que $a = \frac{S(1 \quad R)}{1 \quad R^n}$

13. Si $d = \frac{1}{2} g t^2 + Vot$, despejar la variable "$Vo$"

$d \quad \frac{1}{2} g t^2 = Vo$

$d \quad \frac{1}{2} g t^2 = Vo$

$\frac{d}{t} \quad \frac{1}{2} g t = Vo$ por lo que $Vo = \frac{d}{t} \quad \frac{g t}{2}$

Ejercicio 6.1.2.

Despejar en cada una de las siguientes ecuaciones la variable que se indica (Cuando esto se hace, diremos que se ha resuelto la ecuacion para la variable indicada.)

1. $F = \frac{9}{5} C + 32$, para C

2. $P = 2L + 2a$; para a

3. $d = vt$, para v

4. $d = vt$, para t

5. $V = \pi R^2 h$, para h

6. $A = \frac{bh}{2}$; para h

7. $Y = mx + b$; para m

8. $a = bgt + abg$, para g

9. $E = I(R + r)$; para R

10. $S = \frac{a}{1} \quad \frac{aR^n}{R}$; para a

11. $P = 2\pi R$; para R

12. $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$; para y

13. $2by + 5ab = 9by - 4ab$; para y

14. $S = p\,(1 + R^{-1})$; para R

15. $X - mnt = mnx$; para n

16. $\dfrac{m + 3n}{p} = \dfrac{x}{2}$; para n

17. $\dfrac{1}{c - y} + \dfrac{1}{c + y} = \dfrac{1}{y}$; para c

18. $S = \dfrac{m\,(n + 1)}{2}$; para n

19. $S = \dfrac{n}{2}\,(a + a_n)$; para a_n

20. $P = \dfrac{k}{v}$; para v

21. $W = \dfrac{kwd^2}{L}$; para k

22. $Rrt = I$; para r

23. $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$; para R_2

24. $K = \dfrac{mv^2}{2g}$; para g

25. $V = \dfrac{1}{3}\,\pi\,R^2h$; para h

26. $S = \dfrac{a}{1 - R}$; para R

27. $Xm = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$; para X_2

28. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$; y

29. $y - y_1 = m\,(x - x_1)$; para y

30. $S = \dfrac{a - RL}{1 - R}$; para R

31. $A = 2\,\pi\,R\,(R + h)$; para h.

ECUACIONES CON FRACCIONES

Una ecuación con fracciones, donde la variable se encuentra en el numerador de alguna fracción.

Ejemplos.

14. Resolver la ecuación:

$$\frac{2x - 3}{2} - \frac{1 - 2x}{3} = 1$$

Se sumarán las fracciones en el miembro izquierdo de la ecuación, para esto se obtendría primero su común denominador

$$\frac{3\,(2x - 3) - 2\,(1 - 2x)}{6} = 1$$

$$\frac{6x - 9 - (2 - 4x)}{6} = 1$$

$$\frac{6x - 9 - 2 + 4x}{6} = 1$$

$$\frac{10x - 11}{6} = 1$$

$$10x - 11 = 1\,(6)$$
$$10x - 11 = 6$$
$$10x = 6 + 11$$
$$10x = 17$$

$$x = \frac{17}{10}$$

15. Resolver la ecuación:

$$\frac{3}{2}(2x - 1) - \frac{4}{5}(x + 2) = \frac{3}{4}(x + 1)$$

$$\frac{6}{2}x - \frac{3}{2} - \frac{4}{5}x - \frac{8}{5} = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

$$\frac{6}{2}x - \frac{4}{5}x - \frac{3}{4}x = \frac{3}{2} + \frac{8}{5} - \frac{3}{4}$$

$$\frac{60x - 16x - 15x}{20} = \frac{30 + 32 - 15}{20}$$

$$\frac{29x}{20} = \frac{47}{20}$$

$$29x = \frac{47}{20}\,(20)$$

$$29x = 47$$

$$x = \frac{47}{20}$$

ECUACIONES CON FRACCIONES

Una ecuación con fracciones es aquella que contiene fracciones donde la variable o incógnita está en uno o más denominadores.

En los siguientes ejemplos se resolverá para la variable X.

16. $\dfrac{1-x}{x+7} = \dfrac{3}{5}$

$$1 - x = \frac{3}{5}(x + 7)$$

$$1 - x = \frac{3}{5}x + \frac{21}{5}$$

$$1 - \frac{21}{5} = \frac{3}{5}x + x$$

$$\frac{5 - 21}{5} = \frac{3x + 5x}{5}$$

$$-16 = \frac{8x}{5}$$

$$-16 = 8x$$

$$x = \frac{-16}{8}$$

$$x = -2$$

17. $\dfrac{x-3}{x-2} = \dfrac{-1}{x-2}$

$$\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)} = -1$$

$$x - 3 = -1$$

$$x = 2$$

Sin embargo, este valor no es solución de nuestra ecuación ya que, al sustituirlo en ella queda una indeterminación.

18. $$\frac{2 - \dfrac{1 + \dfrac{3-x}{6}}{4}}{4} = 1$$

$$2 - \frac{1 + \frac{3 - x}{6}}{4} = 4 \quad (1)$$

$$- \frac{1 + \frac{3 - x}{6}}{4} = 4 - 2$$

$$- \frac{1 + \frac{3 - x}{6}}{4} = 2$$

$$- \left(1 + \frac{3 - x}{6}\right) = 2 \quad (4)$$

$$- 1 - \frac{3 - x}{6} = 8$$

$$- \frac{3 - x}{6} = 8 + 1$$

$$- 3 + x = 9 \quad (6)$$

$$x = 54 + 3$$

$$\boxed{x = 57}$$

19. $$5 - \frac{2}{1 - \frac{1}{x + 1}} = 1$$

$$5 - \frac{\frac{2}{1}}{\frac{(x + 1) - 1}{(x + 1)}} = 1$$

$$5 - \frac{2(x + 1)}{(x + 1) - 1} = 1$$

$$- \frac{2x + 2}{x + 0} = 1 - 5$$

$$\frac{-(2x+2)}{x} = -4$$

$$-2x - 2 = -4x$$

$$4x - 2x = 2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Observaciones.

a) Se recomienda que después de encontrar la solución de la ecuación, se haga una comprobación para ver si los resultados son los correctos. Esta comprobación consiste en sustituir el valor de la variable en la ecuación que se da, para después efectuar operaciones y verificar si los miembros de la ecuación forman una igualdad.

b) Si se tiene una ecuación con fracciones, es necesario comprobar su solución, ya que al aplicar los teoremas de la igualdad y resolverla se pueden obtener valores que no sean raíces de la ecuación original.

Ejercicio 6.1.3.

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones

1. $\frac{x+4}{4} - \frac{x}{2} = 5$

2. $\frac{x}{3} + \frac{x+5}{5} = 1$

3. $\frac{2x-3}{6} + \frac{x}{4} = 2$

4. $\frac{4-5x}{7} - \frac{x}{2} = 3$

5. $\frac{x+1}{3} + \frac{x+4}{9} = 4$

6. $\frac{2-x}{8} + \frac{9-x}{12} = 1$

7. $\frac{9x+1}{3} - \frac{2x-3}{7} = \frac{2}{7}$

8. $\frac{2-7x}{5} - \frac{1+3x}{6} = \frac{3}{10}$

9. $\frac{x-4}{4} - \frac{5x-2}{6} = \frac{1}{3}$

10. $\frac{12-5x}{2} + \frac{7x+6}{12} = \frac{5}{6}$

11. $\frac{4-9x}{4} - \frac{8-x}{3} = \frac{x}{4}$

12. $\frac{2x+2}{4} - \frac{2x-3}{7} = \frac{x}{3}$

13. $\frac{3x - 2}{4} - x = \frac{4x - 6}{6}$

14. $x - \frac{12 - x}{4} = \frac{x + 2}{8}$

15. $\frac{x + 4}{5} = \frac{3 - x}{4} - \frac{x + 2}{6}$

16. $\frac{2x - 1}{3} = \frac{6x - 1}{2} + \frac{4 - 3x}{6}$

17. $\frac{4}{3}(x + 2) + \frac{3}{4}(x - 2) = 10$

18. $\frac{7}{8}(x - 3) + \frac{3}{4}(x - 1) = \frac{1}{8}$

19. $\frac{2}{3}(2x + 3) - \frac{5}{6}(1 - 6x) = 3$

20. $\frac{2}{7}(1 - 2x) - 1 = \frac{4}{7}(2x - 1)$

21. $\frac{2}{9}(7x - 1) - \frac{9}{2}(1 - 7x) = \frac{3}{2}(x - 1)$

22. $\frac{3}{4}(x - 3) - \frac{4}{3}(3x + 5) = \frac{1}{4}(3 + x) + 1$

23. $\frac{5}{7}\left(1 - \frac{7}{5}x\right) + \frac{2}{3}\left(3x - \frac{3}{2}\right) = 2 - \frac{4}{5}\left(x - \frac{5}{4}\right)$

24. $0.05(x + 10) - 0.02x = 3.2$

25. $0.001(x - 1) - 0.01x + 1.1 = 0$

26. $\frac{3}{x} - \frac{3}{5} = \frac{2}{x} + \frac{9}{x}$

27. $\frac{x - 6}{3x} = \frac{4x - 12}{6x}$

28. $7 - \frac{2}{x} = 8 - \frac{6}{x}$

29. $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 + 6x} = \frac{2}{x + 6}$

30. $\frac{x + 1}{x + 3} = \frac{4}{5}$

31. $\frac{x - 1}{x + 4} = \frac{2}{3}$

32. $\dfrac{2}{3x-1}+\dfrac{3}{2x+3}=\dfrac{1}{6x-2}$

33. $\dfrac{4}{3-x}-\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{2}{3x-9}$

34. $\dfrac{2}{5-x}+\dfrac{8}{x+3}=\dfrac{2}{15+2x-x^2}$

35. $\dfrac{2}{2x-1}+\dfrac{3}{3x+1}=\dfrac{5}{6x^2-x-1}$

36. $\dfrac{x}{2x+1}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{x^2-5}{2x^2+3x+1}$

37. $\dfrac{3}{x-8}+\dfrac{2x}{x+5}=\dfrac{2x^2+2}{x^2-3x-40}$

38. $\dfrac{2x}{x^2-3x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{x-3}$

39. $\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{x+5}{x-1}$

40. $\dfrac{1}{x^2-4x+4}=\dfrac{2}{2x^2-3x+1}$

41. $2-\dfrac{3}{2-\dfrac{3}{x-1}}=2$

42. $\dfrac{4}{1-\dfrac{3}{1+2x}}+3=5$

43. $\dfrac{1+\dfrac{2-x}{4}}{\dfrac{3}{3}}=1$

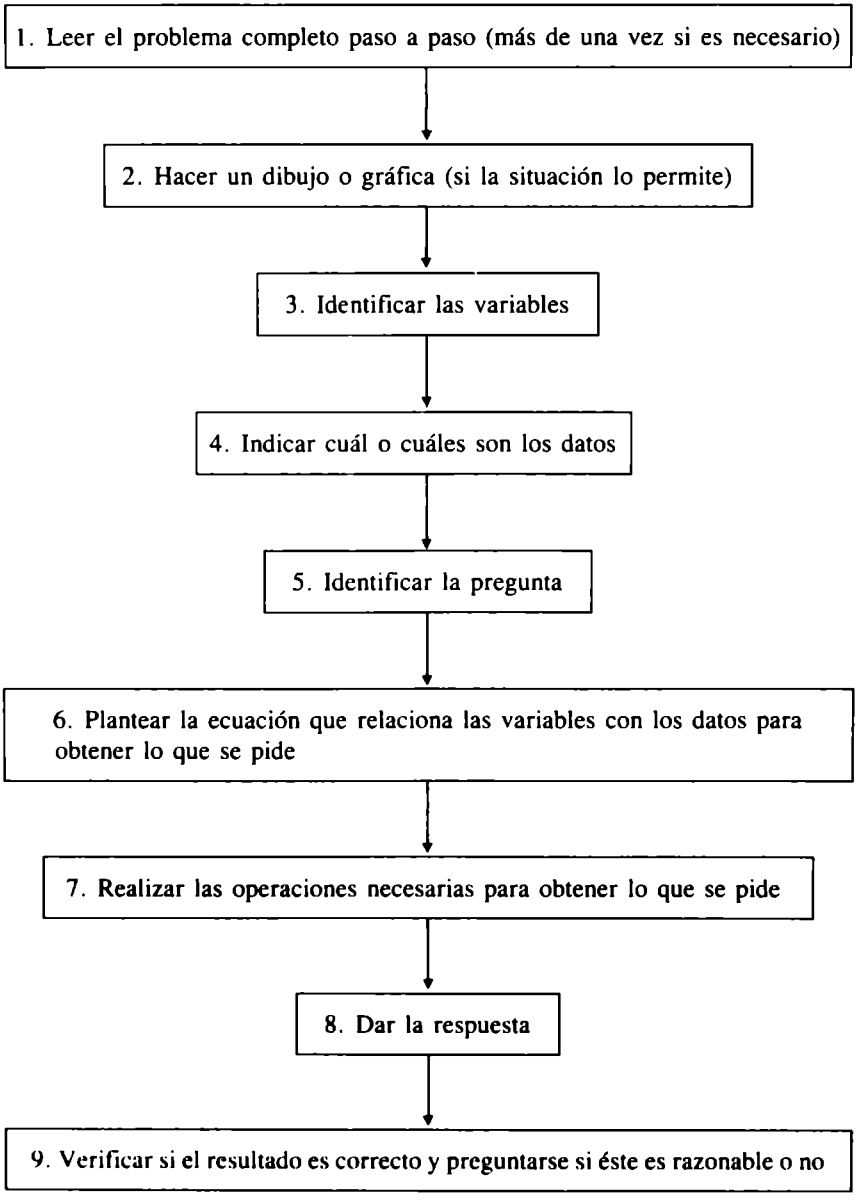
44. $\dfrac{2+\dfrac{5-x}{2}}{\dfrac{5}{2}}=1$

45. $\dfrac{2x-1}{2x+3}=\dfrac{2x+3}{2x+1}$

SITUACIONES OBJETIVAS QUE DAN LUGAR A UN MODELO MATEMÁTICO QUE INVOLUCRE LA SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL

En algunas aplicaciones del álgebra se pueden tener situaciones o problemas expresados con palabras que pueden ser traducidas a una ecuación con una sola variable. Para la resolución de este tipo de situaciones se sugiere la siguiente estrategia.

Estrategia para la resolución de un problema



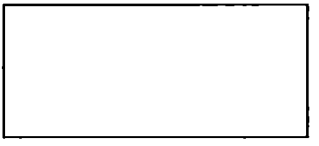
Los problemas expresados en palabras los presentamos en diferentes tipos.

1) Problemas geométricos.

En estos problemas se presentan ciertos datos con relación a una situación geométrica, con las fórmulas o propiedades de esas situaciones se establecerán las ecuaciones necesarias para obtener los valores que se pidan.

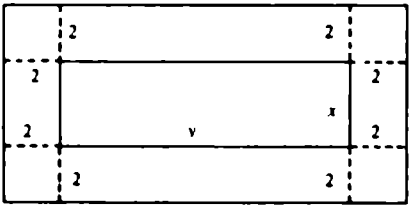
Ejemplos.

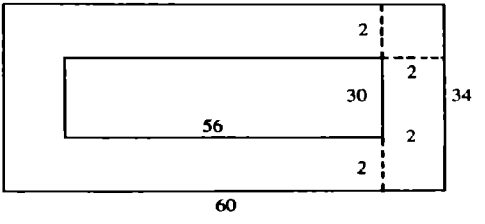
20. Obtener las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 150 cm. si su ancho es dos terceras partes de su largo.

Proceso mental	*Aplicación al problema*
1. *Leer el problema* completo paso a paso (más de una vez si es necesario)	
2. *Hacer un dibujo* (si es que la situación lo permite)	 ancho largo
3. *Identificar e indicar las variables.*	L = largo a = ancho p = perímetro
4. *¿Cuáles son los datos?*	p = 150 cm. $a = (2/3)\ L$
5. *¿Cuál es la pregunta?*	Obtener las dimensiones del rectángulo. Es decir a = ? L = ?
6. *Plantear la ecuación que relaciona las variables con los datos para obtener lo que se pide.*	$p = 2a + 2L$
7. *Procedimiento u operaciones para obtener lo que se pide.*	$P = 2a + 2L$ como $p = 150$ y $a = (2/3)\ L$ entonces $150 = 2\ ((2/3)\ L) + 2L$ $150 = (4/3)\ L + 2L$

	$150 = \dfrac{4L + 6L}{3}$ $150\,(3) = 10L$ $450 = 10L$ $L = 450/10$ así $L = 45$ y como $a = (2/3)\,L$ $a = (2/3)\,(45)$ $a = 30$
8. Dar la respuesta	a = ancho = 30 L = Largo = 45
9. *Verificación.*	45 30 a = ancho = $(2/3)(45) = 90/3 = 30$ $p = 45 + 45 + 30 + 30 = 150$

21. Una pintura tiene forma rectangular, cuya base es 4 pulgadas menor que el doble de su altura. Si el marco tiene 2 pulgadas de ancho y un área de 360 pulgadas cuadradas, obtener las dimensiones de la pintura sin el marco.

Estrategia	*Aplicación*
1. Leer el problema	
2. Hacer un dibujo	

3. Identificar variables	sea x = ancho de la pintura sin marco y = largo de la pintura sin marco Asm = área de la pintura sin marco $x + 4$ = ancho de la pintura con marco $y + 4$ = largo de la pintura con marco Acm = área de la pintura con marco
4. ¿Cuáles son los datos?	$y = 2x - 4$ Ancho del marco = 2 pulg Área del marco = $Am = Acm - Asm = 360$ pulg^2
5. ¿Cuál es la pregunta?	Obtener las dimensiones de la pintura son el marco. Es decir, $x = ?$ $y = ?$
6. Ecuación que relaciona las variables con los datos para obtener lo que se pida.	$Am = Acm - Asm$
7. Procedimiento para obtener lo que se pide.	$Am = Acm - Asm$ $360 = (y + 4)(x + 4) - (x)(y)$ $360 = [2x - 4 + 4](x + 4) - x(2x - 4)$ $360 = (2x)(x + 4) - (2x^2 - 4x)$ $360 = 2x^2 + 8x - 2x^2 + 4x$ $360 = 12x$ $\frac{360}{12} = x$ así $x = 30$ y como $y = 2x - 4$ entonces $y = 2(30) - 4 = 56$
8. Respuesta	Ancho de las pintura sin marco = 30 largo de la pintura sin marco = 56
9. Verificación	

	$Acm = 34 \times 60 = 2040$ $Asm = 56 \times 30 = 1680$ $Am = Acm - Asm = 2040\text{-}1680 = 360$

Ejercicio 6.1.4.

Resolver cada uno de los siguientes problemas. En cada uno de ellos seguir e indicar cada uno de los pasos dados en la estrategia mencionada en esta sección.

1. Si un lado de un triángulo mide la quinta parte de su perímetro, el segundo lado mide la décima parte del perímetro y el tercer lado mide 5. ¿Cuál es el perímetro?
2. Un atleta participa en una competencia de Triatlón; en él recorre la mitad de la distancia corriendo, 10 km en bicicleta y la última tercera parte nadando, ¿qué distancia recorrió el atleta?
3. Obtener las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es de 100 cm. si su altura es una cuarta parte de su base.
4. El lado mayor de una triángulo mide el triple del lado menor y 3 cm. más que el tercer lado. Si el perímetro del triángulo mide 18 cm. ¿Cuál es la longitud de cada lado?
5. Cada uno de los lados de un triángulo isósceles tiene 5 cm. más de longitud que la base del triángulo. El perímetro mide 38 cm. Encuentre la longitud de cada lado.
6. La longitud de un rectángulo excede a su anchura en 12 unidades. Si cada dimensión se incrementa en 4 unidades, el área se incrementará en 96 unidades cuadradas. Encuentre las dimensiones del rectángulo.
7. Obtener el área de un triángulo equilátero si uno de sus lados mide 6.
8. La altura de un triángulo es 2/3 de la longitud de su base. Si la altura se incrementa en 3 pulgadas y la base se disminuye en 3 pulgadas, el área quedaría inalterada. Encuentre la longitud de la base y la altura.
9. Si el ancho de un rectángulo es de 3 cm. más que 2/3 partes de su longitud y su perímetro es de 136 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
10. Si la base de un rectángulo es 2 cm. menor que el doble de la altura, y el perímetro es de 56 cm. Obtener las dimensiones del rectángulo.
11. La suma de la base y la altura de un triángulo es de 95 pulgadas. Obtener el área del triángulo si su base mide 10 pulgadas menos que el doble de su altura.
12. Si el largo de un rectángulo es igual al doble de su ancho menos 5 cm. ¿Cuáles son las dimensiones si el perímetro mide 68 cm?
13. Un trozo de madera de 9 metros se divide en dos partes, de tal manera que la longitud de una de ellas es las 3/4 partes de la longitud de la otra. Hallar la longitud de cada parte.

14. Un trozo de cuerda de 12 metros se divide en dos partes, de tal manera que la longitud de una de ellas es dos terceras partes del total de la cuerda. Si con el trozo más pequeño se forma un cuadrado, obtener el lado del cuadrado y si con el trozo de mayor longitud se forma una circunferencia, obtener el radio de la circunferencia.
15. Un jardín de 20 metros de largo por 12 de ancho, tiene una acera de ancho uniforme que la circunda. Si el área de esta acera es 144 metros cuadrados, hallar su ancho.
16. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo es 2 cm. más que el otro. Si el perímetro es de 24 cm. y la hipotenusa es 10 cm, hallar las medidas de los catetos.
17. Un agricultor tiene 1000 metros de alambre de puas y desea cercar un solar rectangular, en el cual uno de sus largos da a un río que no necesita cerca. El largo es de 100 metros más que el ancho. ¿Cuál es el área de dicho solar?
18. Un cuadrado de 2 cm. por lado es recortado en cada esquina de un pedazo de cartulina rectangular cuyo largo es el doble de su ancho aumentado en 2 cm. Las cuatro solapas así formadas, se doblan y se pegan para formar una caja cuyo volumen es de 216 cm^3. ¿Cuáles son las dimensiones de dicha caja?

II. Problemas numéricos

En este tipo de problemas se expresan relaciones existentes entre ciertos números y se determinarán los números que cumplan con esas relaciones.

Ejemplo 22.

Obtener tres números enteros consecutivos cuya suma sea 84.

Proceso mental	*Aplicación*
1. Leer el problema	
2. Hacer un dibujo si la situación lo permite	no se aplica
3. Identificar las variables	Sean x, y, z, los tres números consecutivos
4. ¿Cuáles son los datos?	$Y = x + 1$ $Z = x + 2$ $x + y + z = 84$
5. ¿Cuál es la pregunta?	Obtener los tres números enteros consecutivos de tal forma que la suma sea 84.

6. Ecuación que relaciona las varibles con los datos, para obtener lo que se pide	$x + y + z = 84$ ó $x + (x + 1) + (x + 2) = 84$
7. Procedimiento para obtener lo que se pide	$x + (x + 1) + (x + 2) = 84$ $x + x + 1 + x + 2 = 84$ $3x + 3 = 84$ $3x = 84 - 3$ $3x = 81$ $x = \frac{81}{3}$ $x = 27$ Así los números son $x = 27, x + 1 = 28, x + 2 = 29$
8. Respuesta	Los números son 27, 28 y 29
9. Verificación	$27 + 28 + 29 = 84$ $84 = 84$

Ejemplo 23.

La cuarta parte de un número es 10 unidades menor que la tercera parte de él. Obtener el número.

Proceso mental	*Aplicación*
1. Leer el problema	
2. Hacer un dibujo si la situación lo permite	
3. Identificar las variables	Sea x el número
4. ¿Cuáles son los datos?	$\frac{x}{4}$ la cuarta parte del número x $\frac{x}{3}$ la tercera parte del número x
5. ¿Cuál es la pregunta?	Obtener un número de tal manera que la cuarta parte de él es 10 unidades menor que la tercera parte de él.

6. Ecuación que relaciona las variables con los datos	$\frac{x}{4} = \frac{x}{3} - 10$
7. Procedimiento para obtener lo que se pide	$\frac{x}{4} = \frac{x}{3} - 10$ $10 = \frac{x}{3} - \frac{x}{4}$ $10 = \frac{4x - 3x}{12}$ $120 = 4x - 3x$ $120 = x$
8. Respuesta	El número es 120
9. Verificación	$\frac{120}{4} = \frac{120}{3} - 10$ $30 = 40 - 10$ $30 = 30$

Ejemplo 24.

El dígito de las decenas de un número de dar cifras supera en 4 al dígito de las unidades. Si el número supera en 12 al séxtuplo de la suma de los dígitos. Obtener el número.

Proceso mental	*Aplicación*
1. Leer el problema	
2. Hacer un dibujo si la situación lo permite	
3. Identificar las variables	Sea m = el número buscado x = dígito de las unidades del número m y = dígito de las decenas del número m

	Observación. Un número de dos digítos se puede representar como una suma extendida en potencias de 10, por ejemplo: $82 = 8x\ 10^1 + 2x\ 10^0$ $57 = 5x\ 10^1 + 7x\ 10^0$
4. ¿Cuáles son los datos?	$y = x + 4$ $m = (x + 4)\ (10) + (x)\ (1)$ $m = 11x + 40$ $m = 6\ (x + y) + 12$
5. ¿Cuál es la pregunta?	
6. Ecuación que relaciona las variables con los datos	$m = 6\ (x + y) + 12$
7. Procedimiento para obtener lo que se pide	$m = 6\ (x + y) + 12$ $11x + 40 = 6\ (x + x + 4) + 12$ $11x + 40 = 6\ (2x + 4) + 12$ $11x + 40 = 12x + 24 + 12$ $11x + 40 = 12x + 36$ $40 - 36 = 12x - 11x$ $4 = x$ como $y = x + 4$ entonces $y = 4 + 4 = 8$
8. Respuesta	Dígito de las unidades es $x = 4$ dígito de las decenas es $y = 8$ y el número pedido es 84
9. Verificación	$8 = 4 + 4$ $84 = 6\ (8 + 4) + 12$ $84 = 72 + 12$ $= 84$

Ejercicio 6.1.5.

Resolver los siguientes problemas. En cada uno de ellos seguir e indicar cada uno de los pasos de la estrategia para resolverlos.

1. La suma de tres enteros pares consecutivos es 66. Obtener esos números.
2. La suma de tres enteros impares consecutivos es 105. Obtener los números.
3. Si al doble de un número se le aumenta 8, resulta 74. Obtener el número.
4. Si el triple de un número es disminuido en 20, resulta 100. ¿Cuál es el número?

5. La diferencia entre un quinto de un número y un sexto del mismo número es 4. Obtener el número.
6. La suma de dos números es 50. Uno de ellos es el cuádruple del otro. Obtener ambos números.
7. Un número es 2/3 de otro y la suma de ambos es 150. Obtener ambos números.
8. La suma de tres números es 135. El segundo es el doble del primero, y el tercero es 5 menos que el primero, obtener los tres números.
9. La diferencia de dos números es 24 y su suma es 84. Hallar los números.
10. El mayor de dos números excede al menor por 12. Si su suma es 100, ¿cuáles son los números?
11. Según la leyenda Euclides fue el autor del siguiente acertijo clásico: "Una mula y un burro llevaban sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el burro de su pesada carga, a lo que la mula le dijo: ¿De qué te quejas? Si yo tomara un saco de los tuyos, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco tu carga se igualaría a la mía". ¿Cuántos sacos llevaba cada quien?
12. Cuatro amigos ponen entre todos $80.00. Si el dinero del primero de ellos es aumentado en tres, el del segundo es reducido en tres pesos, al del tercer amigo se le triplica su dinero y al del cuarto se le reduce a la tercera parte, los cuatro amigos tendrán la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto dinero tenía cada uno de ellos?
13. La cabeza de una lagartija mide 5 cm. de largo. La cola mide la longitud de la cabeza más la mitad del cuerpo. El cuerpo mide igual a la cabeza, más la cola. ¿Cuánto mide la lagartija?
14. Entre los obreros de una fábrica se reparte un carrete de alambre de la siguiente manera: Miguel ocupó la mitad del carrete, la mitad de lo que quedó se lo llevó Pedro, de lo poco que quedó Antonio tomó la mitad y finalmente Juan tomó 2/5 del resto. En el carrete quedaron sólo 30 cm. ¿Qué longitud tenía originalmente el carrete de alambre?
15. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 11. Si el número supera en 1 al quíntuple de la suma de sus dígitos. Hallar el número.
16. En un número de dos dígitos, el que ocupa el lugar de las decenas es dos menos que el de las unidades. El mismo número es igual a la suma de ocho veces el dígito de las decenas y cuatro veces el de las unidades reducidas por 2. Obtener el número.
17. La suma de los dos dígitos de un número es 9. Si se resta 3 al número formado al invertir el orden de los dígitos del número original resulta en la tercera parte. Obtener el número.
18. La señora Martínez entró en una tienda a comprar ropa para sus hijos y gastó exactamente la mitad del dinero que llevaba. Al salir descubrió que tenía tantos centavos como pesos había tenido al entrar y tantos pesos como la mitad de los centavos que había tenido; ¿cuánto dinero tenía al entrar?

19. La suma de los dígitos de un número de tres cifras es de 12. El dígito de las unidades supera en 1 al de las centenas. Si 90 veces el dígito de las unidades supera en 6 al número, obtener el número.
20. La suma de tres números es 111. El segundo es cinco unidades mayor que el menor y el tercero es 10 unidades mayor que el menor. Encontrar los números.

III Problemas de edades

En estos problemas se presentan una serie de datos sobre edades de varios sujetos y relaciones que existen entre ellos y se pide la edad de alguno o algunos de los sujetos.

Ejemplo 25.

Hace 18 años Juan era exactamente tres veces más viejo que su hijo. Y ahora es precisamente dos veces más viejo que su hijo. ¿Cuántos años tiene Juan y su hijo?

<table>
<tr><th>Proceso mental</th><th>Aplicación</th></tr>
<tr><td>1. Leer el problema</td><td></td></tr>
<tr><td>2. Identificar las variables</td><td>x = edad actual del hijo
y = edad actual de Juan
$x - 18$ = edad del hijo hace 18 años
$y - 18$ = edad de Juan hace 18 años</td></tr>
<tr><td>3. ¿Cuáles son los datos?</td><td>* Hace 18 años Juan era exactamente tres veces más viejo que su hijo.
Es decir $y - 18 = 3(x - 18)$
La edad actual de Juan es dos veces más viejo que su hijo.
Es decir, $y = 2x$</td></tr>
<tr><td>4. Representación gráfica en forma de cuadro</td><td><table><tr><th>Sujetos</th><th>Edad actual</th><th>Edad hace 18 años</th></tr><tr><td>Juan</td><td>y</td><td>$y - 18$</td></tr><tr><td>Hijo</td><td>x</td><td>$x - 18$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>5. ¿Cuál es la pregunta?</td><td>¿Cuáles son las edades de Roberto y su hijo?</td></tr>
</table>

6. Ecuación que relaciona las variables con los datos	$y = 2x$ $y - 18 = 3\ (x - 18)$
7. Procedimiento para obtener lo que se pide	$2x - 18 = 3x - 54$ $54 - 18 = 3x - 2x$ $36 = x$
8. Dar la respuesta	Edad actual de Juan es $y = 2(36) = 72$ Edad actual del hijo es $x = 36$
9. Verificación	2 (Edad actual del hijo) = Edad de Juan $2\ (36) = 72$ Edad hace 18 años de Juan = 3 (Edad del hijo hace 18 años) $72 - 18 = 3\ (36 - 18)$ $54 - 3\ (18) = 54$

Ejemplo 26.

Carlos tiene exactamente tres veces la edad de Miriam, pero dentro de dos años sólo será dos veces mayor que ella. ¿Qué edad tiene cada uno?

Proceso mental	*Aplicación*
1. Leer el problema	
2. Identificar las variables	x = Edad actual de Carlos y = Edad actual de Miriam
3. ¿Cuáles son los datos?	* Carlos es exactamente tres veces la edad de Miriam $x = 3y$ * Carlos dentro de dos años sólo será dos veces mayor que ella. $(x + 2) = 2\ (y + 2)$
4. Representación de la información en forma de cuadro	

Sujetos	*Edad actual*	*Edad dentro de dos años*
Carlos	x	$x + 2$
Miriam	y	$y + 2$

5. ¿Cuál es la pregunta?	¿Cuáles son las edades de Carlos y Miriam?
6. Ecuación que relaciona las variables con los datos	$x = 3y$ $(x + 2) = 2(y + 2)$
7. Procedimiento para obtener lo que se pide	$x + 2 = 2(y + 2)$ $3y + 2 = 2y + 4$ $3y - 2y = 4 - 2$ $y = 2$
8. Respuesta	Edad actual de Miriam es $y = 2$ y la de Carlos es $x = 3y = 3(2) = 6$
9. Verificación	Edad de Carlos = 3 (Edad de Miriam) $6 = 3(2)$

Ejercicio 6.1.6.

1. Si se toma cuatro veces la edad que tendrá Miguel dentro de cuatro años y se le restan cuatro veces la edad que tenía hace cuatro años, resultarían exactamente los años que tiene Miguel ahora. Calcular los años de Miguel.
2. Dentro de dos años la edad de Alfredo sería el triple de la de Jorge hace cinco años. Cuatro veces la edad de Jorge es diez años más que dos veces la edad que Alfredo tenía hace un año. Obtener las edades de Alfredo y Jorge.
3. María tiene dos hijas, una de ellas es diez veces mayor que la otra. Hace tres años la edad de María era tres veces la suma de las edades de las hijas y el próximo año su edad será el doble de la suma de las edades de sus hijas. Obtener las edades de María y sus hijas.
4. La edad de Susana dentro de cuatro años será cuatro veces la edad actual de su hijo. La edad de su hijo dentro de cuatro años será la mitad de la edad actual de Susana. Indicar las edades de Susana y su hijo.
5. Hace dos años Sonia tenía la mitad de la edad de su madre. Dentro de diez años la edad de Sonia será 5/8 de la que tenga su mamá. ¿Cuál es la edad de Sonia?
6. Luis le dice a José: ¿Qué edad tengo si ésta es el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la que tú tienes. Además cuando tú tengas la edad que yo tengo, nuestras edades sumarían 63 años?
7. La edad actual de Pedro es el doble de la de su hermana. Hace cuatro años Pedro tenía el triple de la correspondiente a su hermana. ¿Cuál es la edad actual de Pedro?
8. Jesús tiene 24 años. Su edad es el doble de la que tenía Alicia cuando Jesús tenía la edad que ahora tiene Alicia. ¿Cuál es la edad de Alicia?

9. En una familia hay dos hermanas, la edad de la mayor es 20 años y la edad de la menor es de 5 años. ¿Dentro de cuántos años la edad de la menor será la mitad de la edad de la mayor?

IV Problemas de mezclas y de dinero.

En este tipo de problemas se manejan combinaciones de soluciones con diferentes porcentajes de una sustancia, para obtener una solución con un cierto porcentaje de la misma. Otro tipo de problemas de mezcla se involucra con mercancías de diferentes valores que se mezclan para obtener una combinación con un precio específico.

Ejemplo 27.

¿Cuántos litros de una solución de agua oxigenada al 30% deben combinarse, con cuántos litros de una solución de agua oxigenada al 3%, para obtener 30 litros de una solución de agua oxigenada al 12%?

Proceso mental	*Aplicación*
1. Leer el problema	
2. Hacer una gráfica o dibujo si la situación lo permite	
3. Identificar variables	x = Número de litros de agua oxigenada al 30% en la mezcla al 12% y = Número de litros de agua oxigenada al 3% en la mezcla al 12%
4. ¿Cuáles son los datos?	Oxígeno en la mezcla al 30% $= 0.30x$ Oxígeno en la mezcla al 3% $= 0.03y$ Número de litros de la mezcla $= x + y = 30$ Oxígeno en la mezcla al 12% $= .12\ (x + y)$

5. Representación de la información en forma de cuadro

	Núm. de litros	*Porcentaje*	*Oxígeno*
Agua oxigenada al 30%	x	0.30	$0.30x$
Agua oxigenada al 3%	y	0.03	$0.03y$
Mezcla (agua oxigenada al 12%)	$x + y$	0.12	$0.12(x + y)$

6. ¿Cuál es la pregunta?

Obtener cuántos litros de la solución al 30% de oxígeno y cuántos litros de la solución al 3% de oxígeno deben mezclarse para obtener 30 litros de solución al 12% de oxígeno. Es decir, obtener x y y

7. Ecuación que relaciona las variables con los datos

$$x + y = 30$$
$$0.30x + 0.03y = 0.12\ (x + y)$$

8. Procedimiento para obtener lo que se pide

$$0.30x + 0.03y = 0.12x + 0.12y$$
$$0.30x - 0.12x = 0.12y - 0.03y$$
$$0.18x = 0.09y$$
$$\frac{0.18x}{0.09} = y$$
$$2x = y$$

y como $x + y = 30$

$$y = 30 - x$$

y también $y = 2x$ entonces

$$2x = 30 - x$$
$$2x + x = 30$$
$$3x = 30$$
$$\boxed{x = 10}$$

	$y \qquad y = 2x$ $y = 2(10)$ $\boxed{y = 20}$
9. Respuesta	La mezcla debe tener 10 litros de agua oxigenada al 30% y 20 litros al 3%
10. Verificación	$10\ (.30) + 20\ (.03) = 30\ (.12)$ $3 + 0.6 = 3.6$ $3.6 = 3.6$

Ejemplo 28.

El precio de 30 kg de una mezcla de dos tipos de café es de \$102.00 el kg., sabiendo que uno de los dos tipos de café vale \$93.00 el kg., y el otro cuesta \$120.00 el kg. ¿Cuántos kilos de cada tipo hay en la mezcla?

Proceso mental	*Aplicación*
1. Leer el problema	
2. Hacer un dibujo si la situación lo permite	
3. Identificar variables	A = Número de kilos de café tipo 1 B = Números de kilos de café tipo 2
4. ¿Cuáles son los datos?	\$93.00 por kg del café tipo 1 \$120.00 por kg del café tipo 2 Número de kilos de la mezcla = $A + B = 30$ \$102.00 por kg de la mezcla
5. ¿Cuál es la pregunta?	¿Cuántos kilos de cada tipo de café debe haber en la mezcla para que tenga un precio de \$102.00 por kg?
6. Ecuación que relaciona las variables con los datos	$A\ (93) + B\ (120) = (30)\ (102)$ $A + B = 30$
7. Procedimiento para obtener lo que se pide	$A = 30 - B$ $93A + 120\ B = 3060$ $93\ (30 - B) + 120\ B = 3060$ $2790 - 93\ B + 120\ B = 3060$

	$27B = 3060 - 2790$ $27B = 270$ $B = \frac{270}{27}$ $B = 10$ y $A = 30 - B$ $A = 30 - 10$ $A = 20$
8. Respuesta	La mezcla de los 30 kg de café debe tener 20 del tipo 1 y 10 del tipo 2.
9. Verificación	$(20)(93) + 10(120) = 30(102)$ $1860 + 1200 = 3060$ $3060 = 3060$

Ejercicio 6.1.7.

1. Tres hermanos participaron en un sorteo, en el cual resultaron agraciados. De acuerdo a la cooperación en la compra del boleto, el premio se repartió de la siguiente manera: El mayor recibió $25.000, el menor una tercera parte del premio y el otro hermano una cuarta parte del premio. ¿En cuánto consistió dicho premio?
2. ¿Cuántos kilogramos de un mineral que contiene 60% de plata pura y cuántos de un mineral que contiene 90% deberán mezclarse para obtener 6 kilogramos de aleación que tenga un 80% de plata pura?
3. Se tiene una mezcla de 30 litros de alcohol y agua. El 60% del volumen de dicha mezcla es alcohol. Si se desea que la cantidad de volumen permanezca constante, pero ahora con un 30% de alcohol. Encontrar el número de litros de la mezcla que se deben intercambiar por un volumen igual de agua.
4. Una persona que realiza pronósticos recibe 500 pesos por cada pronóstico acertado y tiene que pagar 100 pesos por cada pronóstico erróneo. Si realiza 30 pronósticos y obtiene 12,000 pesos, obtener el número de pronósticos erróneos.
5. Un fabricante de vino tiene una gran provisión de cierto vino que vale $4.40 el litro y otro de $16.90 el litro. ¿Cuántos litros de cada uno debe mezclarse para obtener 500 litros que desea vender a $8.00 el litro?
6. Se tiene una gran producción de un determinado artículo cuyo costo de fabricación es de $4.000 por unidad. Después de determinado tiempo en el mercado, los artículos restantes se ofrecieron con un descuento del 10%. Si se desea que los artículos con descuento sigan dejando un 18% de ga-

nancia sobre el precio de venta. ¿Cuál es el precio con el que se debe ofrecer originalmente?

7. José Luis la última semana ganó 250 dólares incluyendo el pago por horas extras. El sueldo asciende a 200 dólares más que lo recibido por las horas extras. ¿Cuál es el sueldo de José Luis sin las horas extras?
8. Una planta y su maceta cuesta \$150.00. Si la planta sola cuesta 80 más que la maceta. ¿Cuánto cuesta la maceta?
9. Si dos personas poseen la misma cantidad de dinero, ¿cuánto dinero tendrá que darle una de ellas a la otra, para que esta última tenga 20 dólares más?
10. Un empleado obtuvo 8% de aumento, lo cual equivale a \$1 000.00. ¿Cuál era el antiguo salario y el nuevo salario?
11. El radiador de un coche contiene 10 litros de una mezcla de agua y 10% de anticongelante. ¿Qué cantidad de esta mezcla debe vaciarse y reemplazarse por anticongelante puro para obtener una mezcla al 60% en el radiador?
12. En un supermercado se mezclan dos tipos de nuez, una que cuesta \$100.00 el kilo y otra de \$150.00 el kilo. Si la mezcla pesa 10 kg y se vende a \$135.00 el kilo. ¿Cuántos kilogramos hay de cada tipo de nuez en la mezcla?
13. Diana compro \$15.25 en estampillas de \$0.50 y de \$0.25. Si adquirió 45 de estas estampillas. ¿Cuántas de cada clase compró?
14. Marco tiene 5 monedas más de \$0.50 que dé \$0.25. Si el valor total es de \$10.00. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?
15. En un teatro se vendieron 500 boletos por un total de \$32.500. Si se vendieron boletos a \$50 y \$75. ¿Cuántos se vendieron de cada tipo?

V Problemas de trabajo

En estos problemas se desarrolla un trabajo específico en un determinado tiempo, en el que se supone una razón uniforme de trabajo. Por ejemplo si Luis se tarda 5 horas en hacer un jardín, entonces su razón de trabajo es $\left(\frac{1}{5}\right)$ del jardín por hora, o si Luis trabaja durante 3 horas en el jardín entonces la parte fraccional del trabajo realizado en el jardín es 3/5.

Puede ser que en estos problemas se nos dé la información de en cuánto tiempo realizan juntos dos o más personas, para determinar en cúanto tiempo lo hacen por separado, o tal vez se da la información del tiempo que realizan las personas por separado en realizar un cierto trabajo y se pida en cuánto tiempo la realizarían juntos. Observación: al sumar la parte fraccional del trabajo realizado por cada una de las personas se obtendría el trabajo completo. Es decir si $x/5$ es la parte fraccional del trabajo realizado por la persona A y $x/2$ es la parte fraccional del trabajo realizado por la persona B entonces

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{2} = 1$$

donde 1 representa el trabajo total y la suma de sus partes tiene que dar la unidad.

Ejemplo 29.

Luis se tarda 5 días en hacer un jardín y Manuel se tarda 3 días en el mismo jardín. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos juntos en hacer el jardín?

<table>
<tr><th>Proceso mental</th><th>Aplicación al problema</th></tr>
<tr><td>1. Leer el problema</td><td></td></tr>
<tr><td>2. Hacer un dibujo si la situación lo permite</td><td></td></tr>
<tr><td>3. Identificar variables</td><td>x = Número de horas que realizan el trabajo del jardín juntos</td></tr>
<tr><td>4. ¿Cuáles son los datos?</td><td>Luis se tarda 5 días en hacer el jardín, Miguel se tarda 3 días en hacer el jardín

$\frac{x}{5}$ = parte fraccional de jardín desarrollado por Luis

$\frac{x}{3}$ = parte fraccional del jardín desarrollado por Miguel</td></tr>
<tr><td>5. ¿Cuál es la pregunta?</td><td>Obtener el número de horas que realizan el trabajo Luis y Miguel a la vez.
Es decir, x = ?</td></tr>
<tr><td>6. Representación de la información en cuadro</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Razón de trabajo</th><th>×</th><th>Número de horas trabajadas</th><th>=</th><th>Parte fraccional del trabajo desarrollado</th></tr>
<tr><td>Luis</td><td>$\frac{1}{5}$</td><td></td><td>x</td><td></td><td>$x/5$</td></tr>
<tr><td>Miguel</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td></td><td>x</td><td></td><td>$x/3$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>7. Ecuación que relaciona las variables con los datos</td><td>$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} = 1$</td></tr>
</table>

	Es decir, la parte fraccional desarrollada por Luis más la parte fraccional desarrollada por Miguel hace la totalidad del jardín
8. Procedimiento para obtener lo que se pide	$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} = 1$ $\frac{3x + 5x}{15} = 1$ $\frac{8x}{15} = 1$ $x = \frac{15}{8}$ $x = 1.875$ $x = 1$ hora y $52.5'$

Ejemplo 30.

Roberto el pintor puede pintar una habitación en cinco días menos que lo que le toma a Manuel hacerlo. Trabajando juntos, ellos completan el trabajo en 6 días. ¿Cuánto tiempo le toma a cada uno hacer el trabajo solo?

Proceso mental	*Aplicación al problema*
1. Leer el problema	
2. Hacer un dibujo si la situación lo permite	
3. Identificar variables	x = Número de días en que Roberto hace el trabajo y = Número de días en que Manuel hace el trabajo
4. ¿Cuáles son los datos?	$y = x + 5$ 6 = Número de días en que Roberto y Manuel realizan el trabajo
5. ¿Cuál es la pregunta?	Obtener el número de días que tarda cada pintor por separado en hacer el trabajo. Es decir, $x = ?$ $y = ?$

6. Representación de la información en cuadro

	Razón de trabajo	× *Número de días trabajados*	= *Parte proporcional del trabajo desarrollado*
Roberto	$\frac{1}{x}$	z	z/x
Manuel	$\frac{1}{y}$	z	z/y
Roberto y Manuel	$\frac{1}{6}$	z	$z/6$

7. Ecuación que relaciona las variables con los datos

$$\frac{z}{6} = \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$$

$$z\left(\frac{1}{6}\right) = z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

8. Procedimiento para obtener lo que se pide

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{pero } y = x + 5$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{x + 5 + x}{x(x+5)}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x}$$

$$x^2 + 5x = 12x + 30$$

$$x^2 + 5x - 12x - 30 = 0$$

$$x^2 - 7x - 30 = 0$$

$$(x - 10)(x + 3) = 0$$

	$x = 10$ y $y = x + 5$ $y = 15$
9. Respuesta	$x = 10$ que necesita Roberto $y = 15$ que necesita Manuel

Ejercicio 6.1.8.

1. *A* demora 3 horas en hacer cierto trabajo, en tanto que *B* demora 4 horas. ¿Cuánto demorarán en hacer el trabajo juntos?
2. Un depósito de agua se puede llenar por tres conductos. Cada uno de ellos tarda en llenar el depósito 30, 45 y 60 minutos respectivamente. ¿En qué tiempo se llenaría dicho depósito si se pudieran usar los tres conductos simultáneamente?
3. Si un niño puede arreglar un jardín en 5 horas y su amigo puede hacerlo en 2 horas y media. ¿Cuántas horas se tardarán si trabajan juntos en dicho jardín?
4. Se les pidió a dos mecanógrafas que copiaran un reporte. La que escribía más rápidamente hubiera podido cumplir en 2 horas; la otra mecanógrafa en 3 horas. ¿En cuánto tiempo copiarían ambas personas el reporte? si se distribuyen el trabajo para hacerlo en el plazo más breve de tiempo.
5. Una bomba *A*, trabajando sola puede llenar una alberca en una hora, y una bomba *B* puede llenar la misma alberca en 3 horas. Determinar qué tan rápido las bombas *A* y *B* trabajando al mismo tiempo pueden llenar la alberca.
6. Si José puede recoger un sembrado de brocoli en 5 días y Samuel lo puede hacer en 2 días, ¿qué tan rápido pueden recoger el sembrado juntos José y Samuel?
7. Miriam puede recoger su habitación en 30 minutos. Si Paty le ayuda, le tomará 20 minutos. ¿Cuánto tiempo le tomará a Paty arreglar la habitación sola?
8. Víctor puede lavar su coche en una hora y a su hijo también le lleva el mismo tiempo en lavar el mismo coche. Sin embargo la esposa de Víctor puede lavar el coche en 45 minutos. Si trabajan las tres personas juntas, ¿cuánto se tardarían en lavar el coche?
9. Una pipa se tarda 45 minutos en llenar un depósito de gasolina. Esta pipa ha estado trabajando por 15 minutos y deja de hacerlo, para dar paso a una segunda pipa para terminar de llenar el depósito en 10 minutos. ¿Cuánto se tardará en llenar el depósito la segunda pipa sola?
10. Germán puede hacer un trabajo en 2/5 partes del tiempo que le toma a Julio y juntos la terminan en 10 horas. Obtener el tiempo que le toma a cada uno realizar el trabajo solo.

11. Un especialista en inyección de aluminio empezó un trabajo que le toma dos horas el realizarlo. Luego de trabajar 1/2 hora es relevado por un segundo especialista que terminó el trabajo en 1 hora y 15 minutos. ¿Cuánto tiempo le hubiese tomado al segundo especialista efectuar dicho trabajo solo?
12. En una familia el papá puede realizar un cierto trabajo en una hora y 45 minutos, la mamá lo puede hacer en 2 horas y el hijo de ambos tarda 2 horas con 30 minutos. Si los tres trabajan juntos, ¿en cuánto tiempo les llevaría realizar el trabajo?
13. Un grifo puede llenar un tinaco en 30 minutos, un segundo grifo lo puede hacer en 45 minutos y un tercero en una hora. ¿Cuánto tiempo se tardará en llenarse el tinaco, si los tres grifos se abren a la vez?
14. Una persona puede realizar un trabajo en 15 días y otra lo puede hacer en 20. Luego que estas dos personas han estado trabajando juntas por 8 días, se les une una tercera persona y entre las tres terminan el resto del trabajo en 5 días más. ¿En cuánto tiempo podrá realizar el trabajo la tercera persona sola?

Sección 6.2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir un sistema de ecuaciones lineales.
2. Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método:
   a) de suma o resta
   b) de sustitución
   c) gráfico.
3. Resolver un sistema de tres o más ecuaciones con tres o más incógnitas.

Definición. Una ecuación de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = c, \; c \text{ constante}$$

se llama ecuación lineal en n variables.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in R$ y la solución $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in R^n$.

Ejemplos

1. $x + y = 7$ es una ecuación lineal en las variables x, y donde sus conjuntos solución pertenecen a $R \times R$.

Algunas de estas soluciones son las parejas:
$(5, 2), (-3, 10), (7, 0)$.

2. $x + y + z = 0$ es una ecuación lineal en las variables x, y, z y algunas soluciones son:
$(2, -1, -1), (0, 1, -1), (3, 5, -8)$.

En esta sección consideraremos únicamente ecuaciones lineales en dos y tres variables.

En el primer ejemplo observamos que la solución no es única y que podemos encontrar un número infinito de soluciones para esa ecuación.

Consideraremos el siguiente problema:

La suma de dos números es 7, pero la diferencia de ellos es 3. Encontrar dichos números.

Al resolver este problema tenemos:

Sean x, y los números.

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \quad \text{la suma es 7} \\ x - y &= 3 \quad \text{la diferencia es 3} \end{aligned}$$

A este tipo de situaciones donde aparecen más de una ecuación, se le llama sistema de ecuaciones.

Podemos observar que estas ecuaciones tienen una solución en común, o sea, que existe una pareja de números (x, y) que satisface a ambas ecuaciones simultáneamente, en este caso es $(5, 2)$.

Definición. Un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas se llama *sistema lineal de ecuaciones.* La solución del sistema es el conjunto de n-adas ordenadas, que son soluciones de las m ecuaciones simultáneamente, es decir: la solución del sistema es la intersección de los conjuntos solución de las ecuaciones.

Ejemplos.

3. $$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$$

es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

4. $$\begin{aligned} a + c &= 2 \\ b - 2c + 3 &= 0 \end{aligned}$$

es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

Al proceso de encontrar la solución de un sistema se le conoce como resolución simultánea. En seguida veremos algunos métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Solución simultánea por sustitución

Se resuelve una de las ecuaciones para una de las variables en función de la otra, en seguida sustituimos esta variable en la otra ecuación para después encontrar el valor de la variable.

Ejemplos.

5. $2x - y = 5$
   $x + y = 1$

   despejamos y en la primera ecuación:

$$y = 2x - 5,$$

   sustituimos en la segunda ecuación para después despejar x:

$$\begin{aligned} x + (2x - 5) &= 1 \\ x + 2x - 5 &= 1 \\ 3x - 5 &= 1 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2, \end{aligned}$$

   en seguida sustituimos este valor en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2 + y &= 1 \\ y &= 1 - 2 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, la solución es la pareja $(2, -1)$. Recuerde que la solucion (x, y) es una pareja ordenada de $R \times R$.

6. $5x + 3y = -26$
   $4x - 9y = 2$

   Primero despejamos x en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 4x &= 9y + 2 \\ x &= \frac{9y + 2}{4}, \end{aligned}$$

después la sustituimos en la primera ecuación:

$$5\left[\frac{9y+2}{4}\right]+3y=-26$$

$$\frac{45y}{4}+\frac{10}{4}+3y=-26$$

$$\frac{45y}{4}+3y=-26-\frac{10}{4}$$

$$\frac{45y+12y}{4}=\frac{-104-10}{4}$$

$$57y=-114$$

$$y=-2.$$

Ahora, puesto que $x=\frac{9y+2}{4}$ tenemos:

$$x=\frac{9y+2}{4}=\frac{9(-2)+2}{4}=\frac{-16}{4}=-4$$

$$x=-4.$$

Y así, la solución es la pareja $(-4,-2)$.

Solución simultánea por suma o resta

Este método consiste en eliminar una de las variables, sumando o restando las dos ecuaciones. En caso de que no se puedan eliminar ninguna de las variables, podemos multiplicar o dividir las ecuaciones por alguna cantidad necesaria (por teorema de la igualdad) para después sumar o restar las ecuaciones y formar una ecuación con una incógnita y resolver, para después sustituirla en cualquiera de las ecuaciones originales.

Ejemplos.

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 4 + y &= 3 \\ y &= 3 - 4 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

La solución es la pareja $(4, -1)$.

8. $4x - 3y = 1$
$3x + 2y = 5$

Multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por -4:

$$\begin{array}{rl} 3(4x - 3y) &= 1(3) \\ (-4)(3x + 2y) &= (-4)(5) \\ \hline 12x - 9y &= 3 \\ -12x - 8y &= -20 \\ \hline -17y &= -17 \\ y &= 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 1 \\ 4x - 3(1) &= 1 \\ 4x - 3 &= 1 \\ 4x &= 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

La solución es la pareja $(1, 1)$.

Observación. Lo que nos dice el método de suma o resta, es que hay que eliminar cualquiera de las dos variables para despejar la otra y sustituir en cualquiera de las ecuaciones.

Puede ocurrir que un sistema de ecuaciones no tenga solución común, por ejemplo:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

donde no existen dos números reales tales que sumados den 2 y 3 a la vez, a estas ecuaciones se les llama *incompatibles* o *inconsistentes*.

También puede ocurrir que todas las soluciones de una ecuación en un sistema sean soluciones de la otra ecuación, por ejemplo:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

Algunas soluciones de la primera ecuación son: (1, 1), (0, 2), (3, − 1) y observamos que también son soluciones de la segunda. A estas ecuaciones se les llama *equivalentes* o *dependientes*, porque tienen un número infinito de respuestas iguales.

Y si un sistema de ecuaciones tiene una sola respuesta, las ecuaciones son llamadas *consistentes*.

Solución gráfica

La solución de un sistema de dos ecuaciones también se puede hacer gráficamente, teniendo como solución a la intersección de los conjuntos de las ecuaciones y su gráfica será la intersección de las gráficas de las ecuaciones. Sabemos que la gráfica de una ecuación lineal es una línea recta, de donde la gráfica de un sistema de dos ecuaciones consiste en dos rectas que tienen las posibilidades siguientes:

1. Las rectas se intersectan en un punto.
2. Las rectas coinciden.
3. Las rectas son paralelas.

Esto lo podemos interpretar de la siguiente manera:

1. El Sistema tiene exactamente una solución, que es el punto donde se intersectan las dos rectas.
2. La solución del sistema es la solución de cualquiera de las dos ecuaciones.
3. El sistema no tiene solución.

Observación. Cualquier solución que se obtenga gráficamente, será sólo una aproximación. Se recomienda que además de hacer las gráficas, las ecuaciones se efectúen por cualquiera de los otros métodos.

Ejemplos.

9. $2x + y = 3$
   $x + 3y = 4$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 2x + 1 &= 3 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

La solución es la pareja (1, 1).

Para graficar las rectas, conviene darle los valores al origen para cada ecuación. Estos valores son los puntos que interceptan los ejes de coordenadas, $(0, a)$ y $(b, 0)$, que pertenecen a la recta. Recordemos que dos puntos de una recta son más que suficientes para conocer su dirección.

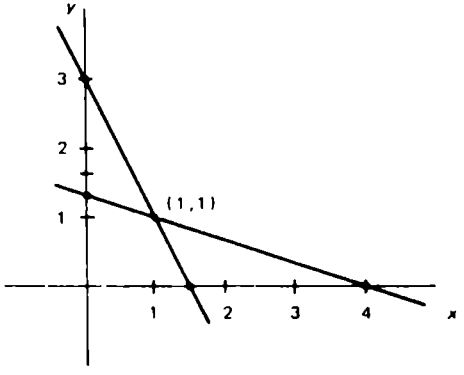
En: $2x + y = 3$ y $x + 3y = 4$

sus valores al origen son:

x	y
0	3
3/2	0

x	y
0	4/3
4	0

Así, sus gráficas son:



y se observa que la intersección es el punto (1,1), por tanto, éste es la solución del sistema.

10. $x - 2y = 4$
$3x - 6y = 12$

$$(-3)(x - 2y) = (-3)(4)$$
$$3x - 6y = 12$$
$$-3x + 6y = -12$$
$$3x - 6y = 12$$
$$0 = 0$$

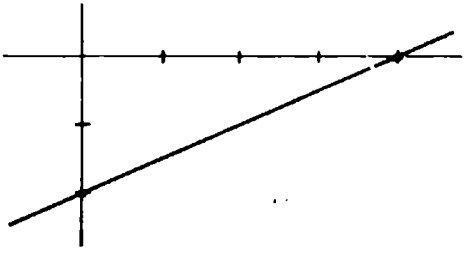
Esto quiere decir que las dos ecuaciones son equivalentes, o sea, que todas las soluciones de una ecuación son las de la otra (su solución no es única), gráficamente tenemos dos rectas que coinciden:

$x - 2y = 4$

x	y
0	-2
4	0

$3x - 6y = 12$

x	y
0	-2
4	0



11. $x - 2y = 4$
$3x - 6y = 1$

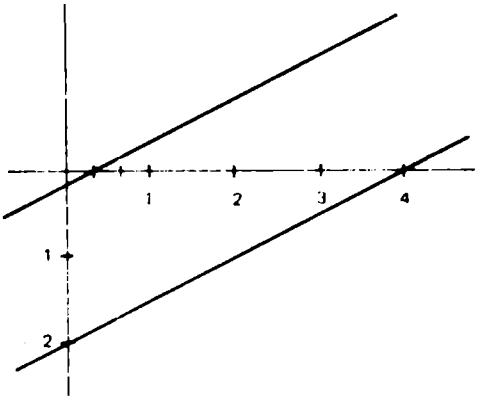
$$(-3)(x - 2y) = (-3)(4)$$
$$3x - 6y = 1$$
$$-3x + 6y = -12$$
$$3x - 6y = 1$$
$$0 = -11$$

pero $0 \neq -11$, de donde el sistema no tiene solución.

Gráficamente tendremos dos rectas paralelas.

x	$2y = 4$
0	2
4	0

$3x$	$6y = 1$
0	1/6
1/3	0



También podemos encontrarnos con sistemas de más de dos ecuaciones con dos incognitas y el método a seguir es una generalización del utilizado para resolver el sistema de dos ecuaciones. Por ejemplo, para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas, se eligen dos de entre las tres ecuaciones y eliminamos una de las variables, obteniendo así una ecuación de dos variables. Repitiendo esta operación con otro par de ecuaciones, obtenemos una segunda ecuación en las mismas dos variables. Resolvemos en seguida el sistema formado de dos ecuaciones con dos variables y completamos la solución mediante sustitución en una de las ecuaciones originales.

Ejemplos.

12. *a)* $2x - y - 4z = 3$
    b) $-x + 3y + z = -10$
    c) $3x + 2y - 2z = -2$

La ecuación *b)* la multiplicamos por 2 y se la sumamos a la ecuación *a)*:

$$\begin{array}{r} 2x - y - 4z = 3 \\ (2)(-x + 3y + z) = (-10)(2) \\ \hline 2x - y - 4z = 3 \\ -2x + 6y + 2z = -20 \\ \hline 5y - 2z = -17 \end{array}$$

La ecuación *b)* la multiplicamos por 3 y se la sumamos a la ecuación *c)*

$$\begin{array}{r} (3)(-x + 3y + z) = (-10)(3) \\ 3x + 2y - 2z = -2 \\ \hline -3x + 9y + 3z = -30 \\ 3x + 2y - 2z = -2 \\ \hline 11y + z = -32 \end{array}$$

Formamos un sistema de ecuaciones con:

$$\begin{array}{ll} d) & 5y - 2z = -17 \\ e) & 11y + z = -32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5y - 2z = -17 \\ (2)(11y + z) = (-32)(2) \\ \hline 5y - 2z = -17 \\ 22y + 2z = -64 \\ \hline 27y = -81 \end{array}$$

$$y = \frac{-81}{27} \qquad y = -3$$

$$\begin{array}{rl} 5y - 2z = -17 & \\ 5(-3) - 2z = -17 & \\ -15 - 2z = -17 & \\ -2z = -17 + 15 & \\ -2z = -2 & z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 2x - y - 4z = 3 & \\ 2x - (-3) - 4(1) = 3 & \\ 2x + 3 - 4 = 3 & \\ 2x - 1 = 3 & \\ 2x = 4 & x = 2 \end{array}$$

donde la solución es $(2, -3, 1)$.

Aunque no lo demostraremos en este libro, la gráfica de una ecuación lineal con tres variables puede representarse como la ecuación de un plano en un sistema rectangular de coordenadas de tres dimensiones ($R \times R \times R$). Los planos no paralelos se cortan en una línea recta y esta línea recta corta a un tercer plano no paralelo en un punto. En general, la intersección de tres planos es el conjunto vacío o una línea recta o un punto.

Ejemplos.

13. *a)* $a - b - c = -1$
b) $2a + b = 11$
c) $a - 2c + d = 1$
d) $c = 2$

Sustituimos *d)* en *a)* y obtenemos:

e) $a - b - 2 = -1$
$a - b = 1$

Formamos un sistema con *b)* y *e)*

$$\begin{array}{r} a - b = 1 \\ 2a + b = 11 \\ \hline 3a \quad = 12 \\ a = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b = 1 \\ 4 - b = 1 \\ \hline 3 = b \end{array}$$

Sustituimos $a = 4$ y $c = 2$ en *c)*:

$$\begin{array}{r} a - 2c + d = 1 \\ 4 - 2(2) + d = 1 \\ 4 - 4 + d = 1 \\ d = 1 \end{array}$$

Y la solución es: $a = 4, b = 3, c = 2, d = 1$.

Al igual que en el caso de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, puede ser que un sistema no tenga solución o que tenga un número infinito de soluciones.

La discusión de dichas posibilidades para m ecuaciones con n incógnitas se ve en cursos superiores de álgebra, sin embargo, tomemos en cuenta lo siguiente:

1. Si $m < n$ no hay solución única.
2. Si $m > n$ el sistema casi siempre es inconsistente.

Ejercicios.

1. Resolver cada sistema de ecuaciones para x, y por el método que mejor convenga; el método gráfico puede utilizarse para una comprobación aproximada.

a) $3x - 2y + 6 = 0$
$2x + 3y = 9$

b) $2x - y = 5$
$x - 3y = 5$

c) $4x + 15y = 7$
$6x - 12y = -1$

d) $12x + 6y = -30$
$20x - 15y - 25 = 0$

e) $2x - 5y = 7$
$6x - y + 31 = 0$

f) $10x + 75 = 21y$
$7x + 3y = 36$

g) $\frac{1}{2}(2x + 3y) - \frac{1}{3}(2x + 3) + 1 = 0$
$-\frac{3}{2}(2x - 3y) - \frac{1}{5}(3y - 8) + 4 = 0$

h) $\frac{1}{5}x - \frac{1}{7}y = \frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 1$

i) $\frac{1x}{2} - \frac{1y}{3} + \frac{2}{5} = 0$
$\frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 0$

j) $\frac{x}{3} - \frac{3y-x}{2} = 6$
$\frac{y}{2} - \frac{2x-y}{3} = -6$

Usar el método de suma o resta para resolver simultáneamente los sistemas siguientes que no son lineales:

a) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 2$

$\dfrac{4}{x} - \dfrac{9}{y} + 1 = 0$

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5$

$\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = -5$

c) $\dfrac{15}{2x} - \dfrac{16}{3y} = \dfrac{23}{6}$

$-\dfrac{4}{3x} + \dfrac{7}{2y} + \dfrac{31}{72} = 0$

d) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+y} = 3$

$\dfrac{-3}{2x-2} + \dfrac{4}{x+y} = 5$

Graficar y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones y decir si son consistentes, inconsistentes o equivalentes:

a) $y = x$

$x + y = 1$

b) $2x + y = 1$

$6x + 3y = 3$

c) $y = 3$

$6x - y = 0$

d) $x - y = 5$

$y = x - 1$

e) $3x + 5y = 3$

$10y + 6x = 6$

f) $8x - 6y = 1$

$4x - 3y = 2$

4. Resolver los siguientes sistemas:

a)
$$\begin{aligned} x - 5y - 7z &= 6 \\ 2x + y + 5z &= 9 \\ 4x - 3y + 9z &= 27 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y - z &= 0 \\ 3y - 6x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x + 5y + 2z &= 0 \\ 12x - 15y + 4z &= 12 \\ 6x + 25y - 8z &= 12 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x + 2z + 5 &= 0 \\ 2y - 3z - 12 &= 0 \\ x + y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{6}{z} &= 1 \\ \frac{9}{x} + \frac{8}{y} - \frac{12}{z} &= 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} + \frac{12}{z} &= 4 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 3 \\ 2x - 3y + 3z &= -1 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 9x - 3y + 6z &= 9 \\ x + y + z &= 3 \\ 8x - 4y + 5z &= 1 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 1 \\ z - w &= 3 \\ x - z + w &= -1 \\ y + 2z - w &= 0 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} 2x - y + z - 3w &= 1 \\ x + 2y - 3z + w &= -2 \\ 3x + 6y - 9z + 3w &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

$$j) \quad \frac{1}{x} + \frac{3}{y} - \frac{2}{z} + \frac{1}{w} = 1$$

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{w} = 2$$

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{z} = 3$$

$$\frac{4}{y} + \frac{2}{w} = -1$$

Sección 6.3

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Objetivos

Después de estudiar esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir función cuadrática.
2. Definir ecuación cuadrática.
3. Dar la solución de una ecuación cuadrática por diferentes métodos.

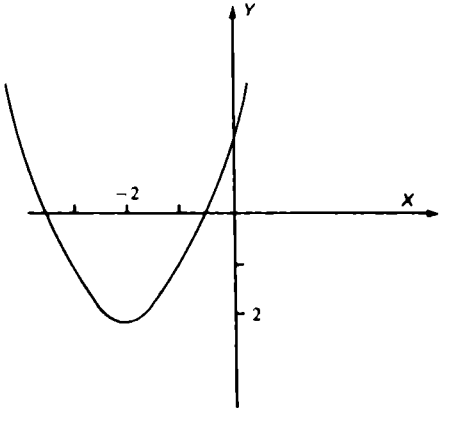
Otro tipo de ecuaciones que resulta de gran utilidad son las *funciones cuadráticas*.

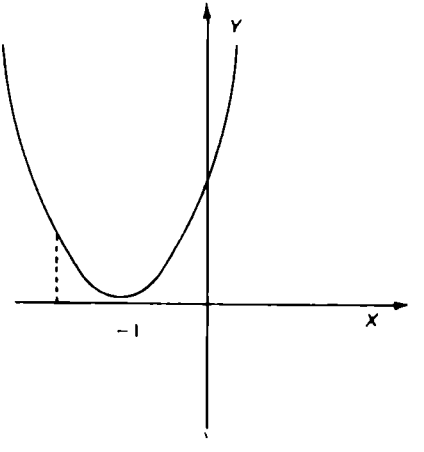
Definición. Sean a, b y c constantes reales y $a \neq 0$, entonces la función f, definida por la ecuación de segundo grado:

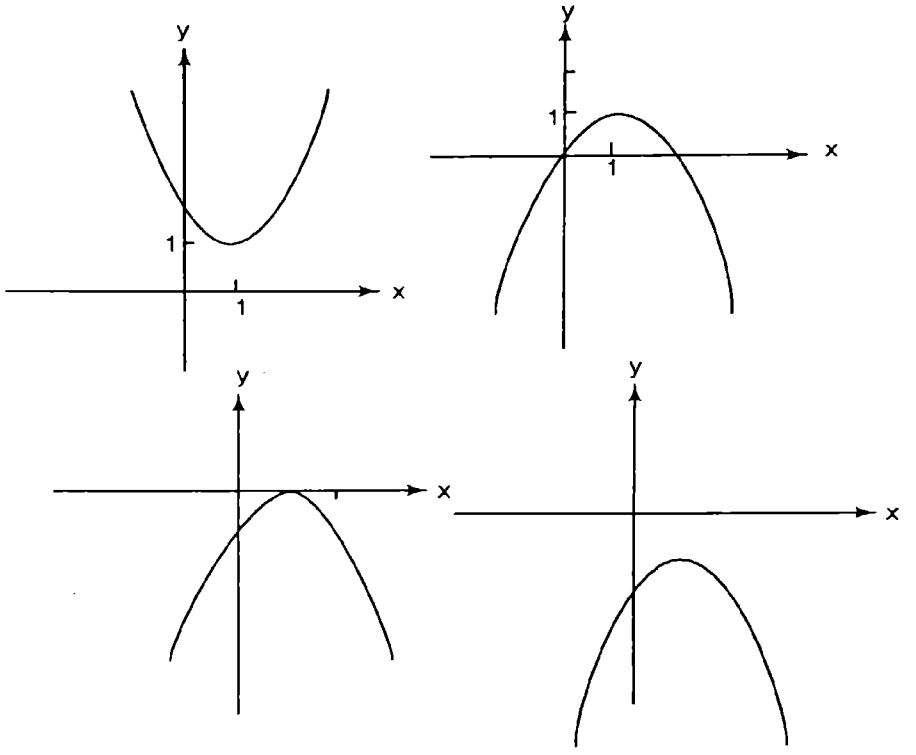
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

se llama función cuadrática.

En secciones posteriores demostraremos que la gráfica de una función cuadrática es una curva abierta llamada parábola.







De acuerdo a lo que se observa en las gráficas, podemos afirmar que ésta intersecta dos veces, una o ninguna vez al eje de las x, lo cual significa que la función cuadrática posee dos raíces reales, una raíz real o ninguna raíz real

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ ax^2 + bx + c &= 0 \end{aligned}$$

la cual será llamada ecuación cuadrática.

Observaciones.

a) Los ceros o raíces forman parte de las intersecciones de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ con el eje de las x.

b) Los ceros de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ son las soluciones de la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$.

c) Si $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene solución real, entonces su gráfica no cruza al eje de las x.

Los métodos para resolver ecuaciones cuadráticas los presentaremos en seguida. Hay que tener presentes las propiedades de los números reales y complejos.

Solución de ecuaciones cuadráticas por factorización

Este método nos servirá exclusivamente si la ecuación cuadrática es factorizable y se basa en el siguiente teorema:

Teorema 1.

Para toda $a, b \in R$
Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Demostración.

Si $a = 0$ el teorema está probado.

$$0 \cdot b = 0$$

Si $a \neq 0$ entonces a tiene inverso multiplicativo: $1/a$.
Así:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \\ (1/a)(a \cdot b) &= (1/a) \cdot 0 \\ (1/a)(a)(b) &= (1/a) \cdot 0 \\ (1)(b) &= (1/a)(0) \end{aligned}$$

de donde: $b = 0$

Este teorema sigue siendo válido si a y b son expresiones algebraicas.

Ejemplos

1. Si tenemos la ecuación $6x^2 + 5x - 4 = 0$

   factorizamos: $(3x + 4)(2x - 1) = 0$.
   Entonces tenemos el producto de dos factores igualados a cero y por el teorema anterior:

   $$3x + 4 = 0 \quad \text{ó} \quad 2x - 1 = 0$$

   y resolvemos las ecuaciones lineales:

   $$\begin{aligned} 3x &= -4 & 2x &= 1 \\ x &= -4/3 & x &= 1/2 \end{aligned}$$

   O sea, que son dos las soluciones: $x = -4/3$ y $x = 1/2$.

2. $2x^2 + 5x + 2 = 0$

$$(2x + 1)(x + 2) = 0$$
$$2x + 1 = 0 \quad \text{ó} \quad x + 2 = 0$$
$$x = -1/2 \quad \text{ó} \quad x = -2$$

3. $x^2 - 10x + 25 = 0$

$$(x - 5)(x - 5) = 0$$
$$x - 5 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 5 = 0$$
$$x = 5 \quad \text{ó} \quad x = 5$$

Observemos que la solución es única y gráficamente significa que la curva toca sólo un punto del eje x.

4. $x^2 + 16 = 0$

$$x^2 - (-16) = 0$$
$$x^2 - (16)(-1) = 0$$
$$x^2 - 16i^2 = 0$$
$$(x - 4i)(x + 4i) = 0$$
$$x - 4i = 0 \quad \text{ó} \quad x + 4i = 0$$
$$x = 4i \quad \text{ó} \quad x = -4i$$

Solución de ecuaciones cuadráticas de la forma $(x + a)^2 = b$

Para resolver la ecuación $(x + a)^2 = b$, procedemos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (x + a)^2 &= b \\ (x + a)^2 - b &= 0 \\ (x + a)^2 - (\sqrt{b})^2 &= 0 \\ [(x + a) - \sqrt{b}\,][(x + a) + \sqrt{b}\,] &= 0 \\ x + a - \sqrt{b} = 0 \text{ y } x + a + \sqrt{b} &= 0 \\ x = -a + \sqrt{b} \quad \text{y} \quad x &= -a - \sqrt{b}. \end{aligned}$$

De esto podemos concluir que la solución de una ecuación de la forma: $(x + a)^2 = b$ es:

$$x = -a + \sqrt{b} \text{ y } x = -a - \sqrt{b}.$$

Esta última conclusion también resulta de extraer raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación $(x + a)^2 = b$, es decir:

$$(x + a)^2 = b$$
$$(x + a) = \pm\sqrt{b}$$
$$x = -a \pm \sqrt{b}.$$

Ejemplos.

5. $(x + 2)^2 = 1$

entonces:

$$x + 2 = \sqrt{1} \quad \text{ó} \quad x + 2 = -\sqrt{1}$$
$$x + 2 = 1 \quad \text{ó} \quad x + 2 = -1$$
$$x = 1 - 2 \quad \text{ó} \quad x = -1 - 2$$
$$x = -1 \quad \text{ó} \quad x = -3$$

6. $4x^2 - 5 = 0$

$$4x^2 = 5$$
$$x^2 = 5/4$$
$$x = \sqrt{\frac{5}{4}} \quad \text{ó} \quad x = -\sqrt{\frac{5}{4}}$$
$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

7. Si $x^2 = 9$ entonces $x = \pm\sqrt{9}$, $x = \pm 3$

Soluciones de ecuaciones cuadráticas completando cuadrados

Algunas ecuaciones cuadráticas son trinomios cuadrados perfectos como:

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0$$
$$9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2 = 0.$$

Si se nos presenta un trinomio en x, donde el coeficiente en término x^2 es 1, ¿cómo saber si es cuadrado perfecto?

Si tenemos $x^2 + 2nx + n^2 = (x + n)^2$,

se observa que es cuadrado perfecto si y sólo si el último término es igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del término en x.

$$x^2 + 2nx + n^2$$
$$\hookrightarrow [(1/2)(2n)]^2 = n^2$$

Ejemplos.

8. $x^2 + 12x + 36$ es un cuadrado perfecto ya que:

   $[\ (1/2)\ (12)\ ]^2 = 36.$

9. x2 + 10x + 16 no es un cuadrado perfecto, ya que:

   $[\ (1/2)\ (10)\ ]^2 = 25 \neq 16.$

Podemos usar este hecho para transformar un polinomio cuadrático de la forma $x^2 + kx$ en un cuadrado perfecto.

Ejemplos.

10. Transformar $x^2 + 6x$ en un cuadrado perfecto.

    Sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, $[\ (1/2\ (6)]^2 = 9$ y así obtenemos:

    $$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

11. Transformar $x^2 + 5x$ en un cuadro perfecto.

    $x^2 + 5x + 25/4 = (x + 5/2)^2$

    $[\ (1/2)\ (5)\ ]^2 = \dfrac{25}{4}$

El proceso de sumar una constante a un polinomio cuadrático para convertirlo en cuadrado perfecto se llama completar cuadrados. Dada cualquier ecuación cuadrática, podemos usar este proceso para transformar la ecuación en una equivalente a:

$$(x + a)^2 = b$$

y resolverla.

Ejemplos.

12. $x^2 + 2x - 1 = 0$
    $x^2 + 2x \quad = 1$

    Completamos cuadrado al lado izquierdo y lo sumamos a ambos lados por el teorema de la igualdad:

$$x^2 + 2x + 1 = 1 + 1$$

factorizamos el lado izquierdo:

$$(x + 1)^2 = 2$$

despejamos:

$$x + 1 = \sqrt{2} \quad \text{ó} \quad x + 1 = -\sqrt{2}$$
$$x = -1 + \sqrt{2} \quad \text{ó} \quad x = -1 - \sqrt{2}$$

de donde, las soluciones son: $x = -1 \pm \sqrt{2}$

13. $3x^2 + 5x - 2 = 0$

Dividimos entre 3 la ecuación:

$$x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

$$x^2 + \frac{5}{3}x = \frac{2}{3}$$

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = \frac{2}{3} + \frac{25}{36}$$

$$(x + \frac{5}{6})^2 = \frac{49}{36}$$

entonces:

$$x + \frac{5}{6} = \sqrt{\frac{49}{36}} \quad \text{ó} \quad x + \frac{5}{6} = -\sqrt{\frac{49}{36}}$$

$$x = -\frac{5}{6} + \frac{7}{6} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{5}{6} - \frac{7}{6}$$

$$x = \frac{2}{6} \quad \text{ó} \quad x = -2$$

Observación. Es necesario que el coeficiente del término al cuadrado sea la unidad para utilizar el método de completar cuadrados.

Soluciones de ecuaciones cuadráticas por la fórmula general

En cursos anteriores de álgebra aprendimos y utilizamos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, veremos en seguida la forma para llegar a ella.

Sea $ax^2 + bx + c = 0,$ **donde** $a, b, c \in R$ $a \neq 0$

dividimos entre a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

completamos cuadrados:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

utilizamos el método para resolver $(x + a)^2 = b$ y obtenemos:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

despejamos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

o sea, que las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos.

14. $x^2 + x + 1 = 0$

donde: $a = 1,\ b = 1 \quad y \quad c = 1$

y: $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

entonces:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

o sea, que: $x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ó $x = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

15. $3x^2 - x - 2 = 0$

Aquí: $a = 3,\ b = -1 \quad y \quad c = -2$

y: $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6}$$

o sea:

$$x = \frac{1 + 5}{6} \quad \text{ó} \quad x = \frac{1 - 5}{6}$$

$$x = 1 \quad \text{ó} \quad x = -\frac{4}{6}$$

Por tanto, las soluciones son: $x = 1$ y $x = -\frac{2}{3}$

16. Si $3y^2 + xy - 2x^2 = 0$, utilizar la fórmula para resolver y en términos de x.

Si $3y^2 + xy - 2x^2 = 0$ entonces:

$a = 3 \qquad b = x \qquad c = -2x^2$

y si: $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4(3)(-2x^2)}}{2(3)}$$

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 24x^2}}{6}$$

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{25x^2}}{6}$$

$$y = \frac{-x \pm (5x)}{6}$$

o sea,

$$y = \frac{-x + 5x}{6} \qquad \text{ó} \qquad y = \frac{-x - 5x}{6}$$

$$y = \frac{+4x}{6} \qquad \text{ó} \qquad y = \frac{-6x}{6}$$

Las soluciones son: $y = \dfrac{2x}{3}$, $y = -x$

La expresión $(b^2 - 4ac)$, que está bajo el radical en la fórmula, se llama discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde podemos observar lo siguiente:

1. Si $(b^2 - 4ac) = 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ y las dos soluciones de la ecuación son iguales.
2. Si $(b^2 - 4ac)$ es mayor que cero, entonces $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$ es un número real positivo y las dos soluciones son reales y diferentes.
3. Si $(b^2 - 4ac)$ es menor que cero, entonces $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$ es un número complejo y las dos soluciones son complejas conjugadas una de la otra.

Ejercicios.

1. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización:

a) $9x^2 - 16 = 0$
b) $3x^4 - x = 10$
c) $4x^2 = 15x$
d) $10x^2 - x - 21 = 0$
e) $2x^2 - 5x + 3 = 0$
f) $4y^2 + 4y + 1 = 0$
g) $81x^2 - 1 = 0$
h) $x^2 - ax + bx - ab = 0$
i) $ax^2 + (b - ac)x - bc = 0$
j) $a^2x^2 + abx - 2b^2 = 0$
k) $\frac{x^2}{121} - \frac{1}{16} = 0$
l) $25x^2 - 9 = 0$
m) $x^2 - 3x = 0$
n) $x^2 - 9y = 0$
ñ) $4x^2 - 16x = 0$
o) $100 - 196b^2 = 0$
p) $9b^2 + 12b + 4 = 0$
q) $40x^2 - 47x + 12 = 0$
r) $144x^2 - 125x + 25 = 0$
s) $6y^2 + 11y - 35 = 0$
t) $2m^2 + 3m - 35 = 0$
u) $2a^2 - 12a + 18 = 0$
v) $x^3 - \frac{1}{1000} = 0$
w) $729y^3 - 8 = 0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas completando cuadros:

a) $2x^2 - x - 3 = 0$
b) $y^2 + 6y + 10 = 0$
c) $x^2 + x - 1 = 0$
d) $y^2 + 2 = 6y$
e) $9y^2 - 12y + 10 = 0$
f) $x^2 + 22x - 2 = 0$
g) $4x^2 - 20x + 16 = 0$
h) $9x^4 - 24x + 7 = 0$
i) $y^2 - y + 1 = 0$
j) $25y^2 + 10y - 1 = 0$
k) $16y^2 + 24y + 10 = 0$
l) $36y^2 - 60y + 9 = 0$
m) $4x^2 + 20x + 1 = 0$

$n)\ y^2 - \frac{2}{3}y + 1 = 0$

$\tilde{n})\ 4y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{1}{3} = 0$

3. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por la fórmula general:

a) $3x^2 + 11x + 7 = 0$
b) $x^2 - 6x + 10 = 0$
c) $x^2 + 2 = 2\sqrt{3}\,x$
d) $2x^2 + x = 2$
e) $4x^2 - 2x = 7$
f) $2x^2 + x - 12 = 0$
g) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$
h) $px^2 + qx + R = 0$
i) $3x^2 + 5x = 0$
j) $5x^2 = 2x - 7$
k) $2x^2 + 3ax + bx + cd = 0$
l) $cx^2 - 2x = x^2 + a$

4. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método que sea más apropiado.

a) $x^2 + 7x = 0$
b) $7x - 5 = -6x^2$
c) $2x^2 + 2\sqrt{3}x + 2 = 0$
d) $2x^2 + x - 6 = 0$
e) $14 + 5x = 3x\,(x + 2)$
f) $x^2 - 5x = 0$
g) $9x^2 - 81x = 0$
h) $16x^2 - 100 = 0$
i) $10x^2 - 23x - 5 = 0$
j) $x^2 + 9 = 0$
k) $36x^2 + 81 = 0$
l) $16x^2 + 144 = 0$
m) $9x^2 + 25 = 0$
n) $x^2 + x - 3/4 = 0$
ñ) $24x^2 - 38x + 8 - 0$
o) $4x^2 + 5 = 0$
p) $9x^2 + 7 = 0$
q) $12x^2 - 12x + 13 = 0$
r) $3y^2 - 4y + 3 = 0$
s) $y^2 + 6y + 10 = 0$
t) $16x^2 - 24x + 12 = 0$

u) $3x^2 + x + 12 = 0$
v) $5x^2 - 2x + 7 = 0$
w) $4x^2 - x + 9 = 0$
x) $6x^2 + 8x - 9 = 0$

5. Resolver para y en términos de x las siguientes ecuaciones:

a) $y^2 + xy - 6x^2 = 0$
b) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 16 = 0$
c) $y^2 - 4xy + (4x^2 - 9) = 0$
d) $x^2 + xy + y^2 + x + y = 1$
e) $y^2 - 4xy + 2y + 3x^2 - 6x = 0$
f) $x^2 - 24xy + 119y^2 = 0$
g) $9x^2y^2 + 66xy + 121 = 0$
h) $9y^2 + 12xy + 4x^2 = 0$
i) $2x^2 - 12xy + 18y^2 = 0$
j) $72x^2 + 24xy - 6y^2 = 0$
k) $15x^2 + 24xy - 12y^2 = 0$
l) $12y^2 + 41xy - 35x^2 = 0$
m) $4x^2 + 9y^2 = 0$
n) $2(x + 2y)^2 - (x + 2y) - 10 = 0$
ñ) $6(x + y)^2 + 5(x + y) - 21 = 0$
o) $(x^2 + 4x + 4) - (y^2 - 2y + 1) = 0$
p) $(x - y)^2 - 121 = 0$
q) $x^2 - 4y^2 + x + 2y = 0$
r) $18x^2 - 69xy + 56y^2$
s) $225x^2 - 256y^2 = 0$

6. Traducir a ecuaciones cuadráticas y resolver los siguientes problemas.

a) Las dimensiones de una pintura, incluyendo su marco son 50 X 30 cms. El área del marco es 1/5 partes del área de la pintura (incluyendo el marco). Encuentre el ancho del marco suponiendo que este ancho es uniforme.
b) Encuentre tres impares consecutivos cuya suma de cuadrados es 683.
c) Encuentre el número que sumado con su recíproco nos dé $\frac{58}{21}$.
d) Un agricultor se ve en la necesidad de cercar 10,000 m^2 de su propiedad, dicha propiedad es rectangular y colinda con un río, por lo cual no necesita cercar dicho lado. Encontrar las dimensiones del terreno cercado si él dispone de 300 m de cerca y desea que el terreno cercado sea también rectangular.
e) Hallar el área del cuadrado con diagonal 10 cms mayor que un lado.

f) Consideremos un triángulo rectángulo, de tal manera que un tercio del área sea igual a 200 cms.^{2} ; si uno de sus catetos es 10 cms. mayor que el otro cateto, encuentre la longitud de la hipotenusa.

g) Un automóvil recorre una colina cuesta arriba de 200 kms a una velocidad constante, el recorrido de regreso lo hace a una velocidad constante de 20 kms/h mayor que la subida. La diferencia de tiempo entre el tiempo empleado de subida y bajada es de 2 hrs. Encuentre la velocidad del auto.

h) Encontrar las dimensiones de un rectángulo, de tal manera que su área sea 1,200 cms^2 si su perímetro es 140 cms.

i) Encontrar dos números impares consecutivos, tales que el cuadrado del menor disminuido 6 veces el mayor nos da 123.

j) Una persona compró 5,000 pesos en botellas de vino. 20 de estas botellas las regaló a amigos y parientes, el resto las vendió con una ganancia de 15 pesos por botella. Una vez vendidas todas las botellas, se da cuenta de que puede comprar la cantidad inicial de botellas y 88 más. ¿Cuál es el costo de cada botella?

k) Un ayudante de jardinero emplea 5 horas más que el jardinero en el mantenimiento de un jardín público. En un determinado día, trabajaron juntos sólo 4 horas. El ayudante completó el trabajo teniendo necesidad de emplear 5 horas más para terminar el trabajo. ¿Cuánto tiempo empleó cada uno de ellos?

l) Una familia que posee dos autos realiza un recorrido de 500 kms. conduciendo un auto el esposo y el otro la esposa. Ambos realizan el viaje con una velocidad constante y la velocidad con la que conduce la esposa es 10 km/h mayor que la velocidad del auto del esposo. Ella realiza el recorrido en una hora menos que su esposo. Encontrar las velocidades.

Sección 6.4

RELACIÓN ENTRE SOLUCIONES Y COEFICIENTES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Encontrar una ecuación cuadrática cuyas soluciones se dan.
2. Utilizar el teorema de suma y producto de raíces en la solución de problemas específicos.

El siguiente teorema nos da una relación entre las raíces o soluciones y los coeficientes de una ecuación cuadrática.

Teorema.

El conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ es:

$$\{ R_1, R_2 \} \text{ si y sólo si } R_1 + R_2 = \frac{-b}{a} \text{ y } R_1 R_2 = \frac{c}{a}$$

Demostración.

Si tenemos $ax^2 + bx + c = 0$, su solución es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

o sea, $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ó $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si a estas dos soluciones las denotamos por R_1 y R_2 tenemos:

$$R_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$R_1 + R_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a}$$

$$= \frac{-b}{a}$$

Entonces $R_1 + R_2 = \dfrac{-b}{a}$

y también:

$$R_1 R_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

de donde: $R_1 R_2 = \frac{c}{a}$

lo cual debíamos demostrar.

Este teorema se puede utilizar para la comprobación de las soluciones de una ecuación cuadrática.

Ejemplo.

1. Comprobar que: $R_1 = -1 + \sqrt{2}$ y $R_2 = -1 - \sqrt{2}$ son las dos soluciones de la ecuación:

$$x^2 + 2x - 1 = 0.$$

En esta ecuación $a = 1$, $b = 2$ y $c = -1$.

$R_1 + R_2 = \frac{-b}{a}$ y sustituyendo los valores de R_1, R_2, a y b, obtenemos:

$$(-1 + \sqrt{2}) + (-1 - \sqrt{2}) = \frac{-2}{1}$$

$$-2 = -2$$

Y también en $R_1 R_2 = \frac{c}{a}$ obtenemos:

$$(-1 + \sqrt{2})(-1 - \sqrt{2}) = \frac{-1}{1}$$

$$1 - 2 = -1$$

$$-1 = -1$$

Por lo tanto, $R_1 = -1 + \sqrt{2}$ y $R_2 = -1 - \sqrt{2}$ son soluciones de:

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

El teorema de la suma y producto de las raíces de una ecuación cuadrática también nos puede servir para construir una ecuación cuadrática.

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

es equivalente a:

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

pero si R_1 y R_2 son las raíces o soluciones de esta ecuación cuadrática y como: $R_1 + R_2 = \frac{-b}{a}$ y $R_1 R_2 = \frac{c}{a}$, la ecuación se transforma a:

$$x^2 - (R_1 + R_2)x + R_1 R_2 = 0$$

Ejemplos.

2. Escribir la ecuación cuyas raíces sean $\frac{5}{3}$ y $-\frac{2}{3}$.

La ecuación debe ser de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, la cual es equivalente a:

$$x^2 - (R_1 + R_2)x + R_1 R_2 = 0$$

$$R_1 + R_2 = \frac{5}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1$$

$$R_1 R_2 = \left(\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{9}$$

y así, la ecuación es:

$$x^2 - (1)x + \left(-\frac{10}{9}\right) = 0$$

$$x^2 - x - \frac{10}{9} = 0$$

que también es equivalente a

$$9x^2 - 9x - 10 = 0$$

3. Si una raíz de $x^2 + 3x + K = 0$ es 2, hallar la otra raíz y el valor de K.

Tenemos: $a = 1$, $b = 3$ y $c = K$
y $R_1 = 2$ y nos piden encontrar R_2 y K.
Así:

$R_1 + R_2$	$\frac{b}{a}$	$R_1 R_2$	$\frac{c}{a}$
$2 + R_2$	$\frac{3}{1}$	$2(R_2)$	$\frac{K}{a}$
$2 + R_2$	3	$2R_2$	$\frac{K}{a}$
R_2	5	$2(5)$	$\frac{K}{(1)}$
		K	10

Ejercicios.

1. Formar una ecuación cuadrática con coeficientes enteros, cuyas raíces son los números dados.

a) 2, − 4
b) − 1, − 5
c) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$
d) 3, − 3
e) $3i$, $-3i$
f) $3 + i$, $3 - i$

2. En cada uno de los problemas siguientes formar una ecuación cuyas raíces sean:

a) Las cuadradas de $2x^2 + 6x - 3 = 0$.
b) Las recíprocas de $2x^2 + 6x - 3 = 0$.
c) El doble de $3x^2 - 5x - 2 = 0$.
d) Un tercio de las de $3x^2 - 5x - 2 = 0$.
e) Una raíz de $x^2 - Kx + 1 - i = 0$ es i, hallar la otra raíz y el valor de K.
f) Si una de las raíces de $2x^2 + x - 18 = mx$, es el negativo de la otra, hallar las raíces y el valor de m.

3. Determínese K, de modo que la condición dada se satisfaga.

a) $x^2 - Kx + 27 = 0$, una raíz es el triple de la otra.
b) $4x^2 - 3x + K = 0$, tenga una raíz igual a 3.
c) $4x^2 - 3x + K = 0$, la diferencia de las raíces es 3.
d) $2x^2 - Kx + K = 0$, las raíces son iguales.
e) $3x^2 + Kx - 2 = 0$, la suma de sus raíces es 6.
f) $5x^2 - 8x + K = 0$, el producto de sus raíces es 1/5.
g) $2x^2 + (4 - K)x - 17 = 0$, las raíces iguales en valor absoluto, pero de signo contrario.
h) $3x^2 - 7x + 6 = K$, una raíz es cero.

Sección 6.5

ECUACIONES CON RADICALES Y DE FORMA CUADRÁTICA

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Resolver ecuaciones que contengan radicales.
2. Resolver ecuaciones que se pueden reducir a una ecuación cuadrática.

Una ecuación en la cual la incógnita aparece bajo un signo de radical es llamada ecuación radical. Para resolver una ecuación de este tipo, se comenzará por escribir una ecuación equivalente que contenga un solo radical en uno de los miembros de la ecuación y todos los demás elementos con radicales (o sin radical) en el otro miembro. Después se eleva al cuadrado a ambos términos de la ecuación. En algunos casos hay que repetir este proceso hasta que los radicales desaparezcan. La ecuación que se obtiene de este proceso tiene todas las raíces de la original, lo cual es cierto, ya que las potencias positivas de números iguales son iguales. Sin embargo, la nueva ecuación puede tener raíces que no lo son de la original y que se les llama *raíces extrañas*. Estas raíces extrañas se pueden detectar por medio de la comprobación de las soluciones.

Ejemplos.

1. Resolver $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+1} = 1$

Despejamos $\sqrt{x+4}$ y obtenemos:

$$\sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{2x+1}$$

Elevamos al cuadrado ambos términos:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x+4})^2 &= (1+\sqrt{2x+1})^2 \\
x+4 &= 1 + 2\sqrt{2x+1} + (2x+1) \\
x+4 &= 1 + 2\sqrt{2x+1} + 2x + 1 \\
x+4-2x-2 &= 2\sqrt{2x+1} \\
2-x &= 2\sqrt{2x+1}
\end{aligned}$$

Se elevan al cuadrado nuevamente ambos términos:

$$\begin{aligned}
(2-x)^2 &= (2\sqrt{2x+1})^2 \\
4-4x+x^2 &= 4(2x+1) \\
4-4x+x^2 &= 8x+4 \\
4-4x+x^2-8x-4 &= 0 \\
x^2-12x &= 0 \\
x(x-12) &= 0
\end{aligned}$$

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x - 12 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 12$$

En seguida haremos la comprobación para observar si las dos son solución.

Si $x = 0$ obtenemos: $\sqrt{0+4} - \sqrt{2(0)+1} = 1$

$2 - 1 = 1$

$1 = 1$

lo cual nos dice que $x = 0$ sí es una raíz de la ecuación.

Si $x = 12$ queda $\sqrt{12+4} - \sqrt{2(12)+1} = 1$

$\sqrt{16} - \sqrt{25} = 1$

$4 - 5 = 1$

$-1 \neq 1$

lo cual nos dice que $x = 12$ no es raíz de la ecuación dada, ésta es una raíz extraña, de donde la única solución de:

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+1} = 1 \quad \text{es} \quad x = 0$$

2. Resolver: $4 - 3\sqrt{x} = x$

$$\begin{aligned} -3\sqrt{x} &= x - 4 \\ (-3\sqrt{x})^2 &= (x-4)^2 \\ 9x &= x^2 - 8x + 16 \\ x^2 - 8x + 16 - 9x &= 0 \\ x^2 - 17x + 16 &= 0 \\ (x-16)(x-1) &= 0 \\ x = 16 \quad \text{ó} \quad x &= 1 \end{aligned}$$

En seguida comprobamos ambas igualdades.

Si $x = 16$: $4 - 3\sqrt{16} = 16$

$4 - 3(4) = 16$

$4 - 12 = 16$

$-8 \neq 16$

Por lo tanto, $x = 16$ es una raíz extraña.

Si $x = 1$: $4 - 3\sqrt{1} = 1$

$4 - 3 = 1$

$1 = 1$

Así, la única solución para la ecuación: $4 - 3\sqrt{x} = x$ es $x = 1$

Ecuaciones que se pueden reducir a una ecuación cuadrática

Los métodos para resolver una ecuación cuadrática pueden ser utilizados en cualquier ecuación que pueda reducirse a una cuadrática, por sustitución con una nueva variable.

Ejemplos.

3. Resolver: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Sea $m = x^2$
Así, $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ se transforma a:
$m^2 - 3m - 4 = 0$, la cual puede factorizarse.

$$(m - 4)(m + 1) = 0$$
$$m - 4 = 0 \quad \text{ó} \quad m + 1 = 0$$
$$m = 4 \quad \text{ó} \quad m = -1$$

Pero $m = x^2$, de donde, sustituyendo obtenemos:

$$x^2 = 4 \quad \text{ó} \quad x^2 = -1$$
$$x = \pm\sqrt{4} \quad \text{ó} \quad x = \pm\sqrt{-1}$$
$$x = \pm 2 \quad \text{ó} \quad x = \pm i$$

de donde, las cuatro soluciones de esta ecuación son:

$$x = 2, \quad x = -2, \quad x = i, \quad x = -i$$

4. Resolver: $x^{-6} - 9x^{-3} + 8 = 0$.

Sea $m = x^{-3}$
Así, $x^{-6} - 9x^{-3} + 8 = 0$ se transforma a:

$$m^2 - 9m + 8 = 0.$$

Factorizando tenemos:

$$(m - 8)(m - 1) = 0$$

Así $m - 8 = 0$, $m = 1$
Y sustituyendo en $m = x^{-3}$ se obtiene:

$$x^{-3} = 8 \quad \text{ó} \quad x^{-3} = 1$$

$$\frac{1}{x^3} = 8 \quad \text{ó} \quad \frac{1}{x^3} = 1$$

$$\frac{1}{8} = x^3 \qquad \text{ó} \qquad 1 = x^3$$
$$x = \frac{1}{2} \qquad \text{ó} \qquad x = 1$$

Resolver: $(x^2 + 3x)^2 - 7(x^2 + 3x) - 18 = 0$.

Haciendo $m = x^2 + 3x$ obtenemos:

$$m^2 - 7m - 18 = 0$$

Factorizando:

$$(m - 9)(m + 2) = 0$$
$$m = 9 \text{ y } m = -2$$

Y sustituyendo en $m = x^2 + 3x$ se tiene:

$$x^2 + 3x = 9 \qquad \text{ó} \qquad x^2 + 3x = -2$$
$$x^2 + 3x - 9 = 0 \qquad \text{ó} \qquad x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(-9)}}{2} \qquad (x + 2)(x + 1) = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{45}}{2} \qquad x = -2, \; x = -1$$

$$x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

De donde, las soluciones son:

$$x = \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{-3 - 3\sqrt{5}}{2}, \quad x = -2 \text{ y } x = -1$$

Ejercicios.

1. Determinar todos los valores de x que satisfagan la ecuación.

a) $\sqrt{x^2 + 5} = 3$
b) $\sqrt{x} = 2 - x$
c) $\sqrt{4 - x} = x - 4$
d) $y - 1 = \sqrt{y + 1}$
e) $\sqrt{3x + 2} = -5$
f) $\sqrt{1 - x^2} = -1$

g) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 3$

h) $\sqrt{3x+10} - \sqrt{2x+6} = 1$

i) $\sqrt{x+1} + 1 = -x$

j) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = 0$

k) $\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x+2} = 0$

l) $(\sqrt{x-5})(\sqrt{x+3}) = 3$

m) $(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3}) = 1$

n) $\sqrt{3x-6} + \sqrt{2x-6} = 1$

ñ) $\sqrt{3} + \sqrt{y} = \sqrt{y+3}$

o) $\sqrt{3x-6} - \sqrt{6-x} = \sqrt{2x-6}$

p) $\sqrt{2y+3} + \sqrt{y+1} = \sqrt{y-2}$

q) $\sqrt{y} + \sqrt{y+1} = \sqrt{2y+1}$

r) $\sqrt{x^2+x-2} - \sqrt{x^2+x+7} = -1$

s) $\sqrt{13 + 3\sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+1}} - 5 = 0$

t) $\sqrt{1 + \sqrt{x+\sqrt{x}}} - 1 = 0$

2. Hallar todos los valores de x que satisfagan la ecuación dada:

a) $x^4 + 16x^2 - 225 = 0$

b) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

c) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$

d) $x - x^{1/2} - 30 = 0$

e) $x^{-2} + x^{-1} - 12 = 0$

f) $x^{-4} - 8x^{-2} - 9 = 0$

g) $(4x^2 - 5)^2 - 3(4x^2 - 5) = 4$

h) $(x^2 - 4x)^2 - (x^2 - 4x) - 20 = 0$

i) $(y^2 - 1) - 4\sqrt{y^2 - 1} + 3 = 0$

j) $(x+1)^4 + 4(x+1)^2 + 4 = 0$

k) $x^2 + x + \frac{12}{x^2 + x} = 8$

l) $\left(\frac{y}{y} - \frac{1}{y}\right) + 2 = 3\left(\frac{y}{y-1}\right)$

Sección 6.6
SISTEMAS DE ECUACIONES CON CUADRÁTICAS
Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Encontrar la solución de un sistema de dos ecuaciones simultáneas:

   a) Una lineal y una cuadrática.
   b) Ambas cuadráticas.

En la sección 6.2 hemos discutido sistemas de ecuaciones lineales. Estos sistemas se pueden generalizar a sistemas de dos o más variables o a funciones cuadráticas. En esta sección nos dedicaremos a los sistemas de ecuaciones donde por lo menos una de las ecuaciones es cuadrática o de forma cuadrática. Los métodos que se presentan son adecuados para sistemas especiales que se encuentran con frecuencia.

Una ecuación lineal y una cuadrática

Un sistema de este tipo puede escribirse:

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f &= 0 \\ gx + hy + k &= 0 \end{aligned}$$

donde a, b, c, d, e, f, g, h y k son constantes y a o c y g o h son diferentes de cero.

Si consideramos las gráficas de estas ecuaciones, las intersecciones de éstas serán las soluciones del sistema. La gráfica de la ecuación cuadrática puede ser una sección cónica (parábola, circunferencia, elipse o hipérbola), que veremos en secciones posteriores.

En esta sección nos dedicaremos, exclusivamente, al método algebraico, que consiste en determinar los valores de las variables que satisfagan el sistema. Una forma de resolver éste consiste en despejar, de la ecuación lineal, una de las variables en términos de la otra, sustituir en la ecuación cuadrática y resolverla con respecto a la otra variable. Sustituyendo los resultados en la lineal obtenemos la solución completa del sistema.

Ejemplo.

1. Resolver los sistemas: $\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 - 7 &= 0 \\ x - 2y + 1 &= 0 \end{aligned}$

Despejamos x en la lineal:

$$x = 2y - 1$$

y sustituimos en la cuadrática:

$$\begin{aligned} (2y - 1)^2 - (2y - 1)y + y^2 - 7 &= 0 \\ 4y^2 - 4y + 1 - 2y^2 + y + y^2 - 7 &= 0 \\ 3y^2 - 3y - 6 &= 0 \\ y^2 - y - 2 &= 0 \\ (y - 2)(y + 1) &= 0 \end{aligned}$$

De donde: $y = 2$ y $y = -1$

Sustituyendo en la lineal estos valores obtenemos:

Si $y = 2$

$$\begin{aligned} x - 2y + 1 &= 0 \\ x - 2(2) + 1 &= 0 \\ x - 4 + 1 &= 0 \\ x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Y si $y = -1$

$$\begin{aligned} x - 2y + 1 &= 0 \\ x - 2(-1) + 1 &= 0 \\ x + 2 + 1 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Las dos soluciones son entonces:

$$x = 3, \quad y = 2 \qquad \text{ó} \qquad x = -3, y = -1$$
$$(3,2) \qquad \text{ó} \qquad (-3, -1)$$

Observación. Para mayor facilidad, las soluciones las indicaremos como parejas de números, ya que éstas se pueden interpretar gráficamente como puntos del plano, recordando que el primer elemento de la pareja es el valor de la variable x, y el segundo elemento de la pareja es el valor correspondiente de y.

Ejemplo.

2.

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x^2 + y^2 &= 37 \end{aligned}$$

Despejamos y en la lineal:

$$y = 5 - x$$

y sustituimos en la cuadrática:

$$\begin{aligned} x^2 + (5 - x)^2 &= 37 \\ x^2 + 25 - 10x + x^2 &= 37 \\ 2x^2 - 10x - 12 &= 0 \\ x^2 - 5x - 6 &= 0 \\ (x - 6)(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 6 \qquad \text{ó} \qquad x = -1$$

Si $x = 6$ entonces $\quad y = 5 - (6)$

$$y = -1$$

De donde, una solución es $(6, -1)$.

Si $x = -1$ entonces $\quad y = 5 - (-1)$

$y = 6$

Y la otra solución es $(-1, 6)$.

Dos ecuaciones de la forma $ax^2 + by^2 = c$

El método para resolver un sistema de dos ecuaciones de esta forma consiste en eliminar por suma o resta una de las variables, para despejarla y sustituirla después en cualquiera de las dos ecuaciones originales.

Ejemplo.

3. Resolver:
$$\begin{aligned} 5x^2 - 3y^2 - 11 &= 0 \\ 7x^2 - 5y^2 - 13 &= 0 \\ 5(5x^2 - 3y^2 - 11) &= 0 \cdot (5) \\ -3(7x^2 - 5y^2 - 13) &= 0 \cdot (-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25x^2 - 15y^2 - 55 &= 0 \\ -21x^2 + 15y^2 + 39 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 16 &= 0 \\ 4x^2 &= 16 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2. \end{aligned}$$

O sea, $\quad x = 2 \quad$ y $\quad x = -2.$

Y si $x = 2$ entonces en $5x^2 - 3y^2 - 11 = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} 5(2)^2 - 3y^2 - 11 &= 0 \\ 20 - 3y^2 - 11 &= 0 \\ -3y^2 + 9 &= 0 \\ -3y^2 &= -9 \\ y^2 &= 3 \\ y &= \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

de donde tenemos dos soluciones:

$$(2, \sqrt{3}) \qquad \text{y} \qquad (2, -\sqrt{3})$$

y si $x = -2$ entonces en $5x^2 - 3y^2 - 11 = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} 5(-2)^2 - 3y^2 - 11 &= 0 \\ 20 - 3y^2 - 11 &= 0 \\ -3y^2 &= -9 \\ y &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

y obtenemos otras dos soluciones que son:

$$(-2, \sqrt{3}) \qquad \text{y} \qquad (-2, -\sqrt{3}).$$

La solución total son las parejas $(2, \sqrt{3})$, $(2, -\sqrt{3})$, $(-2, \sqrt{3})$ y $(-2, -\sqrt{3})$.

Dos ecuaciones sin términos lineales

Otras ecuaciones cuadráticas que se nos pueden presentar en un sistema son de la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$$

donde a o c son diferentes de cero y b debe ser diferente de cero al menos en una de las ecuaciones del sistema. En estas ecuaciones no tendremos términos en x o en y, por tanto no tendremos términos lineales.

El método para resolver un sistema de dos ecuaciones de esta forma consiste en eliminar la constante d en una de las ecuaciones del sistema para después, por medio de factorización o fórmula general, despejar y en función de x o viceversa y después sustituir en cualquiera de las ecuaciones dadas.

Ejemplo

4. Resolver el sistema $\begin{aligned} x^2 - 2xy - 2y^2 &= 1 \\ 2x^2 + xy + y^2 &= 2 \end{aligned}$

Multiplicamos por -2 la primera ecuación y la sumamos a la segunda:

$$\begin{array}{r} -2(x^2 - 2xy - 2y^2) = (1)(-2) \\ 2x^2 + xy + y^2 = 2 \\ \hline -2x^2 + 4xy + 4y^2 = -2 \\ 2x^2 + xy + y^2 = 2 \\ \hline 5xy + 5y^2 = 0 \end{array}$$

Factorizamos:

$$5y(x + y) = 0$$

$$5y = 0 \quad \text{ó} \quad x + y = 0$$

$$y = 0 \quad \text{ó} \quad y = -x$$

Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos:

si $y = 0$

$$x^2 - 2xy - 2y^2 = 1$$
$$x^2 - 2x(0) - 2(0)^2 = 1$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

Con esto formamos las parejas $(1,0)$, $(-1,0)$

Y si $y = -x$

$$x^2 - 2xy - 2y^2 = 1$$
$$x^2 - 2x(-x) - 2(-x)^2 = 1$$
$$x^2 + 2x^2 - 2x^2 = 1$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1.$$

Sustituyendo $x = 1$ y $x = -1$ en $y = -x$ obtenemos:

si $x = 1$, $\quad y = -(1) \quad (1, -1)$
si $x = -1$, $\quad y = -(-1) \quad (-1, 1)$

Todas las soluciones del sistema son:

$$(1, 0), (-1, 0), (1, -1) \text{ y } (-1, 1).$$

Ejercicio 6.6.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con cuadráticas

1. $x^2 + 8y = 0$
   $x - y = 0$

2. $y^2 - 4x = 0$
   $x + y = 0$

3. $x^2 + y^2 = 1$
   $x + y = 1$

4. $x^2 + 2y^2 = 1$
   $2x + y = 0$

5. $2x^2 - y^2 = 1$
   $x - y = 1$

6. $3x^2 + 2y^2 = 25$
   $x + y = 5$

7. $xy = 1$
   $4y - x = 0$

8. $x^2 + 2xy - 2y^2 = 1$
   $y - x = 1$

9. $x^2 = 3y$
$3x - 3y = 0$

10. $x^2 - xy + y^2 = 7$
$x - 2y = -1$

11. $x^2 + y^2 = 25$
$x^2 - y^2 = 25$

12. $5x^2 + 2y^2 = 12$
$x^2 + y^2 = 3$

13. $x^2 + 3y^2 = 112$
$2x^2 - 9y^2 = -16$

14. $2x^2 - 3y^2 + 2 = 0$
$x^2 - y^2 + 9 = 0$

15. $2y^2 + x^2 - 4 = 0$
$y^2 + x^2 - 2 = 0$

16. $y^2 - 9x^2 + 9 = 0$
$x^2 - y^2 = 1$

17. $2x^2 + y^2 = 34$
$x^2 + y^2 = 25$

18. $4x^2 + 3y^2 - 12 = 0$
$x^2 + y^2 - 4 = 0$

19. $x^2 + y^2 - 36 = 0$
$x^2 - y^2 + 20 = 0$

20. $4x^2 + y^2 - 20 = 0$
$x^2 + 4y^2 - 10 = 0$

21. $3x^2 + xy = 6$
$x^2 + y^2 = 3$

22. $4xy = -3$
$x^2 + 2xy + y^2 = 1$

23. $10x^2 + 5xy - 5y^2 = 0$
$xy = 1$

24. $3x^2 - 17xy + 10y^2 = 0$
$3x^2 + 5y^2 - 19 = 0$

25. $63x^2 + 5xy - 28y^2 = 30$
$11x^2 + xy - 5y^2 = 5$

Resolver los siguientes problemas.

26. Si el área de un rectángulo es 216 m^2 y su perímetro es 60 m. Hallar las dimensiones del rectángulo.
27. Hallar dos números cuya suma sea 15 y la diferencia de sus cuadrados es 135.
28. Si al largo de un piso rectangular se aumentan 2 metros y al ancho un metro, su área aumentará en 24 m^2. Además. si el ancho es disminuido en un metro, el área se disminuye en 20 m^2. Encontrar las dimensiones del piso.
29. La suma de los cuadrados de dos números es 29/9 y el producto de ellos es 10/9. Hallar los números.
30. Un rectángulo es tal, que una de sus diagonales mide 41 cms y el área de dicho rectángulo es 360 cm^2. Encontrar las medidas de sus lados.
31. Si un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 85 cm es tal, que al aumentar uno de sus lados en 11 cm y al disminuir el otro en 7 cm., la longitud de la hipotenusa no se altera. Encuentre las longitudes del rectángulo.

32. Hallar dos números sabiendo que el cuadrado del primero es igual al segundo y que la suma del cuadrado del segundo número más el doble del cuadrado del primero es igual a 24.
33. Hallar dos números sabiendo que el producto de ellos es -2 y que la suma de cuatro veces el primero con cinco veces el segundo es seis.
34. Hallar dos números sabiendo que la suma de sus cuadrados es 180 y que la suma de sus recíprocos es 1/4.

Sección 6.7

FUNCIONES POLINOMIALES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir función polinomial de grado n.
2. Definir ecuación polinomial de grado n.
3. Enunciar el teorema fundamental del álgebra.
4. Enunciar y demostrar los siguientes teoremas:

   a) del residuo
   b) del factor
   c) del número de raíces.

5. Utilizar la división sintética para encontrar las raíces de un polinomio de grado n.

En secciones anteriores discutimos las funciones lineales y cuadráticas; en ésta, presentaremos un método para determinar los ceros o raíces de las funciones polinomiales de grado mayor o igual que 3, donde a lo más, dos de sus raíces son racionales.

Definición. Una expresión de la forma:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

donde n es entero positivo, $a_0 \neq 0$ y $a_0, a_1, \ldots a_n$ son números reales o complejos, es llamada una función polinomial de grado n.

Ejemplo.

1. $f(x) = 8$ es una función polinomial de grado "0"
   $f(x) = 3x - 1$ es una función polinomial de grado "1"
   $f(x) = 5x^2 + 8x - 1$ es una función polinomial de grado "2"
   $f(x) = x^3 - 1$ es una función polinomial de grado "3"

Si en la función polinomial

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

$f(x) = 0$ se formará una ecuación polinomial.

Definición. La ecuación

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + 12x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

donde n es entero positivo, $a_0 \neq 0$ y $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ son números reales o complejos, es llamada una ECUACIÓN POLINOMIAL de grado n.

Ejemplo 2.

$3x - 1 = 0$ es una ecuación de grado 1
$5x^2 + 8x - 1 = 0$ es una ecuación de grado 2
$x^3 - 1 = 0$ es una ecuación de grado 3
$x^4 - 16 = 0$ es una ecuación de grado 4

Definición. El valor de la variable x que satisface a la ecuación polinomial $f(x) = 0$ se le llama RAÍZ o SOLUCIÓN de la ecuación ó se dice que x es un CERO de la función polinomial $f(x)$.

Ejemplos.

3. $f(x) = 3x - 3$ es una función polinomial de grado 1, y la expresión $3x - 3 = 0$ es una ecuación polinomial de grado 1.

   Entonces, $x = 1$ es una SOLUCIÓN o RAÍZ de la ecuación $3x - 3 = 0$

   ó $x = 1$ es un CERO de la función polinomial $f(x) = 3x - 3$ ya que $f(1) = 3(1) - 3$

$$= 3 - 3$$
$$f(1) = 0.$$

4. $f(x) = x^2 - 16$ es una función polinomial de grado 2 donde $x = 4$ y $x = -4$ son CEROS de la función polinomial ya que:

$$f(4) = (4)^2 - 16 \quad \text{ó} \quad f(-4) = (-4)^2 - 16$$
$$f(4) = 0 \qquad\qquad f(-4) = 0$$

La expresión $x^2 - 16 = 0$ es una ecuación polinomial de grado 2, donde $x = 4$ y $x = -4$ son SOLUCIONES o RAÍCES de la ecuación.

5. ¿Es $x = -2$ un CERO de $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$?

$$\text{Como } f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2$$
$$= -8 + 8 + 2 - 2$$
$$= 0$$

entonces se puede concluir que $x = -2$ si es un CERO de $f(x)$

Observación. También se puede decir que $x = -2$ es una SOLUCIÓN o RAÍZ de la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

6. ¿Es $x = -1$ un CERO de $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$?

$$\text{como } f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2$$
$$= -1 + 2 + 1 - 2$$
$$= 0$$

Entonces se puede concluir que $x = -1$ si es un CERO de $f(x)$. O se puede afirmar también que $x = -1$ es una SOLUCIÓN o RAÍZ de la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

7. ¿Es $x = 0$ un CERO de $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$?

$$\text{Como } f(0) = (0)^3 + 2(0)^2 - (0) - 2$$
$$f(0) = -2$$

Se concluye que $x = 0$, NO es un CERO de $f(x)$ ó no es una SOLUCIÓN o RAÍZ de la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

Para obtener los CEROS de una función polinomial o las SOLUCIONES o RAÍCES de una ecuación polinomial, serán necesarios los siguientes teoremas.

Teorema del residuo

> Si f es una función polinomial y si $a \in C$ entonces $f(a)$ es igual al residuo de dividir $f(x)$ entre $(x - a)$.

Demostración.

Si $f(x)$ se divide entre $(x - a)$ entonces, por el algoritmo de la división:

$$f(x) = g(x)(x - a) + R$$

donde $g(x)$ es el cociente y R es el residuo.

Y si $x = a$, obtenemos:

$$\begin{aligned} f(a) &= g(a)(a - a) + R \\ f(a) &= g(a)(0) + R \\ f(a) &= 0 + R \\ f(a) &= R \end{aligned}$$

Ejemplos.

8. Si $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 8x + 3$, hallar $f(2)$ en dos formas diferentes.

   a) $f(2) = 2(2)^3 + 7(2)^2 - 8(2) + 3$
   $= 16 + 28 - 16 + 3$
   $= 31$

   b) Por el teorema del residuo tenemos:

   $2x^3 + 7x^2 - 8x + 3 \quad \lfloor x - 2$

   lo cual se puede simplificar por división sintética:

   $$\begin{array}{r|llll} 2 & +7 & -8 & +3 \\ & +4 & +22 & +28 \\ \hline & 2 & +11 & +14 & +31 \end{array}$$

   de donde el residuo es 31 y $f(2) = 31$.

9. Obtener $f(1)$ si $f(x) = x^3 + 2x - 2$

   a) $f(1) = (1)^3 + 2(1) - 2$
   $f(1) = 1$

b) Por el teorema del residuo se tiene que $f(1)$ es el residuo de dividir $(x^3 + 2x - 2)$ entre $(x - 1)$. Esta división se puede realizar por división sintética.

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 0 & 2 & -2 & \lfloor\, 1 \\ & 1 & 1 & 3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & \textcircled{1} & \end{array}$$

por lo que el residuo es 1 y $f(1) = 1$

10. Obtener $f(-1)$ si $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

a) $f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2$
$= -1 + 2 + 1 - 2$
$f(-1) = 0$

b) Por el teorema del residuo se tiene que $f(-1)$ es el residuo de dividir $x^3 + 2x^2 - x - 2$ entre $(x - (-1))$ ó $(x + 1)$. Por división sintética

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 2 & -1 & -2 & \lfloor\, -1 \\ & -1 & -1 & +2 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

es decir

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 1} = x^2 + x - 2 \text{ con residuo ''o'' y } f(-1) = 0$$

Teorema del factor

> Si $x = a$ es un CERO de la función polinomial $f(x)$ entonces $(x - a)$ es un factor de $f(x)$.

Demostración.

Por el algoritmo de la división:

$$f(x) = g(x)\ (x - a) + \mathbf{R}$$

pero por el teorema del residuo:

$$f(a) = R$$

de donde:

$$f(x) = g(x)\,(x - a) + f(a)$$

Dado que $f(a) = 0$, tenemos:

$$f(x) = g(x)\,(x - a)$$

de donde observamos que $(x - a)$ es factor de $f(x)$.

Ejemplos

11. Demostrar que $x - 3$ es factor de $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

$$\begin{aligned} f(3) &= (3)^3 - 4(3)^2 - 3(3) + 18 \\ &= 27 - 36 - 9 + 18 \\ &= 45 - 45 \\ f(3) &= 0 \end{aligned}$$

Por el teorema del factor $(x - 3)$ es un factor de este polinomio.

12. Demostrar que $(x + 2)$ es un factor de $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 2$.

Se puede utilizar, también, división sintética y observar su residuo:

$$\begin{array}{rrrrrl} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 & \llcorner -2 \\ & -2 & 0 & 0 & +2 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \end{array}$$

Por tanto, $(x + 2)$ sí es factor de $f(x)$

Recíproco del teorema del factor

> Si $(x - a)$ es un factor $f(x)$ entonces $x = a$ es un cero de la función $f(x)$.

Demostración.

Como $(x - a)$ es un factor de $f(x)$, por tanto, la división de $f(x)$ entre $(x - a)$ es exacta y el residuo debe de ser cero y usando el teorema del residuo se concluye que:

$$f(a) = 0$$

es decir, a es un cero de $f(x)$.

Ejemplos.

13. Forma una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean $x = 2$ y $x = 1$.

    Si $x = 2$ es una solución de $f(x) = 0$, entonces por teorema del factor $(x - 2)$ es un factor de $f(x)$ y también si $x = 1$ es una solución, $(x - 1)$ es un factor de $f(x)$.
    Es decir

$$f(x) = (x - 2)(x - 1)$$
$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

    y la ecuación cuadrática es $x^2 - 3x + 2 = 0$

14. Forma una función polinomial de tercer grado cuyos CEROS sean $x = -3$, $x = 5$ y $x = -1$.

    Si $x = -3$, $x = 5$ y $x = -1$ son ceros de $f(x)$ entonces por teorema del factor $(x - (-3))$, $(x - 5)$, $(x - (-1))$ son factores de $f(x)$. Es decir

$$f(x) = (x + 3)(x - 5)(x + 1)$$
$$f(x) = (x^2 - 2x - 15)(x + 1)$$
$$f(x) = x^3 - x^2 - 17x - 15$$

    y $$x^3 - x^2 - 17x - 15 = (x + 3)(x - 5)(x + 1)$$

Uno de los teoremas más importantes dél álgebra es el TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA cuya demostración fue proporcionada en 1797 por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855). El teorema no puede ser demostrado por métodos algebraicos elementales, por lo que no se incluye una demostración de él.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

> Si f es una función polinomial de grado $n \geq 1$, con coeficientes complejos entonces f tiene por lo menos un cero en los complejos.

Combinando el Teorema fundamental del álgebra con el teorema del factor se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 1.

> Cada polinomio $f(x)$ de grado $n \geq 1$ puede ser expresado como el producto de n factores lineales.

Demostración.

Sea $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ con $a_0 \neq 0$, por el teorema fundamental $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz, sea b_1 esta raíz y recordando el teorema del factor decimos que $(x - b_1)$ es un factor de $f(x)$, y así:

$$f(x) = (x - b_1) P_1 (x)$$

donde $P_1 (x)$ es un polinomio de grado $n - 1$, cuyo término de máximo grado es $a_0 x^{n-1}$; usando el teorema fundamental y el del factor para el polinomio P_1 tenemos:

$$P_1(x) = (x - b_2) P_2 (x)$$

por tanto,

$$f(x) = (x - b_1)(x - b_2) P_2(x)$$

donde b_2 es una raíz de $P_1 (x) = 0$ y $P_2 (x)$ es un polinomio cuyo término de grado máximo es $a_0 x^{n-2}$.

Este proceso puede continuar hasta obtener n factores lineales, donde el último factor es el término a_0.

Factorizando entonces la constante a_0 del último factor podemos escribirlo como $a_0 (x - b_n)$ y se tiene que:

$$f(x) = a_0 (x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_n).$$

Los números $b_1, b_2, \ldots, b_n$ no necesitan ser diferentes, porque ciertos factores pueden repetirse.

Teorema 2.

> Toda ecuación polinomial $f(x) = 0$ de grado $n \geq 1$, con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces. Reales o complejas

Demostración.

De acuerdo al teorema anterior:

$$f(x) = a_0 (x - b_1)(x - b_2), \ldots, (x - b_n)$$

e igualando a cero obtenemos:

$$a_0 (x - b_1)(x - b_2), \ldots, (x - b_n) = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son $b_1, b_2, \ldots, b_n$, ya que cualquiera de ellas, al ser sustituidas, anulan el producto, y así la ecuación tiene solamente las n raíces $b_1, b_2, \ldots, b_n$, ya que cualquier otro valor de x no anulará a ningún factor.

Observaciones.

a) Si un factor ocurre m veces, la raíz correspondiente es llamada raíz de multiplicidad m.

b) Si el número complejo $a + bi$, $b \neq 0$ es una raíz de una ecuación polinomial con coeficientes reales, entonces el número complejo $a - bi$ es también una raíz.

Los teoremas que hemos mencionado hasta aquí y el proceso de la división sintética dan un medio efectivo de probar si un número $x = a$ es una solución de $f(x) = 0$ cuando $f(x)$ es un polinomio de cualquier grado n.

Ejemplos.

15. Si $x^2 + x - 2 = 0$ entonces sus soluciones o raíces son $x = -2$ y $x = 1$ ya que

$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

16. La solución a raíz de $x^2 + 2x + 1 = 0$ es $x = -1$, y ésta es de multiplicidad doble, ya que

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$(x + 1)(x + 1) = 0$$
$$(x + 1)^2 = 0$$

17. Si $f(x) = (x - 1)^3 (x + 2)$ obtener los ceros de $f(x)$.

$$(x - 1)^3 (x + 2) = 0$$
$$(x - 1)^3 = 0 \text{ ó } x + 2 = 0$$

por lo que $x = 1$, $x = 1$, $x = 1$ y $x = 2$ son los ceros de $f(x)$ y se observa que $x = 1$ es de multiplicidad tres.

18. Demostrar que $x = 3$ es una solución de multiplicidad doble de

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$$

y obtener las otras dos soluciones.

Si $x = 3$ es una solución, entonces la división de $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$ entre $x - 3$ debe ser exacta, es decir, su residuo debe ser cero.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -7 & +13 & +3 & -18 & 3 \\ & 3 & -12 & 3 & 18 & \\ \hline 1 & -4 & 1 & 6 & 0 & \end{array}$$

o sea que

$$\frac{x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18}{x - 3} = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

o $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = (x^3 - 4x^2 + x + 6)(x - 3)$

Si $x = 3$ es una raíz doble entonces debe ser un cero de $x^3 - 4x^2 + x + 6$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -4 & 1 & 6 & 3 \\ & 3 & -3 & -6 & \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Es decir

$$\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x - 3} = x^2 - x - 2$$

así

$$\begin{aligned} x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 &= (x^3 - 4x^2 + x + 6)(x - 3) \\ &= (x^2 - x - 2)(x - 3)(x - 3) \\ &= (x - 2)(x + 1)(x - 3)(x - 3) \end{aligned}$$

Por lo que las otras dos soluciones son $x = -2$ y $x = -1$

19. Si $x = 3$ es una solución de $x^3 - 4x^2 + 5x - 6 = 0$ encontrar las otras dos soluciones. Por divisón sintética se demostrará que $x = 3$ es solución, si el residuo es cero.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -4 & 5 & -6 & 3 \\ & 3 & -3 & 6 & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 & \end{array}$$

es decir,

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 6}{x - 3} = x^2 - x + 2$$

o $$x^3 - 4x^2 + 5x - 6 = (x^2 - x + 2)(x - 3)$$

como $x^2 - x + 2$ no se puede factorizar directamente obtendremos las soluciones de $x^2 - x + 2 = 0$ por la fórmula general.

$a = 1$
$b = -1$
$c = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

es decir, $x = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2}$ y $x = \dfrac{1 - i\sqrt{7}}{2}$

Teorema 3

> Si $z = a + bi$ es una solución de $f(x) = 0$ entonces $z = a - bi$ también es una solución.

Observación. Por el teorema 3 se puede afirmar que si $z = a + bi$ en un cero de $f(x)$ entonces también lo es $z = a - bi$

Ejemplos.

20. Si $x = 2 + i$ es solución de $f(x) = 0$, entonces también es solución $x = 2 - i$

ó si $x = 3i$ es solución de $f(x) = 0$, entonces también lo es $x = -3i$

21. Encontrar un polinomio de grado 4 con coeficientes reales que tengan a $x = 1 - i$ y $x = 2i$ como ceros

Por el teorema 3 si $x = 1 - i$ es un cero entonces $x = 1 + i$ también lo es y si $x = 2i$ es un cero también $x = -2i$, y aplicando el teorema del factor se tiene que $(x - (1 + i))$, $(x - (1 - i))$, $(x - 2i)$ y $(x - (-2i))$ son factores del polinomio $f(x)$ que se pide.

Es decir,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - (1 + i))(x - (1 - i))(x - 2i)(x - 1(-2i)) \\ &= [(x - 1 - i)(x - 1 + i)][(x - 2i)(x + 2i)] \\ &= [(x - 1)^2 - i^2][x^2 - 4i^2] \\ &= [x^2 - 2x + 1 - (-1)][x^2 + 4] \\ &= [x^2 - 2x + 2][x^2 + 4] \end{aligned}$$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8$$

Definición:

Una función polinomial $f(x)$ en la cual sus términos estan en orden descendente de sus potencias se dice que tiene una VARIACIÓN de SIGNO si dos términos consecutivos tienen signos opuestos.

Ejemplos.

22. $f(x) = 3x^3 - x^4 + x^2 - 5$ tiene tres variaciones de signo.
23. $f(x) = 5x^4 + x^2 + x - 3$ tiene una variación de signo.
24. $f(x) = x^2 + x + 1$ no tiene variaciones de signo.

Observación. Si una potencia falta, como en el ejemplo 22 que no tiene término en x^4 ni término en x, no se considerarían como coeficientes cero.

Las variaciones de signo proporcionan información relativa a las raíces o soluciones de $f(x) = 0$ por lo que el siguiente teorema conocido como "Regla de los signos de Descartes" sera de utilidad en algunas ocasiones para la obtención de las mismas.

Regla de los signos de Descartes. El NÚMERO DE RAÍCES POSITIVAS de una ecuación polinomial $f(x) = 0$ con coeficientes reales es igual al número de variaciones de signo en $f(x)$ ó es este número disminuido en un entero par. EL NÚMERO DE RAÍCES NEGATIVAS de $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo de $f(-x)$ o es este número disminuido en un entero par.

Observación. Una única variacion de signo en $f(x)$ significa que hay exactamente una raíz positiva en $f(x) = 0$. Si las variaciones de signo exceden en una, la Regla de los signos de Descartes no da información exacta respecto a las raíces.

Ejemplo:

25.

a) Si $f(x)$ tiene cuatro variaciones de signo entonces $f(x)$ tendría, 4 raíces, dos o ninguna positiva.
b) Si $f(-x)$ tiene tres variaciones de signo entonces $f(x)$ tiene 3 o una raíz negativa.
c) $f(x)$ tendrá 5 ó 3 o 1 raíz positiva si $f(x)$ tiene 5 variaciones de signo.

Ejemplos.

26. Utilizando la Regla de los signos de Descartes, analizan la siguiente ecuación.

$$x^3 + 3x^2 + 5x - 6 = 0$$

Como la ecuación tiene una variación de signo entonces la ecuación tiene exactamente una raíz positiva.
Para probar las raíces negativas se remplazará x por $(-x)$ en $f(x)$ es decir.

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + 3(-x)^2 + 5(-x) - 6 \\ &= -x^3 + 3x^2 - 5x - 6 \end{aligned}$$

y se observan dos variaciones de signo por lo que la ecuación $f(x) = 0$ tiene dos raíces negativas, o bien no posee ninguna raíz negativa. Así se puede concluir que las posibles raíces de $f(x)$ son

a) Una raíz positiva y dos raíces negativas.
ó *b*) Una raíz positiva y dos raíces imaginarias.

27 Determinar la información que da la Regla de los signos de Descartes para

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

No hay variación de signo en $f(x)$ por lo que no posee raíces positivas

y $$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^3 + 2(-x)^2 + 3(-x) + 1$$
$$f(-x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

la cual tiene cuatro variaciones de signo, entonces por la Regla de los signos de Descartes se tienen las siguientes posibilidades:

a) Todas las raíces son negativas.
ó *b*) dos raíces son negativas y dos imaginarias
ó *c*) todas las raíces son imaginarias.

No existen fórmulas o métodos para resolver ecuaciones de grado mayor que 4 y las que existen para $n = 3$ y $n = 4$ son muy complicadas y difíciles de aplicar. Sin embargo, si la ecuación tiene raíces que sean números racionales, se pueden encontrar los posibles valores de estas raíces racionales utilizando los teoremas anteriores y el siguiente:

Teorema 4

Si $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ es un polinomio con coeficientes enteros y si un número racional p/q en sus términos más simples es una raíz de $f(x) = 0$, entonces p es un factor de a_n y q es un factor de a_0.

Demostración.

Como p/q es una raíz de $f(x) = 0$,

$$a_0 (p/q)^n + a_1 (p/q)^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

multiplicamos a ambos lados por q^n y obtenemos:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_n q^n = 0 \qquad *$$

restamos a ambos lados de la ecuación $a_0 p^n$ y nos queda:

$$a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_n q^n = -a_0 p^n$$

factorizamos el lado izquierdo:

$$q(a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \ldots + a_n q^{n-1}) = a_0 p^n$$

Observamos que q es un factor del primer miembro y todos los coeficientes son enteros, entonces debe ser también factor del segundo miembro. Ya que p y q no tienen factores en común, por hipótesis del teorema, ningún factor de q es factor de a^n de donde q debe ser factor de a_0. Para demostrar que p es factor de a_n se sigue el mismo procedimiento, pero en lugar de restar en $* a_0 p^n$ restaremos $a_n q^n$.

Observaciones.

a) Por el teorema 4 se puede afirmar que las POSIBLES SOLUCIONES de $f(x) = 0$ son "p/q" donde p es un factor de a_n y q es un factor de a_0.

b) Lo que nos da este último teorema son los posibles ceros de $f(x)$ o las posibles raíces de $f(x) = 0$. Tendremos que probar cada una de estas posibilidades para saber cuáles son esas raíces. Estas pruebas las podremos facilitar por medio de la división sintética.

c) Si a es una raíz de $f(x) = 0$ que se ha encontrado por división sintética, denotaremos el cociente por $f_1(x)$; las raíces restantes de $f(x) = 0$ serán las raíces de $f_1(x) = 0$ y la subsecuente búsqueda de las raíces deberá continuarse en la ecuación $f_1(x) = 0$.

Una ecuación como $f_1(x)$ se llama una ecuación reducida.

Ejemplos.

28. Obtener los ceros de

$$f(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$$

Los factores de $a_n = 1$ es el mismo y los factores de $a_0 = 2$ son (1) y (2) por lo que los POSIBLES CEROS de $f(x)$ son:

$$\pm 1 \pm 1/2$$

Utilizando la Regla de los signos de Descartes tenemos que $f(x) = 0$ debe tener una única raíz positiva ya que sólo existe una variación de signo en $f(x)$, y como $f(-x) = 2(-x)^4 + (-x)^3 + (-x)^2 + (-x) - 1 = 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$ tiene tres variaciones de signo, entonces $f(x)$ tiene tres o una raíz negativa. Se probará por división sintética si $x = 1$ es un cero.

2	1	1	1	− 1	| 1
	2	3	4	5	
2	3	4	5	(4)	

como el residuo es 4 y no cero, $x = 1$ no en un cero.
La otra posible raíz positiva es $x = 1/2$

2	1	1	1	− 1	| 1/2
	1	1	1	+ 1	
2	2	2	2	(0)	

Como el residuo es cero entonces "$x = 1/2$" si es un cero de $f(x)$ y por teorema del factor

$$f(x) = (x - 1/2)(2x^3 + 2x^2 + 2x + 2) = 0$$

y las raíces que faltan se pueden obtener de la ecuación $C_1(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = 0$ que se le llama "la primera ecuación reducida". Se observa que $C_1(x)$ no tiene variaciones de signo por lo que no tendrá más raíces positivas.
Otra posible solución es $x = -1$ que se probará

2	2	2	2	| − 1
	− 2	0	−2	
2	0	2	0	

como el residuo es cero entonces "$x = -1$" también es un cero de $f(x)$ y así

$$\begin{aligned} C_1(x) &= 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \\ &= (x - (-1)(2x^2 + 2) \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 \\ &= (x - 1/2)(2x^3 + 2x^2 + 2x + 2) \\ f(x) &= (x - 1/2)(x + 1)(2x^2 + 2) \end{aligned}$$

La ecuación $C_2(x) = 2x^2 + 2$ es la segunda ecuación reducida y los ceros son "$x = +i$" y "$x = -i$" ya que

$$2x^2 + 2 = 0$$
$$2x^2 = -2$$
$$x^2 = -1$$
$$x = \pm \sqrt{-1}$$
$$x = \pm i$$

también por el teorema del factor

$$2x^2 + 2 = 2(x^2 + 1)$$
$$= 2(x + i)(x - i)$$

Haciendo un resumen de todo lo anterior se puede concluir:

a) Los ceros de $f(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$ son

$$x = -1, \quad x = 1/2, \quad x = i, \quad x = -i$$

b) Los factores de $f(x)$ son

$$2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 = (x - 1/2)(2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$$
$$= (x - 1/2)(x + 1)(2x^2 + 2)$$
$$= (x - 1/2)(x + 1)(2)(x^2 + 1)$$
$$= (x - 1/2)(x + 1)(2)(x + 1)(x - 1)$$

c) Las soluciones de la ecuación $2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0$
son $x = -1, \quad x = 1/2, \quad x = i, \quad x = -i$

29. Si $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3$, hallar todo los ceros de $f(x)$.

Los posibles ceros son: $\pm 1, \pm 3/2, \pm 1/2, \pm 3$.
Debemos probar cada uno por medio de la división sintética; tomándolos en el orden en que aparecen encontraremos que + 1 es un cero, o sea:

					| 1
2	− 7	1	7	− 3	
	2	− 5	− 4	+ 3	
2	− 5	− 4	+3	0	

de donde, $x = 1$ es un cero y $(x - 1)$ será un factor de $f(x)$, o sea:

$$2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3 = (x - 1)(2x^3 - 5x^2 - 4x + 3)$$

Para encontrar los demás ceros haremos lo mismo, pero para su polinomio reducido que es $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$, observamos que los posibles ceros son exactamente los de la original.

$$\begin{array}{rrrrl} 2 & -5 & -4 & 3 & \llcorner +1/2 \\ & 1 & -2 & -3 & \\ \hline 2 & -4 & -6 & 0 & \end{array}$$

de donde $x = +1/2$ es un cero y $(x - 1/2)$ será un factor de $f(x)$, o sea:

$$2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3 = (x - 1)(x - 1/2)(2x^2 - 4x - 6)$$

La ecuación reducida que queda es una cuadrática y resolviéndola tenemos:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x - 6 &= 0 \\ 2(x^2 - 2x - 3) &= 0 \\ 2(x - 3)(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

de donde $x = 3$ y $x = -1$ son los otros ceros de $f(x)$ y así:

$$2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3 = 2(x - 1)(x - 1/2)(x - 3)(x + 1)$$

y las raíces de $2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3 = 0$ son:

$$x = 1, x = +1/2, x = 3 \text{ y } x = -1$$

30. Resolver la ecuación.

$$3x^5 - x^4 + 45x^3 - 15x^2 - 48x + 16 = 0$$

Los factores de $a_n = 16$ son 1, 2, 4, 8 y 16 y los de $a_0 = 3$ son 1 y 3 por lo que las posibles soluciones de la ecuación son:

$$\pm 1, \pm 1/3, \pm 2, \pm 2/3, \pm 4, \pm 4/3, \pm 8, \pm 8/3, \pm 16, \pm 16/3$$

Como las variaciones de signo de $f(x)$ son cuatro, entonces tiene 4 raíces positivas o dos o ninguna. $f(-x) = 3(-x)^5 - (-x)^4 + 45(-x)^3 - 15(-x)^2 - 48(-x) + 16 = -3x^5 - x^4 - 45x^3 - 15x^2 + 48x + 16$ se observa que existe una variación de signo por lo que tiene una raíz negativa.

Se probará si $x = -1$ es solución

$$\begin{array}{rrrrrrl} 3 & -1 & 45 & -15 & -48 & 16 & \llcorner -1 \\ & -3 & 4 & -49 & +64 & -16 & \\ \hline 3 & -4 & 49 & -64 & +16 & 0 & \end{array}$$

así "$x = -1$" sí es solución ya que el residuo es cero y se puede afirmar que $3x^5 - x^4 + 45x^3 - 15x^2 - 48x + 16 = (x + 1)(3x^4 - 4x^3 + 49x^2 - 64x + 16)$

Para la obtención de las demás raíces se probará en la ecuación reducida

$$3x^4 - 4x^3 + 49x^2 - 64x + 16 = 0$$

también aquí las posibles soluciones son los factores de 16 entre los factores de 3. que son las mismas que se mencionaron anteriormente. Las demás posibles raíces negativas. No serán soluciones ya que por la Regla de los signos de Descartes existía una única raíz negativa, siendo ésta "$x = -1$" ya comprobada. por lo que se comprobarán las posibles raíces positivas hasta llegar a una ecuación reducida cuadrática.

$x = 1$

3	− 4	49	− 64	16	⌊ 1
	3	− 1	48	− 16	
3	− 1	48	− 16	0	

Por lo que "$x = 1$" sí es solución ya que el residuo es cero y

$3x^4 - 4x^3 + 49x^2 - 64x + 16 = (x - 1)(3x^3 - x^2 + 48x - 16)$

y la segunda ecuación reducida es

$$3x^3 - x^2 + 48x - 16 = 0$$

y las posibles soluciones son la mismas que la ecuación que se dio en un principio. Se probará de nuevo con $x = 1$ porque puede ser posible que una raíz se repita.

3	− 1	48	− 16	⌊ 1
	3	2	50	
3	2	50	(34)	

Por lo que no es solución.

$x = 1/3$.

3	− 1	48	− 16	⌊ 1/3
	1	0	16	
3	0	48	0	

así "$x = 1/3$" es una solución y

$$3x^3 - x^2 + 48x - 16 = (x - 1/3)(3x^2 + 48)$$

La tercera ecuación reducida es $3x^2 + 48 = 0$ y se obtendrán sus soluciones despejando.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 48 &= 0 \\ 3x^2 &= -48 \\ x^2 &= -4\ 8/3 \\ x^2 &= -16 \\ \text{"}x &= \pm 4i\text{"} \end{aligned}$$

ó $\quad 3x^2 + 48 = 3(x^2 + 16)$
$\qquad\qquad = 3(x + 4i)(x - 4i)$

Resumiendo lo anterior se puede decir que las soluciones de

$$3x^5 - x^4 + 45x^3 - 15x^2 - 48x + 16 = 0$$

son $x = -1$, $x = 1$, $x = 1/3$, $x = 4i$, $x = -4i$

y también

$$3x^5 - x^4 + 45x^3 - 15x^2 - 48x + 16$$

$$\begin{aligned} &= (x + 1)(3x^4 - 4x^3 + 49x^2 - 64x + 16) \\ &= (x + 1)(x - 1)(3x^3 - x^2 + 48x - 16) \\ &= (x + 1)(x - 1)(x - 1/3)(3x^2 + 48) \\ &= (x + 1)(x - 1)(x - 1/3)(3)(x^2 + 16) \\ &= (x + 1)(x - 1)(x - 1/3)(3)(x + 4i)(x - 4i) \end{aligned}$$

rcicios.

Encontrar una función polinomial del menor grado posible y que tenga las raíces dadas.

a) $3, 2, -5$
b) $-4, 3/7$
c) $-6, i, -i$
d) $2 - i, 2 + i$
e) $2i, -2i, 1, -1$

En los problemas siguientes utilizar el teorema del residuo para encontrar:

a) f(3) si $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x - 1$
b) f(− 1/2) si $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7x - 3$
c) f(− 3) si $f(x) = 3x^2 + 8x - 3$
d) f(− 5) si $f(x) = 5x^5 + 2x^4 - 7x + 2$
e) $f(2)$ si $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$
f) $f(1)$ si $f(x) = 5x^6 - x^5 + x^4 - x^2 + 1$
g) $f(-2)$ si $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 5x + 15$
h) $f(0)$ si $f(x) = x^4 - 1$

3. Usar el Teorema del factor para determinar si la segunda expresión es un factor de la primera

a) $8x^3 - 25x^2 + 12x - 27$; $x - 3$
b) $x^3 - 5x^2 + 7x - 2$; $x - 2$
c) $2x^4 - x^3 - 18x^2 - 7$; $x + 3$
d) $x^7 + x^5 + x^3 - x + 2$; $x + 1$
e) $x^5 - 3x^4 + x^2 - x + 2$; $x - 1$
f) $16x^4 - 1$; $x - 1/2$
g) $x^5 - y^5$; $x - y$
h) $5x^6 - 7x^3 - 1$; $x + 2$

4. Usar el teorema del factor para obtener el valor real de k para que la segunda expresión sea factor de la primera.

a) $9x^4 - 35x^3 + kx^2 + kx - 4$; $x - 4$
b) $x^9 - kx^6 - x^4 + 7$; $x - 2$
c) $2x^4 - 15x^3 + kx - 6$; $x - 2$
d) $x^3 - kx^2 - 2x + 5$; $x + 1$
e) $3x^3 - x^2 - kx - 24$; $x + 3$

5. ¿Para qué valores de k se obtiene el mismo residuo cuando se divide $kx^2 - x + 3$ por $x + 2$ ó $x - 3$?

6. *a*) Si $x = 2$ y $x = 3$ son ceros de la función polinomial $f(x)$ indicar dos de los factores de dicha función
b) Si $x = -5$, $x = 4$ y $x = 1$ son raíces o soluciones de $f(x) = 0$ indicar tres de los factores de $f(x)$.
c) Si $x = 2$, $x = -2$, $x = i$ y $x = -i$ son cuatro ceros de la función polinomial $f(x)$, indicar los factores de $f(x)$.
d) $x = 3 + i$ y $x = 3 - i$ son dos de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ indicar dos de los factores de $f(x)$.
e) Dar un polinomio de grado tres donde $x = 3i$ y $x = 3$ son dos de sus ceros.

f) Dar una ecuación polinomial de grado cuatro donde $x = i$ y $x = 1 - 2i$ son dos de sus soluciones.
g) Dar una ecuación polinomial de grado tres donde $x = 4 - 2i$ y $x = 3$ sean dos de sus raíces.
h) Si $f(x) = (x - 1/3)^2(x - 4)(x + 2/5)$. Dar los ceros de esta función polinomial.
i) Si $x = 3$ es una solución de la ecuación cúbica $x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0$ obtener las demás raíces.
j) Si $f(x) = (x + 2)^3 (x - 1)(x + 1/2)$, dar los ceros de esta función polinomial.
k) Si $x = -2$ es una solución de la ecuación cúbica $x^3 + 2x^2 + 9x + 18 = 0$ obtener las demás soluciones.

7. Hallar los ceros de cada una de las siguientes funciones polinomiales.

a) $f(x) = 6x^3 - 7x - 1$
b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$
c) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 18x - 81$
d) $f(x) = 2x^4 + 10x^2 - 5x^3 - 20x + 8$
e) $f(x) = 6x^4 - 13x^3 + 51x^2 - 51x + 14$
f) $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3$
g) $f(x) = 3x^5 + 4x^4$
h) $f(x) = 24x^5 + 4x^4 - 42x^3 + 21x^2 - 12x + 5$
i) $f(x) = 2x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 24x^2 - 10x + 30$

8. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $4x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$
b) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = 0$
c) $6x^3 - 11x^2 + 10x - 3 = 0$
d) $3x^3 + 17x^2 + 24x + 10 = 0$
e) $9x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 8 = 0$
f) $25x^4 + 25x^3 - 189x^2 - 81x + 108 = 0$
g) $24x^4 + 28x^3 - 14x^2 + 7x - 5 = 0$
h) $9x^5 + 65x^3 - 45x^4 - 325x^2 - 144x + 720 = 0$
i) $8x^5 - 218x^3 + 450x - 4x^4 + 109x^2 - 225 = 0$
j) $x^5 + 5x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x - 8 = 0$

9. Factoriza las siguientes expresiones:

a) $6x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
b) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$
c) $6x^4 + x^3 + 2x^2 + 5x - 2$
d) $12x^3 - 28x^2 - 9x + 10$

e) $2x^5 - 10x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 5x + 25$
f) $16x^4 - 6x^3 - 17x^2 + 6x + 1$
g) $5x^4 + 4x^3 - 26x^2 + 20x - 3$
h) $2x^3 + 5x^2 - x - 1$
i) $25x^3 + 225x^2 - x - 9$
j) $3x^3 + 27x - 7x^2 - 63$
k) $4x^4 + 99x^2 - 25$
l) $6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1$
m) $120x^4 - 154x^3 + 71x^2 - 14x + 1$
n) $x^5 - 72x^3 + 10x^4 - 810x^2 - 729x$

Sección 6.8

RAÍCES IRRACIONALES

Objetivos

Después de estudiada esta seccion, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Encontrar las raíces irracionales de polinomios de grado n (con una aproximación dada).

Existe un método de aproximación que se describe como un método gráfico para encontrar las raíces irracionales de una ecuación polinomial. Este método está basado en el hecho de que si f(a) y f(b) tienen signos diferentes, la ecuación tiene una raíz entre a y b. El proceso consiste en encontrar parejas de valores de x cada vez más cercanos entre sí, para los cuales f(x) tiene signos opuestos.

Ejemplo.

1. Encontrar los ceros reales de la función definida por:

$$y = x^3 - 2x^2 + x - 3$$

Tabularemos para encontrar su gráfica:

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-21	-7	-3	-3	-1	9

Observamos que en la gráfica y en la tabulación existe un cero entre 2 y 3. En seguida preparamos otra tabla con valores por décimas entre 2 y 3, o sea:

x	2.1	2.2	2.3
$f(x)$	−0.459	+ .168	+ .887

Para encontrar estos valores de $f(x)$ rápidamente, podemos utilizar la división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -2 & 1 & -3 & \underline{2.1} \\
 & 2.1 & .21 & 2.541 & \\
\hline
1 & +\ .1 & 1.21 & -0.459 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -2 & 1 & -3 & \underline{2.2} \\
 & 2.2 & .44 & 3.168 & \\
\hline
+1 & +\ .2 & +1.44 & +0.168 &
\end{array}$$

de donde, el cero está entre 2.1 y 2.2, ya que f(2.1) y f(2.2) tienen signos diferentes.

Ahora consideraremos valores entre 2.1 y 2.2 y los colocaremos en la siguiente tabla:

x	2.11	2.12	2.13	2.14	2.15	2.16	2.17	2.18	2.19	2.20
$f(x)$	0.4002	.3406				-0.093	.029	+.034		1

donde los valores correspondientes de $f(x)$ los encontramos nuevamente por división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & 2 & 1 & 3 & \underline{2.11} \\
 & 2.11 & .2321 & +2.599731 & \\
\hline
1 & +\ .11 & 1.2321 & -0.400269 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -2 & 1 & -3 & \underline{2.12} \\
 & +2.12 & .2544 & +2.659328 & \\
\hline
1 & .12 & 1.2544 & -0.340672 &
\end{array}$$

De acuerdo a los valores de $f(x)$ en 2.11 y 2.12 podemos observar lo siguiente:

a) No hay cambio de signo, por lo que podemos suponer que no hay ninguna raíz entre 2.11 y 2.12 (aunque no podemos estar seguros). Por otra parte:

b) $|f(2.12)|$ es menor que $|f(2.11)|$ o sea, que la raíz está a la derecha de 2.12. (Probablemente).

Aunque podríamos tabular cada uno de los 10 valores de x, lo cual es largo y tedioso, tomaremos ahora 2.16 y 2.17:

1	− 2	+ 1	− 3	2.16
	2.16	.3456	2.906496	
1	.16	1.3456	− 0.093504	
1	− 2	1	− 3	2.17
	2.17	.3689	2.970513	
1	.17	1.3689	− 0.029487	

Tampoco aquí hubo cambio de signo para f(2.16) y f(2.17), pero observamos que los valores de $|f(x)|$ van decreciendo por lo que probaremos con un valor mayor que 2.17. Por ejemplo 2.18.

1	− 2	1	− 3	2.18
	2.18	.3924	3.035432	
1	.18	1.3924	+ 0.035432	

de donde se obtiene que el cero está entre 2.17 y 2.18.

Para obtener una mejor aproximación se puede continuar este proceso a tres cifras decimales.

Observación. Este método sólo nos dará valores aproximados. La gráfica de una función polinomial la veremos detenidamente en secciones posteriores.

Ejercicios.

1. Determinar la raíz especificada aproximada a dos cifras decimales:

   a) La raíz de $2x^3 - 11x^2 + 15x - 1$ entre 2 y 3.
   b) La raíz de $x^4 - x - 3 = 0$ entre 1 y 2.
   c) La menor raíz de $x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$ entre 0 y 1.
   d) La mayor raíz positiva de $x^3 + 3x^2 - 6x - 3 = 0$.
   e) La raíz de $6x^3 - 4x^2 - 15x + 10 = 0$ entre -1 y -2.
   f) Todas las raíces de $x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x - 3 = 0$.
   g) La raíz de $x^3 + 2x^2 - 7x + 1 = 0$ entre -3 y -4.
   h) Todas las raíces de $x^3 + 3x - 8 = 0$.
   i) Todas las raíces de $x^3 + 3x^2 + 5x - 2 = 0$ entre 0 y 1.

CAPÍTULO 7

Determinantes

INTRODUCCIÓN

Las matrices son un tema de mucha importancia en las matemáticas y se están usando cada vez más extensamente. Las encontramos en las aplicaciones de Economía, en Ingeniería y carreras de Ciencias.

En este capítulo, haremos una pequeña introducción de ellas y nos concretaremos en especial al estudio del determinante de una matriz y sus aplicaciones en la resolución de sistemas lineales.

Sección 7.1

DETERMINANTES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Dar la definición de Matriz Real.
2. Definir y obtener el orden de una matriz.
3. Definir y obtener la suma de dos o más matrices.
4. Definir y obtener el producto de un escalar por una matriz.
5. Enunciar las propiedades para la suma de matrices y producto de un escalar por una matriz.
6. Definir y obtener el producto de una matriz de orden $(n \times 1)$ y otra de orden $(1 \times n)$.
7. Definir y obtener el producto de una matriz de orden $(m \times n)$ y otra de orden $(n \times p)$.
8. Enunciar las propiedades para el producto de matrices.
9. Identificar algunos tipos de matrices.
10. Definir determinantes de orden 2 y 3.
11. Evaluar determinantes de orden 2 y 3 a partir de la definición.
12. Definir determinantes de orden n.
13. Enunciar y demostrar las propiedades de los determinantes de orden 2 y 3.
14. Evaluar determinantes usando las propiedades.
15. Usar la regla de Cramer en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

En la siguiente tabla se presentan las calificaciones de los exámenes de seis alumnos del curso de Álgebra, en tres exámenes parciales y en el examen final.

	Exámenes			
	1	2	3	Final
Manuel	85	75	60	90
Luis	90	80	70	100
Jimena	70	90	80	70
Andrea	90	100	100	100
Alfredo	55	90	65	70
Rebeca	70	100	80	60

Por ejemplo, Jimena obtuvo 70 en el primer examen, Andrea obtuvo 90 en el primer examen y 100 en cada uno de los demás exámenes. En la primera columna se presentan las calificaciones de los seis alumnos en el primer parcial.

Los datos que se presentan en la tabla anterior aparecen en forma natural en un arreglo rectangular. Si se consideran solamente los números, sin los encabezados se obtendrá un arreglo rectangular de números de la siguiente manera.

	Exámenes			
	1	2	3	Fi
Manuel	85	75	60	90
Luis	90	80	70	100
Jimena	70	90	80	70
Andrea	90	100	100	100
Alfredo	55	90	65	70
Rebeca	70	100	80	60

Este arreglo de números en forma rectangular es un ejemplo de una MATRIZ.

Definición. Una MATRIZ es un arreglo rectangular de números reales, encerrado en grandes paréntesis.

Ejemplo 1.

Las siguientes son algunas Matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = (2 \;\; 3 \;\; -1) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \\ -2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Definición. Los números reales que forman la matriz se llaman ELEMENTOS de la matriz. Los elementos en cualquier línea horizontal forman un RENGLÓN o HILERA y los elementos que se encuentran en cualquier línea vertical formarán una COLUMNA de la matriz.

En los ejemplos de matrices dados anteriormente la matriz A tiene dos hileras y dos columnas, la matriz C tiene dos hileras o renglones y tres columnas, la matriz D tiene una sola hilera y tres columnas.

Definición. Si una matriz tiene m hileras y n columnas, se dirá que su tamaño o forma es "$m \times n$".

De las matrices dadas anteriormente A es una matriz 2×2, B es una matriz 4×1, la matriz C es una de 2×3, D es una matriz 1×3 y D una de 4×3.

Es frecuente que se utilice notación con doble subíndice para denotar los elementos de una matriz. Por ejemplo a_{ij} representará al elemento de una matriz A que está en el i-ésimo renglón y el la j-ésima columna.

Por ejemplo si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

El elemento a_{11} es el número 2 ya que se encuentra en el primer renglón y primera columna, a_{12} es el número 1 ya que se encuentra en el tercer renglón y segunda columna, $a_{22} = 7$, $a_{12} = 3$, $a_{31} = 9$.

En general, si A es una matriz $m \times n$, se puede representar de la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde cada elemento a_{ij} es un número real, $i = 1, 2, 3, \ldots m$; $j = 1, 2, 3, \ldots n$

Observaciones.

1. Los subíndices ***ij*** indican que el elemento a_{ij} de la matriz está en la i-ésima fila o hilera y j-ésima columna de la matriz.
2. Otra forma de representar a una matriz es

$$A = (a_{ij})$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \ldots, m; \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

3. Las hileras o renglones de la matriz son:

$(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n})$, $(a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n})$, $(a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots, a_{3n})$, ... y $(a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \ldots, a_{mn})$

4. Las columnas de la matriz son:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \cdot \\ \cdot \\ m_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.

Considerando el ejemplo anterior de las calificaciones de los alumnos

Exámenes

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \text{Final} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 85 & 75 & 60 & 90 \\ 90 & 80 & 70 & 100 \\ 70 & 90 & 80 & 70 \\ 90 & 100 & 100 & 100 \\ 55 & 90 & 65 & 70 \\ 70 & 100 & 80 & 60 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se puede decir que la cuarta hilera (90 100 100 100) son las puntuaciones de calificaciones del cuarto alumno (Andrea) y la cuarta columna

$$\begin{pmatrix} 90 \\ 100 \\ 70 \\ 100 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Representan las calificaciones de los seis alumnos en el examen final.

Otro tipo de representaciones de la vida real pueden requerir una representación de datos en forma de una matriz. Consideremos algunas de ellas en los siguientes ejemplos.

Ejemplos.

3. La matriz A representa la distribución de la inscripción de hombres y mujeres dependiendo si son alumnos locales o foráneos de una institución en el semestre enero-mayo de 1992.

$$\begin{array}{c} \\ \text{locales} \\ \text{foráneos} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{hombres} & \text{mujeres} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1230 & 950 \\ 350 & 200 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. El señor Sánchez y el señor Alanís son dos vendedores de seguros en una agencia que vende cuatro tipos diferentes de pólizas. La siguiente matriz muestra las ventas realizadas por los dos agentes en el mes de octubre del último año.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Señor Sánchez} \\ \text{Señor Alanís} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & \text{Pólizas} & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 25 & 18 & 57 & 10 \\ 12 & 20 & 18 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

5. Consideremos cuatro especies de plantas y cuatro especies de herbívoros. La matriz dada a continuación presenta la cantidad de planas ingeridas por cada individuo de los diferentes tipos de especies de herbívoros durante una estación.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Herbívoro 1} \\ \text{Herbívoro 2} \\ \text{Herbívoro 3} \\ \text{Herbívoro 4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P1 & P2 & P3 & P4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 13.6 & 9.4 & 10.4 & 8.3 \\ 12.7 & 10.1 & 8.6 & 10.2 \\ 12.3 & 8.6 & 8.1 & 7.2 \\ 11.5 & 6.1 & 9.2 & 6.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

El valor 6.1 que está en la cuarta hilera y segunda columna representa la cantidad en promedio de plantas del tipo 2 que ingiere el herbívoro del tipo 4.

6. Un nutriólogo estudia la cantidad de proteínas (P), carbohidratos (C) y grasas (G) en gramos por onza de dos tipos de queso cottage. La matriz dada a continuación muestra los nutrientes de los dos tipos de queso cottage.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Queso 1} \\ \text{Queso 2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & C & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

7. Una compañía elabora cuatro productos, donde cada uno de ellos requiere ciertas unidades de tres tipos diferentes de insumos como materia prima (*MP*). En la siguiente matriz se muestran estas necesidades.

$$\begin{array}{c} \\ MP1 \\ MP2 \\ MP3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Productos}} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

8. Una empresa tiene dos plantas de manufactura en diferentes estados del país. Esta empresa produce teléfonos celulares de dos tipos, los costos de producción están dados por las siguientes matrices.

$$\begin{array}{c} \text{Planta } A \\ \text{Teléfono celular} \\ \\ \text{Mano de obra} \\ \text{Materiales} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 165 & 200 \\ 500 & 854 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Planta } B \\ \text{Teléfono celular} \\ \\ \text{Mano de obra} \\ \text{Materiales} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 150 & 185 \\ 485 & 850 \end{pmatrix} \end{array}$$

ÁLGEBRA DE MATRICES

Algunas veces es necesario realizar cálculos con los datos numéricos presentados en un arreglo rectangular (matriz), que corresponderán a operaciones con matrices, que se definen en seguida.

Definición. Las matrices A y B son iguales, esto es $A = B$ si y sólo si:

i) A es de la misma forma que B
ii) Los elementos correspondientes a las matrices A y B son iguales.

Ejemplo 9.

a) Si $A = \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}$

Es claro que $A = B$ ya que ambas son de 2×2 y cada elemento correspondiente también lo es.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ 21 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix}$

aunque ambas matrices son de la misma forma 3×2, $A \neq B$ ya que cada elemento correspondiente de la misma hilera y misma columna son diferentes.

c) Si $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

$A = B$ si y sólo si $x = 2$, $y = 3$, $z = 5$, $a = 7$, $b = 9$ y $c = 11$.

Definición. Sean A y B dos matrices de la misma forma o tamaño $m \times n$.

$A = (a_{ij})$ donde $i = 1, 2, 3, \ldots, m$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$
$B = (b_{ij})$ donde $i = 1, 2, 3, \ldots, m$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

La SUMA de A y B representada por $A + B$ es la matriz que se obtiene sumando los componentes correspondientes de la matriz A con la matriz B. Es decir, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$; donde $i = 1, 2, 3, \ldots, m$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Observación. De la definición de suma de dos matrices A y B, se puede afirmar que éstas se pueden sumar siempre que ambas sean del mismo orden. Si las matrices A y B son de diferente orden la **suma no estará definida**.

Ejemplos.

10. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 3+3 \\ 5+1 & -1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -2+0 & 3+1 \\ 4-6 & 6+1 & -1+9 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3+8 \\ 5-5 \\ 7+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ No se puede obtener ya que son de diferente forma

14. Retomando el ejemplo 3 de ésta sección en el que se presenta una matriz de datos de la inscripción de una institución en el semestre enero-mayo de 1992

$$\begin{array}{l} \\ \text{locales} \\ \text{foráneos} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{hombres} & \text{mujeres} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1230 & 950 \\ 350 & 200 \end{pmatrix} \end{array}$$

Y si además se tiene la información de la inscripción del semestre agosto-diciembre de 1992, que se presenta en la siguiente matriz

$$\begin{array}{l} \\ \text{locales} \\ \text{foráneos} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{hombres} & \text{mujeres} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1253 & 1026 \\ 385 & 214 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Cuál es la inscripción en la institución en el año de 1992 para cada una de las categorías?

$$\begin{pmatrix} 1230 & 950 \\ 350 & 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1253 & 1026 \\ 385 & 214 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \text{1992} \\ \begin{array}{cc} \text{hombres} & \text{mujeres} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2483 & 1976 \\ 735 & 414 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{foráneos} \\ \text{locales} \end{array}$$

Es decir, 2483 son alumnos hombres foráneos que se inscribieron durante el año de 1992, 414 son mujeres locales que se inscribieron durante 1992.

Definición. El **producto** de un número k (escalar) por una matriz A, representado por kA, es la matriz que se obtiene al multiplicar cada componente de la matriz A por k.

Es decir,

si $A = (a_{ij})$ entonces $kA = (k\ a_{ij})$, donde $i = 1, 2, 3, \ldots, m$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

Observación. Si A es una matriz $m \times n$, también la matriz kA será una matriz del mismo orden $m \times n$.

15. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $2A = \begin{pmatrix} 2(2) & 2(7) & 2(9) \\ 2(5) & 2(-3) & 2(-1) \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 4 & 14 & 18 \\ 10 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

16. Si $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $(-1)B = \begin{pmatrix} (-1) & (2) & (-1) & (-3) \\ (-1) & (7) & (-1) & (1) \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

17. Si $C = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}$ entonces $(-1/5)C = \begin{pmatrix} (-1/5) & (5) \\ (-1/5) & (-10) \\ (-1/5) & (15) \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Definición. Si A es una matriz, $(-A)$ se define como $-A = (-1)A$

Definición. Si A y B son dos matrices del mismo orden $m \times n$. La diferencia o resta de A y B se define como:

$$A - B = A + (-1)B$$

Observación. La resta de dos matrices no está definida si A y B son de diferente orden.

Ejemplos.

18. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ entonces $A - B =$

$$= A + (-1)B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -12 & -7 \end{pmatrix}$$

19. Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

entonces $A - B$ no está definida ya que A y B son de diferente forma.

20. Consideremos el ejemplo 4 de esta sección en donde se presenta una matriz de ventas de pólizas de seguros realizados por dos agentes, durante octubre del último año.

	Pólizas			
	1	2	3	4
Señor Sánchez	25,000	18,500	57,000	10,000
Señor Alanís	12,000	20,000	18,000	5,000

Si las ventas durante noviembre de los diferentes tipos de pólizas por los mismos agentes se presentan en la siguiente matriz

	Pólizas			
	1	2	3	4
Señor Sánchez	37,500	31,450	85,500	15,000
Señor Alanís	20,000	25,000	36,000	10,000

¿Cuál es el total de ventas en octubre y noviembre por cada agente en las diferentes pólizas?

La respuesta a esta pregunta es la suma de las matrices de ventas de los dos meses.

$$\begin{pmatrix} 25{,}000 & 18{,}500 & 57{,}000 & 10{,}000 \\ 12{,}000 & 20{,}000 & 18{,}000 & 5{,}000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 37{,}500 & 31{,}450 & 85{,}500 & 15{,}000 \\ 20{,}000 & 25{,}000 & 36{,}000 & 10{,}000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 62{,}500 & 49{,}950 & 142{,}500 & 25{,}000 \\ 32{,}000 & 45{,}000 & 54{,}000 & 15{,}000 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Señor Sánchez} \\ \text{Señor Alanís} \end{matrix}$$

b) ¿Cuál es el incremento en las ventas de octubre a noviembre?

La respuesta a esta pregunta será la diferencia de ventas de noviembre y octubre.

$$\begin{pmatrix} 37{,}500 & 31{,}450 & 85{,}500 & 15{,}000 \\ 20{,}000 & 25{,}000 & 36{,}000 & 10{,}000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25{,}000 & 18{,}500 & 57{,}000 & 10{,}000 \\ 12{,}000 & 20{,}000 & 18{,}000 & 5{,}000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12{,}500 & 12{,}950 & 28{,}500 & 5{,}000 \\ 8{,}000 & 5{,}000 & 18{,}000 & 5{,}000 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Señor Sánchez} \\ \text{Señor Alanís} \end{matrix}$$

c) Si ambos vendedores reciben un 8% de comisión sobre las ventas, calcular la comisión de cada agente por cada póliza en noviembre.

Para dar respuesta a esta pregunta se procederá a multiplicar el porcentaje por la matriz de ventas de noviembre.

$$(8\%) \begin{pmatrix} 37{,}500 & 31{,}450 & 85{,}500 & 15{,}000 \\ 20{,}000 & 25{,}000 & 36{,}000 & 10{,}000 \end{pmatrix} =$$

$$= (0.08) \begin{pmatrix} 37{,}500 & 31{,}450 & 85{,}500 & 15{,}000 \\ 20{,}000 & 25{,}000 & 36{,}000 & 10.000 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (.08)37{,}500 & (.08)31{,}450 & (.08)85{,}500 & (.08)15{,}000 \\ (.08)20.000 & (.08)25{,}000 & (.08)36{,}000 & (.08)10{,}000 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3{,}000 & 2{,}516 & 6{,}840 & 1{,}200 \\ 1{,}600 & 2{,}000 & 2{,}880 & 800 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Señor Sánchez} \\ \text{Señor Alanís} \end{matrix}$$

Es decir, el señor Sánchez recibió 3,000, 2,516, 6,840 y 1,200 pesos por las pólizas 1, 2, 3 y 4 respectivamente en noviembre.

Multiplicación de matrices

Consideremos de nuevo el ejemplo de las calificaciones de los alumnos que se mencionó al principio de esta sección y en especial las calificaciones del alumno Luis que se muestran en la siguiente matriz de 1×4

$$\begin{matrix} & \text{Exámenes} \\ & 1 \quad 2 \quad 3 \quad F \end{matrix}$$
$$A = (90 \quad 80 \quad 70 \quad 100)$$

Para formar la calificación final del curso de Luis el maestro considera la siguiente ponderación:

10% del primer examen
20% del segundo examen
30% del tercer examen
y 40% del examen final

Estas ponderaciones las colocaremos en una matriz 4×1 de la siguiente forma

$$B = \begin{pmatrix} 10\% \\ 20\% \\ 30\% \\ 40\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.10 \\ 0.30 \\ 0.40 \end{pmatrix}$$

y así la calificación final para Luis será:

$$90(0.10) + 80(0.20) + 70(0.30) + 100(0.40) = 86$$

La calificación obtenida por Luis se considera como el producto de la matriz de calificaciones $90(0.10) + 80(0.20) + 70(0.30) + 100(0.40) = 86$

La calificación final obtenida por Luis se considera como el **producto de la matriz de calificaciones $A = (90 \quad 80 \quad 70 \quad 100)$ por la matriz de ponderaciones**

$$B = \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.20 \\ 0.30 \\ 0.40 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$AB = (90 \quad 80 \quad 70 \quad 100) \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.20 \\ 0.30 \\ 0.40 \end{pmatrix}$$

$$= 90(0.10) + 80(0.20) + 70(0.30) + 100(0.40) = 86$$

Observación. Al formar el producto de AB, se multiplican los primeros elementos de A y B, los segundos elementos se multiplican a la vez, los terceros elementos se multiplican y se hace lo mismo con los cuartos para después sumar los cuatro productos.

Definición. Sea A **una matriz de** $1 \times n$ (de un renglón) y B **una matriz de** $n \times 1$ (de una columna). **El producto punto de** A **y** B, denotado por AB, se obtiene multiplicando los productos correspondientes en A y B y sumando estos n productos.

Es decir,

$$\text{y } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si $A = (a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n)$

Entonces,

$$AB = (a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1\ b_1 + a_2\ b_2 + a_3\ b_3 + \ldots + a_n\ b_n)$$

Observación. Si A es una matriz $1 \times n$ y B una matriz de $n \times 1$, el producto AB es una nueva matriz de forma 1×1, es decir, AB tiene un solo renglón y una sola columna.

Ejemplos.

21. Si $A = (5\ -\ 3\ 2\ 4)$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

entonces el producto de A por B es:

$$AB = (5\ -\ 3\ 2\ 4) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 5(2) + (-3)(-1) + 2(0) + 4(7)$$

$$AB = (10 + 3 + 0 + 28) = (41)$$

22. Si $C = (-4\ 2\ -1)$ y $D = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$

entonces,

$$CD = (-4\ \ 2\ \ -1)\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} = [(-4)(9) + 2(10) + (-1)(-6)]$$

$$= (-36 + 20 + 6) = (-10)$$

23. Si $E = (10\ \ 5)$ y $F = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/5 \end{pmatrix}$

Entonces,

$$EF = (10\ \ 5)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/5 \end{pmatrix} = [10(1/2) + 5(1/5)]$$

$$= (5) + (1) = (6)$$

24. Una fábrica produce un tipo de conductores que requiere 3 horas de trabajo en producción y una hora de trabajo en el departamento de terminado de la pieza. El personal del departamento de producción gana \$5.00 la hora y en el de acabado \$7.00 la hora. ¿Cuál es el costo de mano de obra total para cada conductor de electricidad?

Si se forman las matrices de tiempo requerido para cada departamento y los de costos y se forma el producto punto de ambas, obtendremos el costo de mano de obra

$$\begin{matrix} & PT \\ A = & (3\ \ 1) \end{matrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5.00 \\ 7.00 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Producción} \\ \text{Terminado} \end{matrix} \quad \text{(Costo)}$$

entonces,

$$AB = (3\ \ 1)\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = [3(5) + 1(7)] = (15 + 7) = (22)$$

Es decir, el costo de mano de obra del conductor de electricidad es de \$22.00.

El método de multiplicar matrices se puede extender a matrices en general. Consideraremos de nuevo el ejemplo de las calificaciones de los seis alumnos del curso de álgebra.

$$\begin{matrix} \text{Manuel} \\ \text{Luis} \\ \text{Jimena} \\ \text{Andrea} \\ \text{Alfredo} \\ \text{Rebeca} \end{matrix} \begin{pmatrix} 85 & 75 & 60 & 90 \\ 90 & 80 & 70 & 100 \\ 70 & 90 & 80 & 70 \\ 90 & 100 & 100 & 100 \\ 55 & 90 & 65 & 70 \\ 70 & 100 & 80 & 60 \end{pmatrix} = A$$

Y para formar la calificación del curso de álgebra para cada uno de los alumnos se consideran las siguientes ponderaciones que se expresan en la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 10\% \\ 20\% \\ 30\% \\ 40\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.20 \\ 0.30 \\ 0.40 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{primer examen} \\ \text{segundo examen} \\ \text{tercer examen} \\ \text{examen final} \end{matrix}$$

La calificación para Manuel se formará de la siguiente manera:

$$85(0.10) + 75(0.20) + 70(0.30) + 90(0.40) = 80.5,$$

de manera similar se obtendrán las calificaciones de los demás alumnos.

$$\begin{aligned}
\text{Calificación Luis} &= 90(0.10) + 80(0.20) + 70(0.30) + \\
&\quad 100(0.40) = 86 \\
\text{Calificación Jimena} &= 70(0.10) + 90(0.20) + 80(0.30) + \\
&\quad 70(0.40) = 77 \\
\text{Calificación Andrea} &= 90(0.10) + 100(0.20) + 100(0.30) + \\
&\quad 100(0.40) = 99 \\
\text{Calificación Alfredo} &= 55(0.10) + 90(0.20) + 65(0.30) + \\
&\quad 70(0.40) = 71 \\
\text{Calificación Rebeca} &= 70(0.10) + 100(0.20) + 80(0.30) + \\
&\quad 60(0.40) = 75
\end{aligned}$$

y la calificación final de cada uno de los alumnos las podemos representar en la siguiente matriz

$$\begin{matrix} \text{Manuel} \\ \text{Luis} \\ \text{Jimena} \\ \text{Andrea} \\ \text{Alfredo} \\ \text{Rebeca} \end{matrix} \begin{pmatrix} 80.5 \\ 86 \\ 77 \\ 99 \\ 71 \\ 75 \end{pmatrix} = C$$

y se puede decir que $AB = C$, o sea

$$\begin{pmatrix} 85 & 75 & 60 & 90 \\ 90 & 80 & 70 & 100 \\ 70 & 90 & 80 & 70 \\ 90 & 100 & 100 & 100 \\ 55 & 90 & 65 & 70 \\ 70 & 100 & 80 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.20 \\ 0.30 \\ 0.40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80.5 \\ 86 \\ 77 \\ 99 \\ 71 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Antes de dar la definición del producto de dos matrices veremos el siguiente ejemplo.

Supongamos que una empresa fabrica dos productos A y B, utilizando diferentes cantidades de tres materias primas I, II, III. La siguiente matriz muestra las unidades de materia prima necesaria para cada producto.

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$$

Supongamos además que la empresa produce estos productos en dos plantas, una en la ciudad de Monterrey y otra en la ciudad de Saltillo y los costos por unidad de las materias primas se dan en la siguiente matriz

$$\begin{array}{c} \\ \text{Materia prima} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Monterrey} & \text{Saltillo} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \begin{pmatrix} \$20 & \$17 \\ \$15 & \$10 \\ \$18 & \$16 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

Para obtener el costo total de materia prima por cada unidad del producto A producido en la planta de Monterrey, se multiplicarán los elementos del primer renglón de M por los costos de materia prima de la planta de Monterrey, que se encuentran en la primer columna de P y se sumarán esas cantidades.

$$5(20) + 4(15) + 6(18) = \$268$$

haciendo algo similar para el artículo B tenemos que el costo total para ese artículo en la planta de Monterrey es

$$4(20) + 7(15) + 3(18) = \$229$$

También los costos totales de los mismos artículos en la planta de Saltillo son

$$\text{Costo total artículo } A = 5(17) + 4(10) + 6(16) = \$221$$
$$\text{Costo total artículo } B = 4(17) + 7(10) + 3(16) = \$186$$

Estos costos totales de las materias primas para los dos productos elaborados en las dos plantas se pueden expresar en la siguiente matriz.

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Monterrey} & \text{Saltillo} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \$268 & \$221 \\ \$239 & \$186 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$$

Se puede decir que la matriz C que representa los costos de materia prima de los artículos A y B es el producto de las matrices M y P. O sea que

$$MP = C$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2017 \\ 1510 \\ 1816 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 268221 \\ 239186 \end{pmatrix}$$

Observaciones.

1. Al efectuar el producto de M con P se multiplicó cada renglón de la matriz M por cada columna de la matriz P, de manera similar a la efectuada al multiplicar una matriz $1 \times n$ por una matriz $n \times 1$.
2. Obsérvese que el producto MP se pudo efectuar porque coincidieron el número de columnas de M y el número de renglones de P.

Definición. Si una matriz $m \times p$, dada por

$$A = (a_{ij});\ i = 1, 2, 3, \ldots, m,\ j = 1, 2, 3, \ldots, p$$

y B es una matriz $p \times n$, dada por

$$B = (b_{ij});\ i = 1, 2, 3, \ldots, p,\ j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

el **Producto de A y B** denotado por AB es una matriz de orden $m \times n$ cuyas componentes c_{ij} se obtienen multiplicando el renglón o hilera i-ésima de la matriz A por los elementos de la columna j-ésima de B y se suman sus elementos.

Es decir,

$$AB = C$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2p} \\ & & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{ip} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n} \\ & & \vdots & & & & \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \ldots & b_{ij} & \ldots & b_{in} \\ & & \vdots & & & & \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \ldots & c_{pj} & . & b_{pn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ & & \vdots & & & & \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ & & \vdots & & & & \\ c_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & c_{mj} & . & b_{mn} \end{pmatrix}$$

donde

$$c_{11} = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots\ a_{1p}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$$

$$c_{12} = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots\ a_{1p}) \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{p2} \end{pmatrix}$$

$$c_{22} = (a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \ldots\ a_{2p}) \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{p2} \end{pmatrix} \quad \text{etc.}$$

En general

$$c_{ij} = (a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ \ldots\ a_{ip}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}$$

Observaciones.

1. El producto de dos matrices A y B se puede efectuar si el número de columnas de la matriz A es el mismo número de hileras o renglones de la matriz B.
2. Si A es una matriz $m \times p$ y B es una matriz $p \times n$ entonces el producto de A con B es una matriz de forma $m \times n$. Es decir, la forma o tamaño de AB es el número de hileras de la matriz A por el número de columnas de la matriz B.
3. Si A es una matriz $m \times p$ y B es una matriz $q \times n$ donde $p \neq q$, entonces el producto AB no está definido.

Ejemplos.

25. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Obtener AB.

La forma de la matriz A es 2×2 y la de la matriz B es 2×3 y como el número de columnas de A coincide con las hileras de B, entonces el producto de AB sí está definido. El tamaño de la matriz resultante AB será de 2×3.

$$2 \times \underline{2 \quad 2} \times 3 \qquad 2 = 2 \qquad 2 \times 3$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2(-2) + (-3)(1) & 2(3) + (-3)(0) & 2(-5) + (-3)(-6) \\ 5(-2) + (-7)(1) & 5(3) + (-7)(0) & 5(-5) + (-7)(-6) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 6 & 8 \\ -17 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

Observaciones.

1. En el ejemplo 25 si se hubiera pedido el producto BA, éste no se puede obtener ya que el número de columnas de B no coincide con el número de hileras de A.

$$2 \times \underline{3 \quad 2} \times 2 \qquad 3 \neq 2$$

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = \text{no está definida}$$

2. Por la observación anterior se puede afirmar que el producto no es conmutativo. Es decir, $AB \neq BA$

26. Sea $A = (2 \quad 1)$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$AB = (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} = (- \quad - \quad -)$$

$$1 \times \underline{2 \quad 2} \times 3 \qquad 1 \times 3$$
$$2 = 2$$

Cómo el número de columnas de A es igual al de hileras de B, el producto sí se puede efectuar y el producto AB es una matriz de tamaño 1×3

Así,

$$AB = (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= (2(1) + 1(3) \; 2(-2) + 1(4) \; 2(0) + 1(-2)) = (5 \quad 0 \quad -2)$$

Observación. En el ejemplo anterior la matriz BA no está definida

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} (2 \quad 1)$$

$$2 \times \underline{3 \quad 1} \times 2$$
$$3 \neq 1$$

27. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$3 \times 2 \qquad 2 \times 3$$
$$2 = 2$$

como el número de columnas de A coincide con el de hileras de B el producto de A con B está definido y será una matriz de forma 3×3

$$3 \times 3$$

$$AB = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1)(3) + (-2)(-1) & (1)(4) + (-2)(2) & (1)(0) + (-2)(-4) \\ (0)(3) + (1)(-1) & (0)(4) + (1)(2) & (0)(0) + (1)(-4) \\ (4)(3) + (-3)(-1) & (4)(4) + (-3)(2) & (4)(0) + (-3)(-4) \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & -4 \\ 15 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

El producto de

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

existe ya que las columnas de B coinciden con las hileras de A y la matriz producto BA es de forma 2×2

$$BA = \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (3)(1) + (4)(0) + (0)(4) & (3)(-2) + (4)(1) + 0(-3) \\ (-1)(1) + (2)(0) + (-4)(4) & (-1)(-2) + 2(1) + (-4)(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -17 & 16 \end{pmatrix}$$

28. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $B = (-2 \quad -5)$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} (-2 \quad -5)$$

$$2 \times 1 \quad 1 \times 2$$
$$1 = 1$$

El producto AB existe ya que la matriz A tiene una columna y B tiene un renglón y la matriz AB es de dimensión 2×2

$$AB = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} (-2 \quad -5) = \begin{pmatrix} 5(-2) & 5(-5) \\ 2(-2) & 2(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -25 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$$

29. Una empresa tiene dos oficinas ubicadas en diferentes sectores I y II de la ciudad de Monterrey. Si la oficina en el primer sector tiene 10 microcomputadoras Macintosh LC, 3 microcomputadoras PC 50 de la IBM y dos impresoras láser, y en las oficinas del segundo sector, tienen 5 Macintosh LC, 4 PC, 50 de la IBM y una impresora láser. Si la Macintosh LC tiene un costo de 1,000 dólares cada una, la PC 50 de la IBM tiene un costo de 2,000 dólares y la impresora laser de 1,500 dólares. Expresar las cantidades gastadas en estos artículos de las dos oficinas en términos de productos de matrices.

$$\begin{array}{l} \\ \text{Macintosh} \\ \text{PC 50 IBM} \\ \text{I. Láser} \end{array} \begin{array}{c} \text{Oficinas} \\ \text{I} \quad \text{II} \\ \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = A$$

$$C \begin{array}{c} \text{Mac} \quad \text{PC} \quad \text{Láser} \\ (\ 1000 \quad 2000 \quad 15000\ ) \end{array}$$

$$1 \times 3 \quad 3 \times 2$$
$$3 = 3$$

$$CA = (1000 \quad 2000 \quad 1500) \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1000(10) + 2000(3) + 1500(2) \quad 1000(5) + 2000(4) + 1500(1))$$

$$\begin{array}{c} \text{I} \quad \text{II} \\ = (19{,}000 \quad 14{,}500) \end{array}$$

Es decir, 19,000 dólares se gastó en los artículos mencionados en la oficina I y 14,500 en la oficina II.

Definición. Una matriz en la que todos sus elementos son cero se le llama **matriz cero** y se denota por "0".

Una matriz "0" de 2×2 es $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Una matriz "0" de 3×2 es $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Una matriz "0" de $m \times n$ es

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad m \text{ hileras y } n \text{ columnas}$$

Propiedades de las matrices

Si A, B, C y "0" son matrices del mismo orden, las siguientes propiedades para la suma son válidas.

1. $A + B = B + A$	Propiedad conmutativa
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$	Propiedad asociativa
3. $A + 0 = A$	Identidad para la suma
4. $A + (-A) = 0$	Inverso aditivo

Observación. 0 en las propiedades anteriores representa a la matriz Cero.

Se demostrarán las propiedades 1 y 3 para dos matrices de orden 2×2.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} ef \\ gh \end{pmatrix} \text{ y } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ef \\ gh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + eb + f \\ c + gd + h \end{pmatrix}$$

por propiedad conmutativa para la suma en los números reales $a + = e + a$, $b + f = f + b$, $c + g = g + c$, $d + h = h + d$ y así,

$$A + B = \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ef \\ gh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + eb + f \\ c + gd + h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e + af + b \\ g + ch + d \end{pmatrix}$$

y

$$B + A = \begin{pmatrix} ef \\ gh \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e + af + b \\ g + ch + d \end{pmatrix} = A + B$$

por lo que $A + B = B + A$

$$2.\ A + 0 = \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 0b + 0 \\ c + 0d + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} = A$$

por lo que $A + 0 = A$

Las demostraciones de las demás propiedades para la suma quedarán como ejercicio.

Si A, B, y 0 son matrices del mismo orden y si k_1, k_2 son dos números reales (escalares), las siguientes propiedades para el producto de matrices por escalar son válidas.

1. $k_1 (A + B) = k_1A + k_1B$
2. $(k_1 + k_2) = k_1A + k_2B$
3. $(k_1\ k_2)\ A = k_1\ (k_2A)$
4. $k_1A =$ "0" ($k_1 = 0$ y "0" es la matriz cero)
5. $k_10 = 0$ (0 es la matriz cero)
6. $1A =$ A

Se demostrará la propiedad 1 para dos matrices de tamaño 2×2.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} xy \\ zw \end{pmatrix}$$

$$k_1(A + B) = k_1 \left[\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xy \\ zw \end{pmatrix} \right] = k_1 \begin{pmatrix} a + xb + y \\ c + zd + w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1(a + x) & k_1(b + y) \\ k_1(c + z) & k_1(d + w) \end{pmatrix}$$

$$k_1 (A + B) = \begin{pmatrix} k_1a + k_1x & k_1b + k_1y \\ k_1c + k_1z & k_1d + k_1w \end{pmatrix}^*$$

y

$$k_1A + k_1B = k_1 \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} xy \\ zw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & ak_1b \\ k_1 & ck_1d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & xk_1y \\ k_1 & zk_1w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1a + k_1x & k_1b + k_1y \\ k_1c + k_1z & k_1d + k_1w \end{pmatrix}$$

que es lo mismo que $k_1 (A + B)$ expresado en * y así se puede concluir que $k_1 (A + B) = k_1 A + k_1B$

Observación. Las demostraciones de las otras propiedades quedarán como ejercicio.

Si A, B y C son matrices y k es un número real (escalar) las siguientes propiedades se satisfacen.

1. $(AB)\ C = A\ (BC)$	Propiedad asociativa
2. $A\ (B + C) = AB + AC$	Distributiva por la izquierda
3. $(B + C)\ A = BA + CA$	Distributiva por la derecha
4. $k\ (AB) = (kA)\ B = A\ (kB)$	
5. $0\ A = 0$ ó $B\ (0) = 0$	0 es la matriz cero

Observaciones.

1. Los productos y sumas indicadas en las propiedades anteriores, se supone que están definidas. Es decir, A y B deben ser de las dimensiones adecuadas para efectuar el producto.
2. $AB \neq BA$, es decir, el **producto de matrices no es conmutativo.**

Tipos de matrices

Matriz renglón o fila. Es una matriz de orden $1 \times n$ (un renglón y una columna).

Ejemplo.

30. Las siguientes matrices son ejemplos de matriz renglón.

$$A = (2\ 3\ 5\ 7)\ B = (1\ 0),\ C = (0)$$

Matriz columna. Es una matriz de orden $n + 1$ (n renglones y una columna).

Ejemplo.

31. Las siguientes son ejemplos de matriz columna.

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ E = (3),\ F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriz transpuesta. La transpuesta de una matriz A, denotada por A' o A^t, es la matriz que se tiene de la matriz A cambiando renglones por columnas.

Ejemplos.

32. Si $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ entonces $A' = (2\ 5 - 1)$

33. Si $B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; $B' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$

34. Si $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 8 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$; $C' = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -1/2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$

35. Si $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $D' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Matrices cuadradas.

Matriz cuadrada. Una matriz con el mismo número de hileras y columnas, se llama **matriz cuadrada** y si n es el número de hileras y columnas, se dice que la matriz cuadrada es de orden n

Ejemplo 36.

$A = (2)$ es una matriz de orden 1

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ es una matriz de segundo orden

Definición. La diagonal o diagonal principal de una matriz cuadrada de orden n.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

son los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33} \dots a_{nn}$

Ejemplo 37.

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ los elementos de su diagonal principal son 2 y -5

Si $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ los elementos de su diagonal principal son 2, 6 y 10

Tipos de matrices cuadradas

Matriz diagonal. Una matriz diagonal es una matriz cuadrada donde las componentes que no están en la diagonal son todos cero y al menos un elemento de la diagonal es diferente de cero.

Ejemplo 38.

Las matrices A, B y C dadas a continuación son ejemplos de matriz diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad. Una matriz se dice que es matriz identidad si ésta es una matriz diagonal, donde los elementos de la diagonal son unos.

Ejemplo 39.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es una matriz identidad de segundo orden}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es una matriz de tercer orden}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es una matriz de cuarto orden}$$

Matriz triangular superior. Es una matriz cuadrada cuyas componentes debajo de la diagonal principal son todos cero.

Ejemplo 40.

Las siguientes matrices son ejemplos de matriz triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior. Es una matriz cuadrada cuyas componentes por encima de la diagonal principal son todos cero.

Ejemplo 44.

Cada una de las siguientes matrices representan a una matriz triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz simétrica. Una matriz cuadrada es simétrica si y sólo si ésta y su matriz transpuesta son iguales.

Ejemplo 45.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \text{ su transpuesta es } A' = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

y como $A = A'$, entonces A es una matriz simétrica.

$$\text{Si } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \text{ su transferencia es } B' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

y como $B = B'$, entonces B es una matriz simétrica.

Matriz antisimétrica. Una matriz cuadrada A es antisimétrica si y sólo si $A = -A'$.

Ejemplo 46.

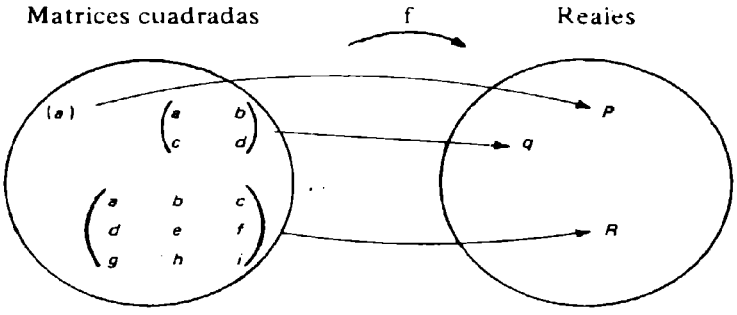
Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ su transpuesta es $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

y como $-A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = A$, entonces A es antisimétrica

DETERMINANTES

Definición. El determinante de una matriz $n \times n$ es un número real asociado con una matriz cuadrada A mediante una función llamada función determinante, que la denotaremos por $\det(A)$.

El dominio de la función determinante de una matriz cuadrada es el conjunto de matrices cuadradas y su imagen es el conjunto de los reales.



Ejemplos.

34. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} = 11$

35. $\det (12) = 12$

Observación. **det (A) lo representaremos por barras verticales, o sea: $\det (A) = |A|$**

Definición. El determinante de una matriz 1×1, (a) es a misma.

Ejemplo

36. $|8| = 8, \qquad |-7| = -7, \qquad |1/3| = 1/3$

Definición. Si A es una matriz 2×2 dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

su determinante está dado por:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ejemplo

37. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (12)(-5) = -6 + 60 = 54$

Algunas de las propiedades de los determinantes las mencionaremos en seguida, su demostración la haremos para determinantes de orden 2.

Observaciones.

a) Una matriz $n \times n$ se llama matriz de orden n y su determinante, determinante de orden n.
b) La notación más común para $\det(A)$ es $|A|$.

Teorema 1.

Si A' es la transpuesta de la matriz A, entonces:

$$\det(A') = \det(A)$$

Demostración.

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ entonces } A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Así:

$$\det(A') = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad \quad bc = ad - cb = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= \det(A).$$

Observación. Este teorema nos dice que cualquier propiedad de los determinantes acerca de las hileras es también válida para las columnas.

Teorema 2.

Si B es una matriz que se obtiene al multiplicar por $K \in R$ los elementos de una de las hileras (o columnas) de A entonces:

$$\det(B) = K \det(A)$$

Demostración.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} Ka & b \\ Kc & d \end{pmatrix}$$

entonces: $\det(B) = \begin{vmatrix} Ka & b \\ Kc & d \end{vmatrix} = Kad - Kcb$

$$= K(ad - cb)$$

$$= K \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= K \det(A)$$

de donde:

$$\det(B) = K \det(A)$$

La demostración es similar si es otra la columna o la hilera que se multiplica por K.

Teorema 3.

Si B es una matriz que se obtiene reemplazando una hilera (o columna) de A por la suma de la hilera más un múltiplo de otra hilera (o columna) entonces:

$$\det(A) = \det(B).$$

Demostración.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c + Ka & d + Kb \end{pmatrix}$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a & b \\ c + Ka & d + Kb \end{vmatrix}$$

$$= a(d + Kb) - b(c + Ka)$$
$$= ad + aKb - bc - bKa$$
$$= ad - bc$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(A)$$

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede ser resuelto por determinantes por el teorema conocido como regla de Cramer, que se demuestra utilizando las propiedades anteriores.

Teorema 4. Regla de Cramer *(para determinantes de segundo orden).*

$$\text{Si } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ entonces la solución del sistema}$$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}$$

Demostración.

$$xD = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x & b_1 \\ a_2 x & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{(y)} \quad \text{por el teorema 2 de esta sección.}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 x + b_1 y & b_1 \\ a_2 x + b_2 y & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{por el teorema 3 de esta sección.}$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{ya que:}$$

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

de donde:

$$xD = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

y despejando obtenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}$$

De manera similar llegaremos a:

$$yD = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{de donde} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}$$

así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}, \quad D \neq 0.$$

Ejemplos.

38. Resolver para x, y usando regla de Cramer.

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 3 \\ 3x - y &= 7 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-4) - (15) = -19$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{(-3) - (35)}{-19} = \frac{-38}{-19} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{D} = \frac{28 - 9}{-19} = \frac{19}{-19} = -1$$

De donde, la solución es $x = 2$, $y = -1$.

Daremos ahora la definición de determinante para una matriz 3×3

Definición. El determinante de la matriz 3×3

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

se define por:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Observamos que cada término contiene el producto de un elemento de la primera hilera y un determinante de segundo orden llamado su menor que se define como:

Definición. El menor de un elemento en una matriz de orden 3 es el determinante de la matriz que queda al eliminar la hilera y la columna en que aparece el citado elemento.

Los determinantes de orden tres cumplen las propiedades que mencionamos en los teoremas 1, 2 y 3 de esta sección, cuya demostración quedará como ejercicio para el estudiante.

Ejemplos.

39. Calcular: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3 - 0) - 4(-9 - 0) - 2(6 - 5)$$
$$= 3 + 36 - 2$$
$$= 37$$

Hallar el menor del elemento 3 en la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

El menor de 3 es el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

Utilizando las propiedades de los determinantes podemos efectuar las operaciones de una manera sencilla, generando ceros en el primer renglón, excepto en el primer elemento.

Ejemplo.

40. Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

El elemento 4 lo haremos cero.
Según el teorema 3 de esta sección podemos multiplicar por (− 4) la primera columna y sumársela a la segunda y esto sustituirlo en la segunda columna, o sea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 13 & 0 \\ 5 & -22 & 3 \end{vmatrix}$$

(− 4)

Multiplicamos ahora la primera columna por 2 y se la sumamos a la última, o sea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 13 & 0 \\ 5 & -22 & 3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{\longrightarrow} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 13 & -6 \\ 5 & -22 & 13 \end{vmatrix}$$

Por definición de determinantes de tercer orden, esto es igual a:

$$= 1\begin{vmatrix} 13 & -6 \\ -22 & 13 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -3 & 13 \\ 5 & -22 \end{vmatrix}$$

$$= 1(169 - 132) - 0 + 0$$
$$= 37$$

O sea, que las operaciones se reducen a efectuar sólo un determinante de segundo orden.

41. Obtener el determinante indicado:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -9 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

multiplicaremos por (1) la primera columna y se la sumaremos a la segunda.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -9 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{\longrightarrow} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} \overset{(-5)}{\longrightarrow} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & -9 \\ 5 & 7 & -22 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -7 & -9 \\ 7 & -22 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 5 & -22 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-7(-22) - (7)(-9)) - 0 + 0 = +154 + 63 = 217$$

DETERMINANTES DE ORDEN N

Sea A una matriz de orden n, que la representaremos por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición. El menor del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada de orden n, que se denota por M_{ij}, es el determinante de la matriz que queda al eliminar la hilera y la columna en que aparece citado dicho elemento.

Existe otro concepto relacionado con el de menor, que es el de cofactor de un elemento.

Definición. El cofactor del elemento a_{ij} en la matriz A de orden n que se denota por C_{ij} es

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Ejemplo.

42. Si $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 13 & 0 \\ 5 & -22 & 3 \end{vmatrix}$ hallar C_{23}:

$$C_{23} = (-1)^{(2+3)} M_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -22 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-22 - 0)$$
$$= 22$$

Observación. La expresión $(-1)^{i+j}$ siempre es $+1$ ó -1, dependiendo de la posición de a_{ij}. Para recordar el signo de los factores podemos formar la siguiente tabla de signos:

$$\begin{array}{l} + - + - + - + - \cdots \\ - + - + - + - + \cdots \\ + - + - + - + - \cdots \\ - + \\ + - \\ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \end{array}$$

o sea que si la suma de los números de la fila y la columna a la que pertenece el elemento es impar, el signo del cofactor será negativo y si es par, el signo del cofactor será positivo.

Teniendo las definiciones de cofactor definiremos el determinante de una matriz de orden n.

Definición. Si A es una matriz de orden n.

$$\det(A) = |A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$$

Ejemplo.

43. Hallar el determinante de la matriz A si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2(+1)\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} + (0)(-1)\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$+ 3(+1)\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} + (0)(-1)\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} + 0 + 3\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 2[\,3(-21 - 0) - 0(0 - 0) + (-2)(0 - 0)\,]$$
$$+ 3[\,5(0 - 0) - 3(7 - 0) - 2(0 - 0)\,]$$
$$= 2[\,-63\,] + 3[\,-21\,]$$
$$= -126 - 63$$
$$= -189$$

También los determinantes de cualquier orden donde n es mayor que 3 cumplen las propiedades antes mencionadas en los teoremas 1, 2 y 3, que se demuestran a partir de las definiciones dadas. A estas propiedades podemos agregarles las siguientes:

a) Si un renglón (o columna) de una matriz es un múltiplo de otro renglón (o columna), el determinante de la matriz es cero.

b) Si todos los elementos de un renglón (o columna) de una matriz son cero, su determinante será cero.

c) El determinante de una matriz se puede desarrollar por los menores de cualquier renglón (o columna).

Si A es de cualquier orden, podemos encontrar su determinante de una manera sencilla, generando ceros donde más convenga, utilizando las propiedades antes mencionadas para reducir el orden del determinante hasta llegar a un determinante de 2×2

Ejemplo.

44. Hallar el determinante indicado:

$$= 2 \begin{vmatrix} 20 & 0 & 50 \\ 5 & 0 & 13 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(-1) \begin{vmatrix} 20 & 50 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= -2[260 - 250]$$
$$= -2[10]$$
$$= -20$$

Así, det $= -20$.

La regla de Cramer puede ser extendida a n ecuaciones con n incógnitas y su demostración es fácil de efectuar. En el siguiente ejemplo haremos uso de ella para un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

Ejemplo.

45.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y - z &= 0 \\ x - y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

Observamos que en la tercera columna hay dos ceros, entonces solamente generaremos un cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{vmatrix} -2 & 11 & 0 & 17 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Por la propiedad *c*) de los determinantes podemos encontrar el valor del determinante por menores de la tercera columna. O sea:

$$\det = 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -2 & 11 & 17 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ 2 \begin{vmatrix} -2 & 11 & 17 \\ 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -2 & 11 & 17 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= + 2 \begin{vmatrix} -2 & 11 & 17 \\ 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -2 & 11 & 17 \\ 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (-2)\ (-11)$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Ejercicios.

1. Indica de qué orden son las siguientes matrices.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 \\ -4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 9 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$

$C = (6)$,

$D = (8 \quad 9 \quad 12 \quad -6)$

$E = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 8 \\ 7 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -7 & 9 \end{pmatrix}$,

$F = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 10 & 20 \\ -20 & -5 & 10 & -15 \end{pmatrix}$

2. Hallar el valor de las variables para que las matrices sean iguales:

a) $\begin{pmatrix} 8-x & y+1 & z+3 \\ a+2 & 3-b & c-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 10 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 21 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

3. Obtener la operación indicada:

a) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} =$

b) $(5 \quad 7 \quad 2) + \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} =$

c) $(7) + (2) =$

d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} =$

e) $\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} =$

f) $2\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} =$

g) $(-1/2)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} =$

h) $3\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} =$

i) $(5\ -1\ 2\ 10)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

j) $(-2\quad 5\quad 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

k) $(5\ -7)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

l) $(2\ -8)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

m) $(3\ -4\ 5)\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

n) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -9 & -12 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -6 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

4. Escribir la transpuesta de las matrices A, B, C, D, E y F del problema 1.

5. Encontrar el valor de cada uno de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -8 & 1/3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -7/5 & 1/5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 0 & 5 \\ -5 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & 0 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1/2 & 9 \\ -9 & 5 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 12 & -6 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 9 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} 3 & -8 & 7 \\ 7 & 5 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

l) $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & -1/6 \\ -1 & 1/2 & 1/5 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

n) $\begin{vmatrix} -5 & 7 & -3 \\ 1 & 9 & -8 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix}$

$\tilde{n})$ $\begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

$o)$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

6. Hallar el valor de x:

$a)$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & x & 2 \\ 4 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

$b)$ $\begin{vmatrix} 4 & x & 3 \\ 4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$c)$ $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ x^2 & 2x & 0 \end{vmatrix} = 0$

$d)$ $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & x & 6 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -10$

$e)$ $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

7. Resolver para x y y los sistemas siguientes utilizando la regla de Cramer:

a) $\begin{aligned} 5x - y &= 5 \\ x - y &= 12 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} (1/3)x - (5/3)y &= 7/3 \\ (1/4)x + (3/4)y &= 2/3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x - y + 5z &= -16 \\ 6x + y - z &= -5 \\ x - 7y + z &= 10 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 2x + 3y - 5z &= 1 \\ 6x - 2y + 7z &= -4 \\ x - 3y - 8z &= 5 \end{aligned}$

8. Demostrar los teoremas indicados en esta sección.

9. Una empresa produce tres tamaños de diskettes para microcomputadoras en dos calidades distintas. La producción en miles en la ciudad de Monterrey está dada en la siguiente matriz.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Calidad} \end{array} \begin{array}{c} \text{Tamaño} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 32 & 41 & 35 \\ 23 & 31 & 26 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

La producción en miles en su planta de Guadalajara se da en la siguiente matriz.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Calidad} \end{array} \begin{array}{c} \text{Tamaño} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 36 & 46 & 42 \\ 28 & 37 & 30 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

a) Da una matriz que represente la producción total de cintas de ambas plantas.

b) Si se desea abrir una nueva planta en Sonora, la cual tendría diez veces la capacidad de la planta de Guadalajara. Dar una matriz que represente la producción de la nueva planta.

c) Dar la producción de las tres plantas.

10. Miguel compró 5 pantalones, 7 camisas, 7 pares de calcetines y 3 suéteres. Si los pantalones tienen un costo de $85 cada uno, las camisas $50 cada una, los pares de calcetines $12 el par y cada suéter $18. Usa el producto de matrices para representar la cantidad total que Miguel gastó en la ropa.

11. Un obrero realiza tres actividades diferentes en una empresa, y por cada una de esas actividades gana $6.00, $3.25 y $3.75. El número de horas

que trabajó en cada actividad en un periodo de tres semanas está dada por la matriz A

$$A = \begin{array}{c} \text{Periodos} \\ \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 12 & 16 & 0 \\ 8 & 14 & 25 \\ 20 & 10 & 15 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \quad \text{actividad}$$

Si $I = (6\ 5.25\ 3.75)$ denota una matriz de ingreso. Obtener el producto $(I\ A)$ e interpretar sus elementos.

12. Un investigador compara datos del número de ingresos a un programa de ayuda en los dos últimos años y tiene interés en la distribución de estudiantes locales en relación con los foráneos y en las inscripciones de hombres y mujeres.
Las matrices A y B representan el número de estudiantes admitidos en los dos últimos años.

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{locales} \\ \text{foráneos} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{hombres} & \text{mujeres} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 100 & 30 \\ 44 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{locales} \\ \text{foráneos} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 120 & 27 \\ 30 & 23 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Obtener admisión total para cada categoría durante los dos últimos años.
b) Obtener el cambio en el número de estudiantes en el segundo año en comparación con el primer año.
c) Dar la admisión esperada para el siguiente año, si se espera que se incremente cada categoría un 20%.

13. En una clase de cálculo I, el maestro aplica durante el semestre tres exámenes a sus cinco estudiantes. Para formar la calificación final del curso el maestro ha decidido considerar las siguientes ponderaciones: 25%, 35% y 40% al final. Se desea calcular los promedios finales para cada uno de los alumnos. La siguiente matriz muestra las calificaciones de los estudiantes.

$$\text{Estudiantes} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \text{Examen} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 71 & 85 & 90 \\ 75 & 60 & 50 \\ 100 & 90 & 100 \\ 84 & 65 & 75 \\ 60 & 100 & 100 \end{pmatrix} \end{array} = C$$

CAPÍTULO 8

Desigualdades

INTRODUCCIÓN

Existen otros tipos de expresiones además de las ecuaciones en el álgebra que son conocidas como desigualdades. Estas son de gran importancia en el estudio del álgebra y del cálculo.

En este capítulo veremos definiciones y algunas propiedades de las desigualdades, donde observaremos que existen ciertas analogías entre ecuaciones y desigualdades. Este estudio con desigualdades se limitará a los números reales, ya que no tendrá ningún sentido hablar de desigualdades con números complejos.

Sección 8.1

DESIGUALDADES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir las relaciones:

   a) Menor que ($<$)
   b) Mayor que ($>$)
   c) Menor o igual que ($\leqslant$)
   d) Mayor o igual que ($\geqslant$)

2. Demostrar las propiedades de las desigualdades.
3. Definir:

   a) Intervalo abierto: (a, b), $(-\infty, \infty)$, (a, ∞), $(-\infty, a)$.
   b) Intervalo cerrado $[a, b]$
   c) Intervalos semiabiertos: $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, a]$ $[a, \infty)$.

4. Resolver problemas que involucren desigualdades lineales o cuadráticas y representar su solución en la recta numérica utilizando la notación de intervalos.

A partir de los 5 axiomas para la construcción de los números naturales se pueden probar las siguientes afirmaciones para los reales positivos, (R^+), cuyas demostraciones no se verán aquí:

a) Si $a \in R$ entonces se cumple una y sólo una de las siguientes proposiciones:

$a = 0$
a es positivo
o $-a$ es positivo.

b) Si a y $b \in R^+$ entonces $a + b \in R^+$.
c) Si a y $b \in R^+$ entonces $a \cdot b \in R^+$.

Definición. Un número real a es negativo si y sólo si $-a \in R^+$.

Definición. Para cada par de números reales a, b, a es menor que b (que se denota por $a < b$) si y sólo si $(b - a) \in R^+$.

Definición. Para cada par de números reales a, b, a es mayor que b (que se denota por $a > b$) si y sólo si $b < a$ o $(a - b) \in R^+$.

Definición. Para cada par de números reales a, b, a es menor o igual que b (que se denota por $a \leqslant b$) si y sólo si $a < b$ o $a = b$.

Definición. Para cada par de números reales a, b, a es mayor o igual que b (que se denota por $a \geqslant b$) si y sólo si $a > b$ o $a = b$.

Definición. Expresiones tales como: $a < b$, $a > b$, $a \leqslant b$, $a \geqslant b$ son llamadas desigualdades.

Ejemplos

1. $8 > 3$ ya que $8 - 3 = 5 \in R^+$.
2. $5 < 7$ ya que $7 - 5 = 2 \in R^+$.
3. $-1 < 4$ ya que $4 - (-1) = 5 \in R^+$.
4. $-1 \not> 0$ ya que $(-1) - (0) = -1 \notin R^+$.

Existen varios teoremas que nos serán útiles en la solución de una desigualdad, donde resolver una desigualdad significa encontrar todos los valores de las variables o variables que satisfacen a la desigualdad.

La demostración de la parte (*ii*) de los siguientes teoremas quedará como ejercicio.

Teorema 1.

$\forall\ a, b, c \in R.$

i) Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
ii) Si $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

Demostración de (i)

Si $a < b \Rightarrow (b - a) \in R^+$	definición de $<$
Si $c \in R \Rightarrow b - a + c - c \in R^+$	identidad aditiva
$(b + c) - (a + c) \in R^+$	conmutativa y asociativa.
Entonces $a + c < b + c$	definición de $<$.

Ejemplos.

5. Si $3 < 5 \Rightarrow 3 + 2 < 5 + 2$
$5 < 7$

6. Si $-8 > -12 \Rightarrow -8 + 9 > -12 + 9$
$1 > -3$

7. Si $-2 < 7 \Rightarrow -2 - 5 < 7 - 5$
$-7 < 2$

8. Si $-6 < -4 \Rightarrow -6 - 3 < -4 - 3$
$-9 < -7$

Observación. Este teorema nos dice que podemos sumar o restar a ambos lados de una desigualdad y la desigualdad se conserva, o sea, que si una desigualdad es menor, después de sumarle o restarle, la desigualdad que se forma seguirá siendo menor y pasa lo mismo si es mayor.

Teorema 2.

$\forall\ a, b, c \in R.$

i) Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc.$
ii) Si $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow ac > bc.$

Demostración de (i)

Si $a < b \Rightarrow b - a \in R^+$.
y si $c > 0 \Rightarrow 0 < c \Rightarrow (c - 0) \in R^+$.
ó $c \in R^+$.

Así tenemos dos números positivos $(b - a)$ y (c) y por la propiedad de que el producto de dos positivos es positivo, tenemos que:

	$(b - a)\, c \in R^+$	
	$bc - ac \in R^+$	distributiva
entonces:	$ac < bc$	definición de $<$

Ejemplos.

9. Si $3 < 6 \Rightarrow 3(2) < 6\,(2)$
$6 < 12$

10. Si $2 > -5 \Rightarrow 2(4) > (-5)\,(4)$
$8 > -20$

11. Si $-10 < -8 \Rightarrow (-10)\,(5) < (-8)\,(5)$
$-50 < -40$

12. Si $8 < 10 \Rightarrow (8)\,(-9) \not< (10)\,(-9)$
$-72 \not< -90$

Observación. Este teorema nos dice que podemos multiplicar una cantidad que debe ser positiva a ambos lados de la desigualdad y la desigualdad se conserva, ya sea menor o mayor. En el ejemplo 12 se multiplicó por una cantidad negativa a ambos lados y vemos que la desigualdad no se conserva. El siguiente teorema nos dice qué hacer en estos casos.

Teorema 3.

$\forall\ a, b, c \in R$.

i) Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$.
ii) Si $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$.

Demostración de (i)

Si $a < b \Rightarrow b - a \in R^+$.

y , si $c < 0 \Rightarrow 0 - c \in R^+$
ó $-c \in R^+$

También por el producto de dos positivos tenemos:

$(b - a)(-c) \in R^+$	
$-bc + ac \in R^+$	distributiva
$ac - bc \in R^+$	conmutativa
así: $bc < ac$	definición de $<$
entonces: $ac > bc$	definición de $>$.

Ejemplos.

13; Si $9 < 15 \Rightarrow (9)(-3) > (15)(-3)$
$-27 > -45$

14 Si $-3 > -7 \Rightarrow (-3)(-2) < (-7)(-2)$
$6 < 14$

15. Si $-2 < 1 \Rightarrow (-2)(-7) > (1)(-7)$
$14 > -7$

Observación. Este teorema nos dice que podemos multiplicar a ambos lados de una desigualdad por una cantidad negativa y la desigualdad se invierte, es decir, que si tenemos una desigualdad menor que, ésta cambia a una mayor que, y viceversa.

Teorema 4.

$\forall\ a, b, c \in R.$

i) Si $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$
ii) Si $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c.$

Demostración de (*i*)

Si $a < b \Rightarrow b - a \in R^+.$
y si $b < c \Rightarrow c - b \in R^+.$

Y por la afirmación de que la suma de dos positivos es positiva tenemos:

$(b - a) + (c - b) \in R^+$
$b - a + c - b \in R^+$ asociativa

	$-a + c \in R^+$	inverso aditivo
	$c - a \in R^+$	conmutativa
entonces:	$a < c$	definición $<$

Ejemplos.

16. Si $3 < 8$ y $8 < 12 \Rightarrow 3 < 12$

17. Si $9 > -3$ y $-3 > -5 \Rightarrow 9 > -5$

A este último teorema podríamos llamarle *transitividad* de la desigualdad.

Teorema 5.

Para toda $a, b, c, d \in R$.

i) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$
ii) Si $a > b$ y $c > d$ entonces $a + c > b + d$

Demostración (*i*)

Si $a < b \Rightarrow b - a \in R^+$ y si $c < d \Rightarrow d - c \in R^+$

y por la afirmación de que la suma de dos positivos es positivo, tenemos

$$(b - a) + (d - c) \in R^+$$

$$(b + d) + (-a - c) \in R^+$$

$$(b + d) - (a + c) \in R^+$$

entonces $a + c < b + c$.

Teorema 6.

i) Si $0 < a < b$ y $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$
ii) Si $a > b > 0$ y $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$

Los teoremas anteriores siguen siendo válidos si el símbolo $>$ es sustituido por $\geqslant$ y el de $<$ por $\leqslant$.

Las desigualdades $a > b$ y $a < b$ las podemos representar en una recta numérica donde $a < b$ significa que el punto que representa al número a está

a la izquierda del punto que representa al número b. Análogamente $a > b$ significa que el punto que representa a a está a la derecha del punto que representa a b.

Sean $x, a, b \in$ Reales, diremos que x está entre a y b si y sólo si $a < x$ y $x < b$ donde esto se puede representar por la siguiente desigualdad continua:

$$a < x < b$$

que significará:

$$x < b \text{ y } x > a$$

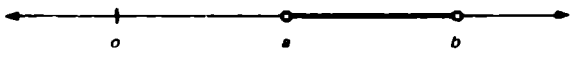
o:

$$\{ x \mid x < b \} \cap \{ x \mid x > a \}$$

Este tipo de desigualdad denotará un intervalo abierto que se define de la siguiente manera:

Definición. El intervalo abierto de a a b, denotado por (a, b) es el conjunto de todos los números reales x tales que:

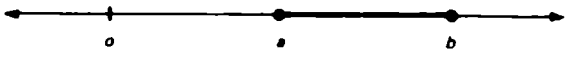
$$a < x < b$$



Dependiendo de que la desigualdad contenga a ambos extremos o sólo uno de ellos, definiremos los siguientes intervalos:

Definición. El intervalo cerrado de a a b, denotado por $[a, b]$ es el conjunto de todos los números reales x tales que:

$$a \leq x \leq b.$$

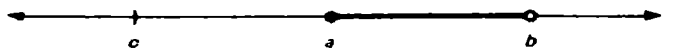


O sea, un intervalo cerrado $[a, b]$ consiste de todos los números que están entre a y b, incluyendo a a y a b.

Observación. En la recta numérica para indicar si el extremo de un intervalo pertenece a él, lo denotaremos remarcando el punto.

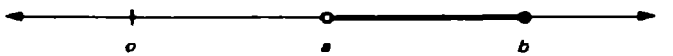
Definición. El intervalo semiabierto por la derecha denotado por $[a, b)$ es el conjunto de todos los números reales x tales que:

$$a \leqslant x < b$$



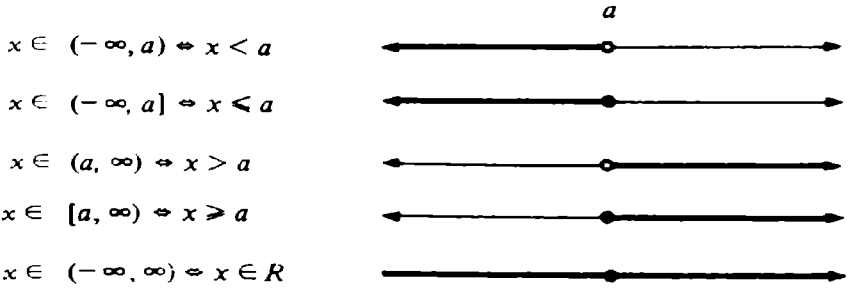
Definición. El intervalo semiabierto por la izquierda denotado por $(a, b]$ es el conjunto de todos los números reales x tales que:

$$a < x \leqslant b$$



Otros cinco intervalos abiertos o semiabiertos, serán definidos para denotar los valores de x en los reales tales que $x < a$, $x \leqslant a$, $x > a$, $x \geqslant a$ y $x \in R$.

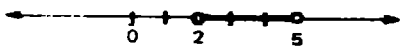
Definición.



Ejemplos.

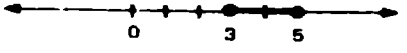
Representar en una recta numérica las siguientes desigualdades y también escribirlas en forma de intervalo.

18. $2 < x < 5$

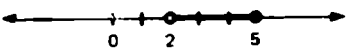


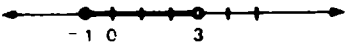
$(2, 5)$

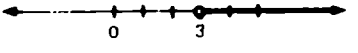
19. $3 \leqslant x \leqslant 5$



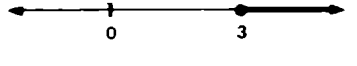
$[3, 5]$

20. $2 < x \leqslant 5$  $(2, 5]$

21. $-1 \leqslant x < 3$  $[-1, 3)$

22. $x > 3$  $(3, \infty)$

23. $x < 3$ $(-\infty, 3)$

24. $x \geqslant 3$  $[3, \infty)$

Se dijo anteriormente que resolver una desigualdad es encontrar los valores de la variable o variables que satisfacen la desigualdad. Utilizaremos para ello algunos de los teoremas que se mencionaron. Veamos los siguientes ejemplos para observar cómo se aplican los teoremas en la resolución de ellas.

Ejemplo.

25. Resolver las siguientes desigualdades

a) $x + 5 > 1$ *b*) $x - 4 \leqslant 2$

c) $\frac{x}{2} < 3$ *d*) $3x \geqslant 12$

e) $\frac{x}{-3} \geqslant 5$ *f*) $-8x < 16$

Representar su solución en una recta numérica y en forma de intervalo:

Solución

a) $\boxed{x + 5 > 1}$

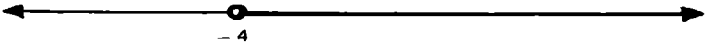
Restaremos 5 a ambos lados de la desigualdad

$x + 5 - 5 > 1 - 5$ (teorema 1)

$\boxed{x > 1 - 5}$

$x > -4$

Así, la solución es $(-4, \infty)$



b) $\boxed{x - 4 \leqslant 2}$

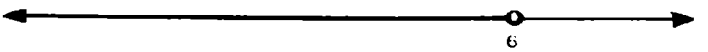
Sumaremos 4 a ambos lados de la desigualdad

$$x - 4 + 4 \leqslant 2 + 4 \qquad \text{(teorema 1)}$$

$$\boxed{x \leqslant 2 + 4}$$

$$x \leqslant 6$$

Así, la solución es $(-\infty, 6]$



Del *teorema 1* de esta sección podemos concluir que:

> Si una cantidad está sumando (o restando) en un lado de la desigualdad, puede pasar al otro lado de la desigualdad restando (o sumando) y la desigualdad se conserva.

c) $\boxed{\frac{x}{2} < 3}$

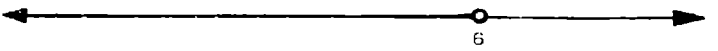
Multiplicaremos por 2 a ambos lados de la desigualdad.

$$2\left(\frac{x}{2}\right) < 2\,(3)$$

$$\boxed{x < 2(3)}$$

$$x < 6$$

Así, la solución es $(-\infty, 6)$



Del *teorema 2* de esta sección podemos concluir que:

> Si una *cantidad positiva* está dividiendo en un lado de la desigualdad, puede pasar al otro lado multiplicando y la desigualdad se conserva.

d) $3x \geqslant 12$

Multiplicaremos por $(1/3)$ a ambos lados.

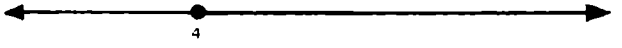
$$(1/3)(3x) \geqslant (1/3)(12)$$

$$\frac{3x}{3} \geqslant \frac{12}{3}$$

$$x \geqslant \frac{12}{3}$$

$$x \geqslant 4$$

Aquí observamos que el multiplicar por $(1/3)$ a ambos lados de la desigualdad es equivalente a dividir entre 3 a ambos lados. Así la solución de la desigualdad es: $[4, \infty)$



Por lo que también del *teorema 2* de esta sección podemos concluir que:

> Si una cantidad positiva está multiplicando en un lado de la desigualdad puede pasar al otro lado multiplicando y la desigualdad se conserva.

e) $\frac{x}{-3} \geqslant 5$

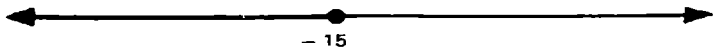
Multiplicaremos por (-3) a ambos lados

$$(-3)\left(\frac{x}{-3}\right) \leqslant (-3)(5) \qquad \text{(teorema 3)}$$

$$\boxed{x \leqslant (-3)(5)}$$

$$x \leqslant -15$$

Así, la solución es $(-\infty, -15]$



Del teorema 3, se puede concluir que

> Si una *cantidad negativa* está dividiendo en un lado de la desigualdad, puede pasar al otro lado multiplicando y la desigualdad cambia (de "mayor que" a "menor que" a de "menor que" a "mayor que".)

f) $\boxed{-8x < 16}$

Multiplicaremos por $\left(\frac{-1}{8}\right)$ a ambos lados, que es equivalente a dividir entre (-8) a ambos lados.

$$-8x < 16$$

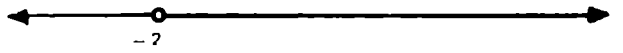
$$\left(\frac{-1}{8}\right)(-8x) > \left(\frac{-1}{8}\right)(16)$$

$$\frac{-8x}{-8} > \frac{16}{-8}$$

$$\boxed{x > \frac{16}{-8}}$$

$$x > -2$$

Así, la solución es $(-2, \infty)$



y del teorema 3 también podemos concluir que:

> Si una *cantidad negativa* está multiplicando en un lado de la desigualdad, puede pasar al otro lado dividiendo y la desigualdad cambia de "mayor que" a "menor que" o de "menor que" a "mayor que".

También podemos tener desigualdades donde haya varias operaciones a la vez, por lo que se seguirá un orden para despejar a la variable x. El orden a seguir será: primero quitar lo que se suma o resta a la variable, y por último, lo que se multiplica o divide.

Por ejemplo.

26. $\frac{5}{3}x + 8 < 2$

$\frac{5}{3}x < 2 - 8$ (teorema 1)

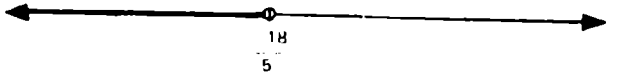
$\frac{5}{3}x < -6$

$5x < -6(3)$ (teorema 2)

$5x < -18$

$x < -\frac{18}{5}$ (teorema 2)

Así, la solución es $(-\infty, -\frac{18}{5})$



27. $2 - \frac{9}{4}x \geq 5$

$-\frac{9}{4}x \geq 5 - 2$ (teorema 1)

$$\frac{-9}{4}x \geqslant 3$$

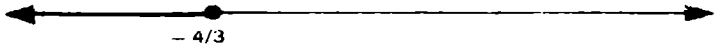
$-9x \geqslant 3(4)$ (teorema 2)

$-9x \geqslant 12$

$$x \leqslant \frac{12}{-9}$$ (teorema 3)

$$x \leqslant \frac{4}{-3}$$

Así, la solución es $(-\infty, -4/3]$



Existen desigualdades en donde la variable aparece en ambos lados, por lo que se procedería a acomodar lo que tenga variable en un miembro y lo que no tenga variable en el otro para luego proceder a despejar la variable.

Ejemplos.

28. $3 + 2x < 6x - 1$

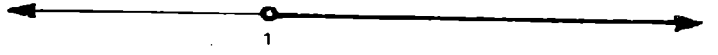
$2x - 6x < -1 - 3$

$-4x < -4$

$$x > \frac{-4}{-4}$$

$x > 1$

Así, la solución es, $(1, \infty)$



29. $15x + 2 > x - 5$

$15x - x > -5 - 2$

$14x > -7$

$$x > \frac{-7}{14}$$

$$x > \frac{-1}{2}$$

Así, la solución es: $(-1/2, \infty)$

30. $3 + 4x \le 5x + 4$

$4x - 5x \le 4 - 3$

$-x \le 1$

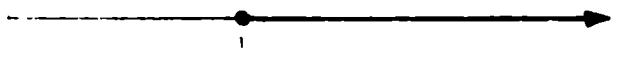
Esto es equivalente a

$(-1)(x) \le 1$

$x \ge \frac{1}{(-1)}$

$x \ge -1$

Así, la solución es $[-1, \infty)$



31. $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3} \le \frac{x}{3} - \frac{5}{2}$

$\frac{3}{2}x - \frac{x}{3} \le -\frac{5}{2} + \frac{2}{3}$

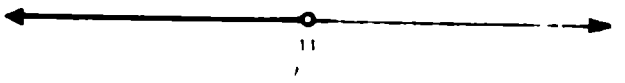
$\frac{9x}{6} - \frac{2x}{6} \le -\frac{15}{6} + \frac{4}{6}$

$\frac{7x}{6} \le -\frac{11}{6}$

$x \le \frac{-11(6)}{7(6)}$

$x \le -\frac{11}{7}$

Así, la solución es $(-\infty, -\frac{11}{7}]$.



32. $-5 \le 4x - 7 \le 9$

Esto es equivalente a

$$\begin{array}{lll} 5 \leqslant 4x - 7 & \text{y} & 4x - 7 \leqslant 9 \\ 5 + 7 \leqslant 4x & & 4x \leqslant 9 + 7 \\ 12 \leqslant 4x & & 4x \leqslant 16 \\ \dfrac{12}{4} \leqslant x & & x \leqslant \dfrac{16}{4} \\ 3 \leqslant x & \text{y} & x \leqslant 4 \end{array}$$

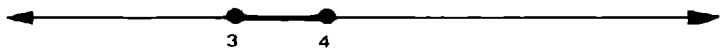
o sea que la solución es:

$$3 \leqslant x \qquad \text{y} \qquad x \leqslant 4$$

que se puede indicar como

$$3 \leqslant x \leqslant 4$$

es decir, la solución es [3, 4]



La desigualdad se puede resolver también de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} 5 \leqslant 4x - 7 \leqslant 9 \\ 5 + 7 \leqslant 4x \leqslant 9 + 7 \\ 12 \leqslant 4x \leqslant 16 \\ \dfrac{12}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{16}{4} \\ 3 \leqslant x \leqslant 4 \end{array}$$

y la solución es [3, 4].

33. $6 \geqslant 2 - 5x > 1$

Esto es equivalente a

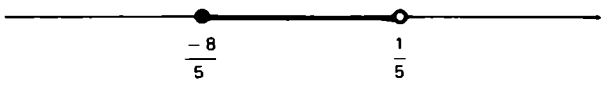
$$\begin{array}{lll} 6 \geqslant 2 - 5x & \text{y} & 2 - 5x > 1 \\ 6 - 2 \geqslant -5x & \text{y} & -5x > 1 - 2 \\ 8 \geqslant -5x & & -5x > -1 \end{array}$$

$$\frac{8}{-5} \leqslant x \qquad \text{y} \qquad x < \frac{-1}{-5}$$

$$x < \frac{1}{5}$$

o sea que la solución es:

$$\frac{-8}{5} \leqslant x < \frac{1}{5}$$



$$[\tfrac{-8}{5}, \tfrac{1}{5})$$

Desigualdades con cociente donde la variable aparece en el denominador.

34. $\frac{8}{x} > 2, x \neq 0$

Podemos pasar la variable x multiplicando al lado derecho, pero el sentido de la desigualdad dependerá de si x es positivo o negativo, de donde debemos considerar dos casos:

Caso 1.

Si $\boxed{x > 0}$, tenemos:

$$\frac{8}{x} > 2$$

$$8 > 2x$$

$$\frac{8}{2} > x$$

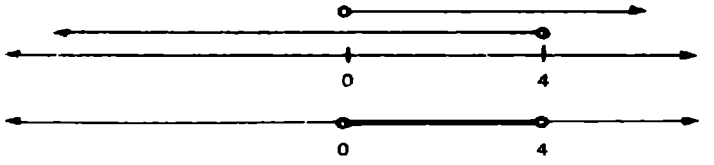
$$4 > x$$

$$\boxed{x < 4}$$

$\cap$

Nos damos cuenta que la condición $x > 0$ nos conduce a la desigualdad $x < 4$. Es decir, estas desigualdades deben satisfacerse simultáneamente. Esto es:

$$\{ x \mid x > 0 \text{ y } x < 4 \}$$
$$= \{ x \mid 0 < x < 4 \} = (0, 4)$$



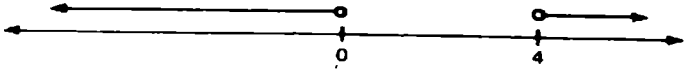
Caso 2.

Si $\boxed{x < 0}$, tenemos:

$$\frac{8}{x} > 2$$
$$8 < 2x$$
$$\frac{8}{2} < x$$
$$4 < x$$
$$\boxed{x > 4}$$

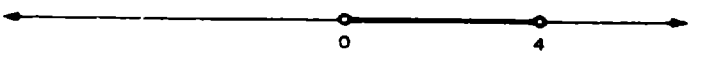
$\cap$

Tomando la intersección de los valores reales x menores que cero y mayores que 4, obtenemos:



La solución es el conjunto vacío, ya que $(-\infty, 0) \cap (4, \infty) = \phi$. La solución total será la unión de las soluciones de los dos casos, o sea:

$$\phi \cup (0, 4)$$



35. $\dfrac{3}{x - 1} \leqslant 2$

Caso 1.

Si $x - 1 > 0$ ó $\boxed{x > 1}$, tenemos:

$$\frac{3}{x-1} \leq 2$$

$$3 \leq 2(x-1)$$

$$3 \leq 2x - 2$$

$$3 + 2 \leq 2x$$

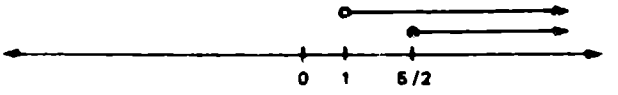
$$5 \leq 2x$$

$$\frac{5}{2} \leq x$$

$$\boxed{x \geq \frac{5}{2}}$$

$\cap$

y la intersección de $x > 1$ y $x \geq 5/2$.



es el intervalo $[\ 5/2, \infty)$

Caso 2

Si $x - 1 < 0$ ó $\boxed{x < 1}$, tenemos:

$$\frac{3}{x-1} \leq 2$$

$$3 \geq 2(x-1)$$

$$3 \geq 2x - 2$$

$$3 + 2 \geq 2x$$

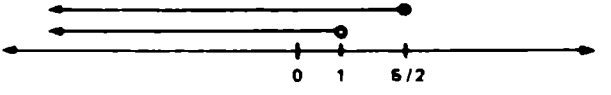
$$5 \geq 2x$$

$$\frac{5}{2} \geq x$$

$$\boxed{x \leq 5/2}$$

$\cap$

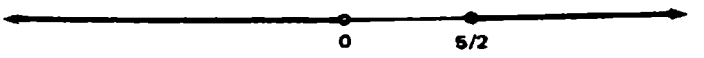
y la intersección de $x < 1$ y $x \leq 5/2$,



es el intervalo $(-\infty, 1)$

La solución total es la unión de las dos soluciones, o sea:

$$(-\infty, 1) \cup [5/2, \infty)$$



36. $\dfrac{x}{2x-3} > 5$

Caso 1.

Si $2x-3>0$ ó $\boxed{x > 3/2}$

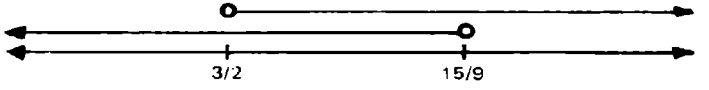
tenemos

$$\frac{x}{2x-3} > 5$$

$$x > 5(2x-3)$$
$$x > 10x-15$$
$$15 > 10x-x$$
$$15 > 9x$$
$$\frac{15}{9} > x$$

$$\boxed{x < \frac{15}{9}}$$

y la intersección de $x > 3/2$ y $x < 15/9$



es el intervalo $(3/2, 15/9)$

Caso 2.

Si $2x-3<0$ ó $\boxed{x < 3/2}$

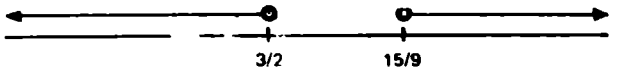
tenemos

$$\frac{x}{2x-3} > 5$$

$$x < 5(2x-3)$$
$$x < 10x-15$$
$$15 < 10x-x$$
$$15 < 9x$$
$$\frac{15}{9} < x$$

$$\boxed{x > \frac{15}{9}}$$

y la intersección de $x < 3/2$ y $x > 15/9$



es el conjunto vacío.

Así la solución de la desigualdad

$$\frac{x}{2x-3} > 5 \text{ es } (3/2,\ 15/9) \cup \phi = (3/2,\ 15/9)$$

Desigualdades cuadráticas

Otro tipo de desigualdades son aquellas en las que la variable que interviene está elevada al cuadrado (desigualdades cuadráticas). Para resolverlas se deja el lado derecho de la desigualdad únicamente con el valor de 0, si es que no está; después de ello se factoriza la expresión del lado izquierdo (si no se puede factorizar directamente, utilícese la fórmula general). Una vez factorizada la expresión del lado izquierdo, podemos tener las siguientes situaciones donde $(x + R_1)$ y $(x + R_2)$ son los factores.

a) Si la desigualdad es del tipo "mayor que", ambos factores deben ser positivos o ambos negativos para que al multiplicarlos dé una cantidad positiva.

es decir:

$$(x + R_1)(x + R_2) > 0$$

si

$$[(x + R_1) > 0 \text{ y } (x + R_2) > 0] \text{ ó } [(x + R_1) < 0 \text{ y } (x + R_1) < 0]$$

b) Si la desigualdad es del tipo "menor que" los dos factores deben ser de signo contrario, o sea uno negativo y otro positivo. Es decir:

$$(x + R_1)(x + R_2) < 0$$

si

$$[(x + R_1) < 0 \text{ y } (x + R_2) > 0] \text{ ó } [(x + R_1) > 0 \text{ y } (x + R_2) < 0]$$

Ejemplos.

37. $x^2 - 9 > 0$
$(x - 3)(x + 3) > 0$

Esta desigualdad se satisface sin ambos factores son positivos o ambos negativos, o sea, si

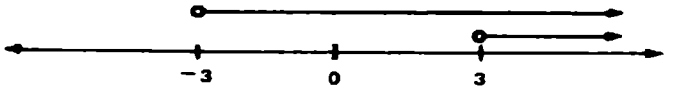
$[x - 3 > 0 \text{ y } x + 3 > 0]$ ó $[x - 3 < 0 \text{ y } x + 3 < 0]$

Para resolverlo consideremos los siguientes dos casos:

Caso 1

$x - 3 > 0 \text{ y } x + 3 > 0$
$x > 3 \text{ y } \quad x > -3$

la intersección de ambos

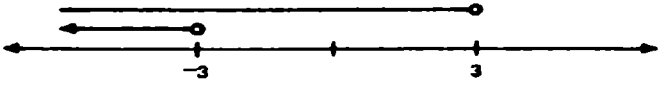


es el intervalo $(3, \infty)$

Caso 2

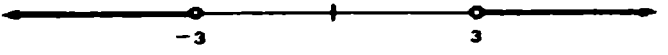
$x - 3 < 0 \text{ y } x + 3 < 0$
$x < 3 \text{ y } \quad x < -3$

La intersección de ambos



es el intervalo $(-\infty, -3)$
La solución total será la unión de las soluciones de los dos casos

$$(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$



38. $x^2 - x - 12 < 0$
$(x - 4)(x + 3) < 0$

Esta desigualdad se satisface si uno de los factores es positivo y el otro negativo o viceversa, o sea:

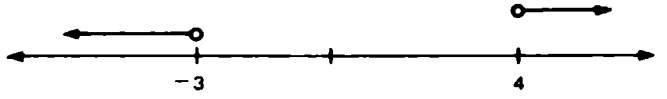
$$[\,x-4>0 \text{ y } x+3<0\,] \text{ ó } [\,x-4<0 \text{ y } x+3>0\,]$$

Consideremos también dos casos:

Caso 1

$$x-4>0 \text{ y } x+3<0$$
$$x>4 \text{ y } \quad x<-3$$

la intersección de ambos

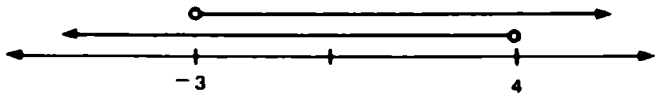


es el conjunto vacío.

Caso 2

$$x-4<0 \text{ y } x+3>0$$
$$x<4 \text{ y } \quad x>-3$$

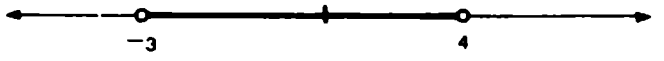
La intersección de ambos



es el intervalo $(-3, 4)$

La solución total es la unión de la solución de los dos casos:

$$\phi \cup (-3, 4)$$



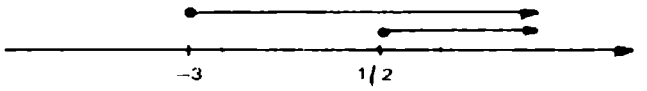
39. $2x^2 + 5x \geq 3$
$2x^2 + 5x - 3 \geq 0$
$(2x - 1)(x + 3) \geq 0$

Caso 1

$2x - 1 \geq 0$ y $x + 3 \geq 0$

$2x \geq 1$

$x \geq 1/2$ y $x \geq -3$

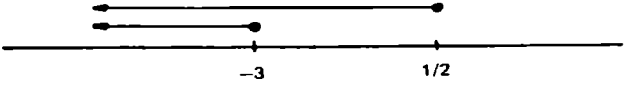


$[1/2, \infty)$

Caso 2

$2x - 1 \leq 0$ y $x + 3 \leq 0$

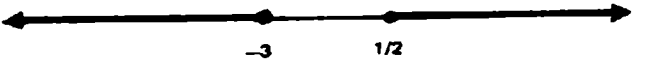
$x \leq 1/2$ y $x \leq -3$



$(-\infty, -3]$

Solución total es la unión de la solución de los dos casos

$(-\infty, -3] \cup [1/2, \infty)$



40. $x^2 + x - 1 \leq 0$

Como no se puede factorizar directamente, lo haremos por medio de la fórmula general, es decir las soluciones de la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$ son

$$x = \frac{-1 \mp \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

así los factores son

$$\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ y } \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

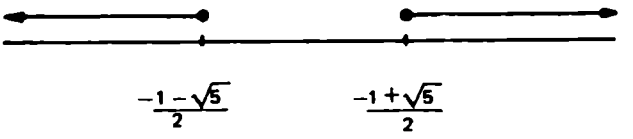
entonces $x^2 + x - 1 < 0$

$$\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0$$

Caso 1

$$\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) > 0 \quad \text{y} \quad \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0$$

$$x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

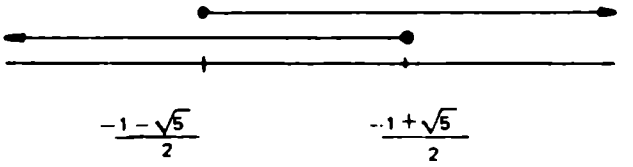


donde la intersección es el conjunto vacío.

Caso 2

$$x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{y} \quad x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} > 0$$

$$x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x > \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$



y, la intersección es

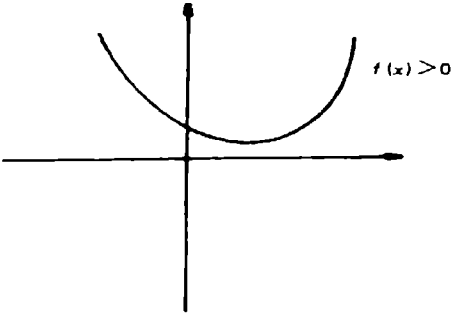
$$\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

Solución total

$$\varnothing \cup \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] = \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

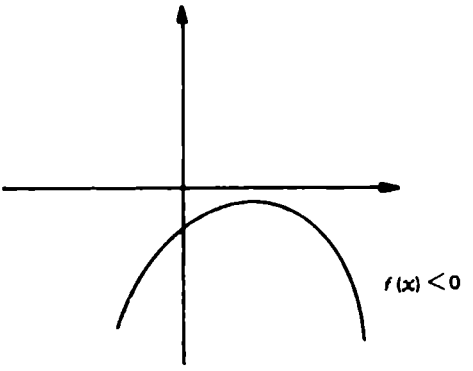
41. $x^2 + 1 > 0$

Las raíces de $x^2 + 1$ son (i) y $(-i)$ que no son reales. Puesto que estamos buscando los números reales que satisfacen la desigualdad los métodos anteriores no son de utilidad en este caso.
Vimos anteriormente que la gráfica de $y = x^2 + 1$ es una parábola, y puesto que sus raíces no son reales, dicha gráfica no corta al eje de las x. Es decir, esta gráfica está por encima del eje de las x ó por debajo del eje de las x.
Entonces para este tipo de ecuaciones se tiene una de las siguientes situaciones:



La función es positiva para todo valor x en los reales.
Así:

Si $f(x) > 0$, su solución es $(-\infty, \infty)$, o si $f(x) < 0$, su solución es



La función es negativa para todo valor x en los reales.

Así:

Si $f(x) > 0$, su solución es ϕ o si $f(x) < 0$, su solución es $(-\infty, \infty)$

En este caso $x^2 + 1$ siempre es positivo por lo que la solución de

$$x^2 + 1 > 0$$

es $(-\infty, \infty)$ (todos los reales)

Observación. Si tenemos una desigualdad cuadrática en la cual uno de sus miembros es cero y los factores del otro miembro son imaginarios, entonces la solución de la desigualdad ó es el conjunto de los reales $(-\infty, \infty)$ ó es el conjunto vacío (ϕ). Basta sustituir cualquier valor real en la desigualdad dada y si ésta es verdadera, la solución es $(-\infty, \infty)$; en caso contrario es ϕ.

42. $x^2 - 2x + 2 < 0$

Por medio de la fórmula general factorizaremos a $(x^2 - 2x + 2)$

$$x = \frac{+2 \mp \sqrt{4 - 4 \quad (1)(2)}}{2(1)} = \frac{2 \mp \sqrt{-4}}{2}$$

los factores son imaginarios, por lo que la solución es $(-\infty, \infty)$ ó es el ϕ.

Si sustituimos $x = 1$ en la desigualdad, tenemos:

$$(1)^2 - 2(1) + 2 < 0$$
$$1 - 2 + 2 < 0$$
$$1 < 0$$

que es falso, por lo que la solución es el conjunto vacío.

43. $\dfrac{x}{x-2} \leqslant \dfrac{2x}{x+3}$

Para obtener la solución de esta desigualdad se considerarán cuatro posibilidades (cuatro casos): si ambos denominadores son positivos, o ambos negativos, o el primer denominador positivo y el segundo negativo, o el primer denominador negativo y el segundo positivo.

Caso 1.

Si $x - 2 > 0$ y $x + 3 > 0$

$\boxed{x > 2}$ y $\boxed{x > -3}$

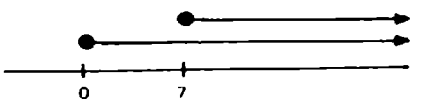
$$\frac{x}{x-2} \leqslant \frac{2x}{x+3}$$

$$x(x+3) \leqslant 2x(x-2)$$
$$x^2 + 3x \leqslant 2x^2 - 4x$$
$$0 \leqslant 2x - 4x - x - 3x$$
$$0 \leqslant x^2 - 7x$$

ó

$$x^2 - 7x \geqslant 0$$
$$x(x-7) \geqslant 0$$

$x \geqslant 0$ y $x - 7 \geqslant 0$
$x \geqslant 0$ y $x \geqslant 7$

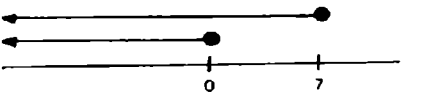


la intersección es
$[7, \infty)$

ó

ó

$x \leqslant 0$ y $x - 7 \leqslant 0$
$x \leqslant 0$ y $x \leqslant 7$

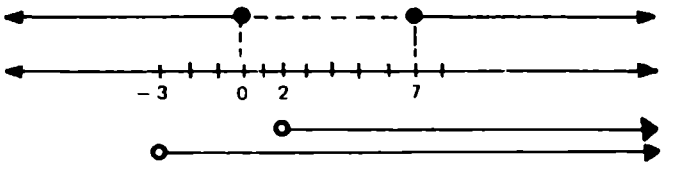


la intersección es
$(-\infty, 0]$

o sea que la solución de $x^2 - 7x \geqslant 0$

es $\boxed{(-\infty, 0] \cup [7, \infty)}$

La solución del caso 1 es la intersección de las condiciones con la solución de $x^2 - 7x \geqslant 0$. O sea la solución del caso 1 es



el intervalo $[7, \infty)$

Caso 2.

Si $x - 2 < 0$ y $x + 3 < 0$

$\boxed{x < 2}$ y $\boxed{x < -3}$

$$\frac{x}{x-2} \leqslant \frac{2x}{x+3}$$

$$\frac{x(x+3)}{x-2} \geqslant 2x$$

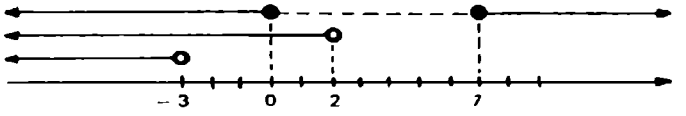
$$x(x+3) \leqslant 2x(x-2)$$

$$x^2 + 3x \leqslant 2x^2 - 4x$$
$$0 \leqslant 2x - 4x - x^2 - 3x$$
$$0 \leqslant x^2 - 7x$$
$$x^2 - 7x \geqslant 0$$

Esta desigualdad es la misma que aparece en el caso 1 y su solución es

$$\boxed{(-\infty, 0] \cup [7, \infty)}$$

y considerando la intersección de ésta y las condiciones tenemos que la solución para el caso 2 es



$(-\infty, -3)$

Caso 3.

Si $x - 2 > 0$ y $x + 3 < 0$

$\boxed{x > 2}$ y $\boxed{x < -3}$

$$\frac{x}{x-2} \leqslant \frac{2x}{x+3}$$

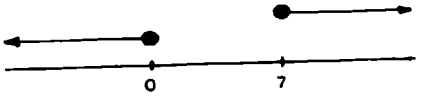
$$x \leqslant \frac{2x\,(x-2)}{x+3}$$

$$x\,(x+3) \geqslant 2x\,(x-2)$$

$$x^2 + 3x \geqslant 2x^2 - 4x$$
$$0 \geqslant 2x^2 - 4x - x^2 - 3x$$
$$0 \geqslant x^2 - 7x$$

$$x^2 - 7x \leqslant 0$$
$$x(x-7) \leqslant 0$$

$x \leqslant 0$ y $x - 7 \geqslant 0$
$x \leqslant 0$ y $x \geqslant 7$



y la intersección es

ϕ

ó

ó

$x \geqslant 0$ y $x - 7 \leqslant 0$
$x \geqslant 0$ y $x \leqslant 7$

y la intersección es

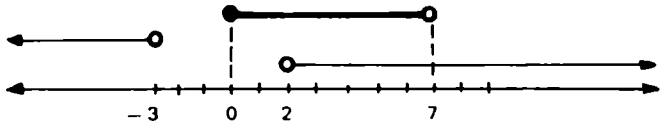
$[0, 7]$

Por lo que la solución de $x^2 - 7x \leqslant 0$

es $\boxed{[0, 7]}$

La solución del caso 3 es la intersección de las condiciones $x > 2$, $x < -3$ y la solución de $x^2 - 7x \leqslant 0$.

ó sea la solución del caso 3 es



el conjunto ϕ

Caso 4.

Si $x - 2 < 0$ y $x + 3 > 0$

$\boxed{x < 2}$ y $\boxed{x > -3}$

$$\frac{x}{x-2} \leqslant \frac{2x}{x+3}$$

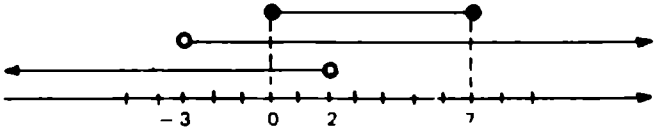
$$x \geqslant \frac{2x\,(x-2)}{x+3}$$

$$x\,(x+3) \geqslant 2x\,(x-2)$$
$$x^2 + 3x \geqslant 2x^2 - 4x$$
$$0 \geqslant 2x^2 - 4x - x^2 - 3x$$
$$0 \geqslant x^2 - 7x$$
$$x^2 - 7x \leqslant 0$$

Esta desigualdad es la misma que aparece en el caso 3 y su solución es:

$\boxed{[0, 7]}$

y considerando la intersección de esto y las condiciones tenemos que la solución para el caso 4 es



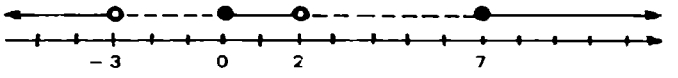
el intervalo [0, 2)

Finalmente la solución de la desigualdad

$$\frac{x}{x-2} \leqslant \frac{2x}{x+3}$$

es la unión de la solución de los cuatro casos, o sea

$$[7, \infty) \cup (-\infty, -3) \cup \phi \cup [0, 2)$$



o sea

$$(-\infty, -3) \cup [0, 2) \cup [7, \infty)$$

Ejercicio.

1. Demostrar el inciso *ii*) de cada teorema de esta sección.

2. Expresar por desigualdades, los valores de x comunes a las desigualdades:

   a) $x < 4, x > 1$
   b) $x < 0, x < -7$
   c) $-3 < x < 1/3, x > -1$
   d) $-2 < x < 5, -1 < x < 7$
   e) $x > 1, x < 0$
   f) $x > 2, x > 5/3$
   g) $-1 < x < 3, 0 < x < 2$

3. Decir si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) Si $a > b$ y $c > d$ entonces $b + d < a + c$.
   b) Si $a > b > 0$ y $c > d > 0$ entonces $ac > bd$.
   c) Si $a > b$ y c es cualquier número positivo entonces $cb > ca$.
   d) Si $a < b$ y c es cualquier número negativo entonces $ac < bc$.
   e) Si $a < b$ y c es cualquier número entonces $ac < bc$.
   f) Si $a > b$ y c es cualquier número entonces $ac > bc$.
   g) Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$ entonces $ac > bd$.
   h) El intervalo cerrado de a a b es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b excluyendo a b e incluyendo a a.

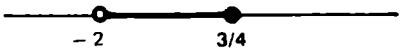
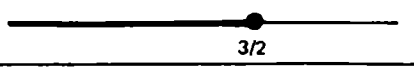
i) El intervalo abierto de a a b es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b excluyendo a a y a b.

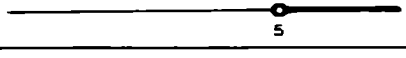
j) El intervalo $(a, b]$ es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b excluyendo a a e incluyendo a b.

k) El intervalo $[a, \infty)$ en el conjunto de todos los números reales mayores que a excluyendo a a.

4. Completar el siguiente cuadro.

Conjunto de números expresado en:

	Desigualdad	Intervalo	La recta numérica
a	$1 \leqslant x \leqslant 6$		
b	$x \leqslant 3$		
c		$(-1, 3]$	
d	$-1 \leqslant x \leqslant 2$		
e			
f	$-3 < x < 3$		
g		$[-4, 0)$	
h	$x \leqslant -1$		
i			
j			
k	$-2 \leqslant x \leqslant 6$		
l	$x > -4$		
m	$-5 \leqslant x < 5$		
n	$-5 \leqslant x \leqslant 5$		
ñ		$[-5/2, \infty)$	
o	$-2 < x < 3$		

	Desigualdad	Intervalo	La recta numérica
p	$-2 \leqslant x < 3$		
q	$-2 \leqslant x \leqslant 3$		
r	$-2 < x \leqslant 3$		
s		$(-\infty, -3)$	
t			
u			
v	$x \leqslant 2$		

5. Resolver las siguientes desigualdades. Expresar su solución por medio de una desigualdad, de un intervalo, y representarla en la recta numérica.

a) $x + 2 \geqslant 6$
b) $x - 7 < 1$
c) $2x \geqslant 26$
d) $-2x < 18$
e) $\dfrac{x}{-5} \leqslant 1$
f) $\dfrac{x}{2} \leqslant 9$
g) $2x - 7 \geqslant 2$
h) $8 - 3x \leqslant 3$
i) $3 - \dfrac{2}{3}x \leqslant 1$
j) $\dfrac{3}{5}x + 6 > 2$
k) $2x - 1 \leqslant 2x + 4$
l) $6x - 3 > 1 + 7x$
m) $2 - 8x > -2 + x$
n) $8x - 1 < 9x + 3$
o) $\dfrac{3}{7}x - \dfrac{5}{7} \geqslant 0$
p) $\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{2}x$

q) $\frac{4}{5}x + 8 \geq 4 - \frac{x}{10}$

r) $3x - 1 \leq \frac{3}{8}x + \frac{5-x}{2}$

s) $\frac{x}{2} < -5x + \frac{2}{3}$

t) $2x - 5 > \frac{5}{4}x + \frac{1-x}{3}$

u) $2 \leq x - 2 \leq 7$

v) $3 > 6 - \frac{3}{5}x \geq 1$

w) $5 \leq 5 - 4x \leq 8$

x) $2x < x - 3 \leq 5x$

6. Resolver las siguientes desigualdades. Expresar su solución por medio de un intervalo.

a) $\frac{2}{x} < 1$

b) $\frac{3}{x} \geq 3$

c) $\frac{3}{x} \geq \frac{2}{3}$

d) $\frac{5}{x} < \frac{6}{7}$

e) $\frac{3}{x} - 1 > \frac{5}{x} - 5$

f) $\frac{x}{2-4x} \leq \frac{5}{6}$

g) $x^2 \geq 4$

h) $x^2 \leq 1$

i) $x^2 + 4x - 5 > 0$

j) $2x^2 - 7x + 6 \leq 0$

k) $\frac{9x^2}{100} - \frac{8}{10}x < 1$

l) $3x^2 + 26x \geq 9$

m) $x^2 + 2x - 5 < 1$

$n)$ $x^2 + 3x - 1 \geq 0$

$\tilde{n})$ $x^2 + x - 1 \leq 0$

$o)$ $x^2 + x + 1 \geq 0$

$p)$ $9x^2 + 24x + 16 \geq 0$

$q)$ $5x^2 - x + 2 \leq 0$

$r)$ $x^2 + 16 \leq 0$

$s)$ $x^2 + 25 \geq 0$

$t)$ $-x^2 - 1 < 0$

$u)$ $3x^2 + x + 1 > 0$

$v)$ $x^2 + 3x + 3 \geq 0$

$w)$ $x^2 + 3x + 3 \leq 0$

$x)$ $\dfrac{x}{x+1} \leq \dfrac{x}{3x-1}$

$y)$ $\dfrac{2x}{x-1} > \dfrac{x}{x+7}$

$z)$ $\dfrac{3x+1}{x+2} \leq \dfrac{x-5}{2x-3}$

Sección 8.2

VALOR ABSOLUTO

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. **Definir valor absoluto de un número real e interpretarlo gráficamente.**
2. **Resolver ecuaciones que contengan valores absolutos.**
3. **Resolver desigualdades que contengan valores absolutos, graficar su solución en una recta numérica y utilizar la notación de intervalos para su representación.**

Otra de las expresiones utilizadas en matemáticas es el valor absoluto de un número real, que definiremos a continuación utilizando desigualdades:

El valor absoluto de un número real x denotado por $|x|$ se define por:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Ejemplos.

1. $|5| = 5$
2. $|-7| = -(-7) = 7$
3. $|-1/9| = -(-1/9) = 1/9$
4. $|.98| = .98$
5. $|0| = 0$

Observación. El valor absoluto de un número es un número positivo o es cero. El valor absoluto de un número puede representar su distancia desde 0 sin importar la dirección y $|a - b|$ es la distancia entre a y b también sin importar la dirección.

Tendremos desigualdades que involucren valores absolutos, éstas se resuelven basándose en los teoremas siguientes:

Teorema 1.

Si x es un número real y $a > o$, entonces:

a) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

b) $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ó $x < -a$

Demostración de (*a*)

Demostraremos primero que si $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$, $a > 0$.

Como no se sabe si x es positiva o negativa, debemos considerar dos casos:

Caso 1

$x \geqslant 0$

Si $x \geqslant 0 \Rightarrow |x| = x$, ya que $|x| < a \Rightarrow x < a$. También tenemos que $a > 0$, de donde $-a < 0$ (por la propiedad de que si un número es positivo $\Rightarrow$ su inverso aditivo es negativo).

Así tenemos:

$$-a < 0 \leqslant x < a \text{ o } -a < x < a.$$

Caso 2.

$x < 0$.

Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, ya que $|x| < a$ se concluye que $-x < a$. También como $x < 0$ y $a > 0$ tenemos que $-x > 0$ y $-a < 0$, de donde:

$$-a < 0 < -x < a \text{ o } -a < -x < a$$

Si multiplicamos por (-1) la desigualdad, obtenemos:

$$(-1)(-a) > (-x)(-1) > (a)(-1)$$
$$a > x > -a$$
$$\text{o } -a < x < a$$

En ambos casos:

$$|x| < a \Rightarrow -a < x < a, \text{ donde } a > 0.$$

Ahora hay que demostrar el otro sentido de la desigualdad en la parte *a*)

Si $-a < x < a \Rightarrow |x| < a$.

Aquí debemos considerar dos casos también:

Caso 1.

$x \geq 0$.

Si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$ y como $x < a$ tendremos que:

$$|x| < a.$$

Caso 2.

$x < 0$.

Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, como $-a < x$ tenemos que $a > -x$ ó $-x < a$, pero $-x = |x| \Rightarrow$ tenemos $|x| < a$.

Así, en ambos casos tenemos:

Si $-a < x < a \Rightarrow |x| < a$, donde $a > 0$.

La demostración de *b*) se dejará como ejercicio.

Observaciones.

a) El teorema lo podemos indicar de las siguientes formas:

$$|x| < a \Leftrightarrow x < a \text{ y } x > -a$$
$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ y } x < -a$$

ó

$$|x| < a \Leftrightarrow x \in \{x \mid x < a\} \cap \{x \mid x > -a\}$$
$$|x| > a \Leftrightarrow x \in \{x \mid x > a\} \cup \{x \mid x < -a\}$$

b) Para recordar de una manera rápida este teorema lo podemos denotar de la siguiente manera:

$$|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a$$
$$|x| > a \Longleftrightarrow -a > x \text{ ó } x > a$$

junto a este teorema tenemos otro.

Teorema 2.

a) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
b) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ ó $x \leq -a$

También lo podemos representar por:

a) $|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a \text{ y } x \geq -a$
b) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ y } x \leq -a$

o

a) $|x| \leq a \Leftrightarrow x \in \{x \mid x \leq a\} \cap \{x \mid x \geq -a\}$
b) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in \{x \mid x \geq a\} \cup \{x \mid x \leq -a\}$

Los ejemplos siguientes muestran la solución de ecuaciones y desigualdades con valores absolutos.

Ejemplos.

6. Resolver: $|x| = 7$

Por la definición de valor absoluto, tenemos:

$$x = 7 \quad \text{ó} \quad x = -7$$

7. $|2x + 8| = 5$

$$\begin{array}{lll} 2x + 8 = 5 & \text{ó} & 2x + 8 = -5 \\ 2x = 5 - 8 & \text{ó} & 2x = -8 - 5 \\ 2x = -3 & \text{ó} & 2x = -13 \\ x = -3/2 & \text{ó} & x = -13/2 \end{array}$$

8. $|x - 10| = -3$

Como el valor absoluto nunca es negativo, esta ecuación no tiene solución.

Observación. Al utilizar el teorema de desigualdades con valores absolutos, podemos considerar a la variable como una expresión algebraica.

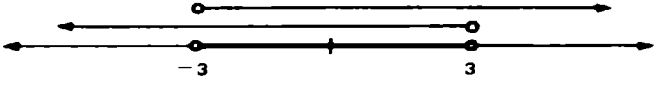
Ejemplos.

9. $|x| < 3$.

Por el teorema tenemos:

$$-3 < x < 3$$

que representa la intersección de $x < 3$ y $x > -3$.

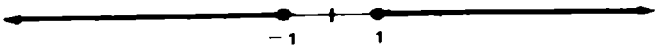


y la solución es el intervalo $(-3, 3)$.

10. $|x| \geq 1$

$-1 \geq x$ ó $x \geq 1$

que representa la unión de $x \geq 1$ y $x \leq -1$.



y la solución es

$$(-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

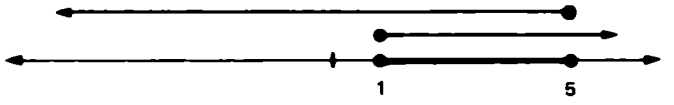
11. $|x-3| \leqslant 2$

$-2 \leqslant x-3 \leqslant 2$

Resolvamos las dos desigualdades a la vez:

$$-2+3 \leqslant x \leqslant 2+3$$
$$1 \leqslant x \leqslant 5$$

que representa la intersección de $x \leqslant 5$ y $x \geqslant 1$.

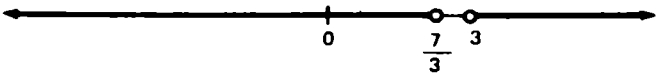


y la solución es el intervalo [1, 5].

12. $|8-3x|>1$

$$\begin{array}{lcl} 8-3x>1 & \text{ó} & 8-3x<-1 \\ -3x>1-8 & \text{ó} & -3x<-1-8 \\ -3x>-7 & \text{ó} & -3x<-9 \\ x<\dfrac{-7}{-3} & \text{ó} & x>\dfrac{-9}{-3} \\ x<7/3 & \text{ó} & x>3 \end{array}$$

que representa la unión de $x>3$ y $x<7/3$



y la solución es $(-\infty, 7/3) \cup (3, \infty)$.

13. $\left|\dfrac{x+6}{2x-3}\right|<1$

$$-1<\frac{x+6}{2x-3}<1$$

$$-1<\frac{x+6}{2x-3} \quad \text{y} \quad \frac{x+6}{2x-3}<1$$

Primero resolveremos la desigualdad $-1 < \dfrac{x+6}{2x-3}$

si $2x - 3 > 0$, $\boxed{x > 3/2}$

$$-1 < \frac{x+6}{2x-3}$$

$$-1(2x-3) < x+6$$

$$-2x+3 < x+6$$

$$-2x - x < 6 - 3$$

$$-3x < 3$$

$$x > \frac{3}{3}$$

$$\boxed{x > -1}$$

ó

si $2x - 3 < 0$, $\boxed{x < 3/2}$

$$-1 < \frac{x+6}{2x-3}$$

$$-1(2x-3) > x+6$$

$$-2x+3 > x+6$$

$$-2x - x > 6 - 3$$

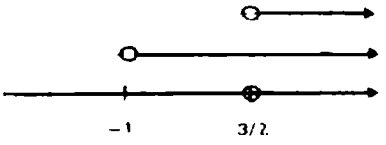
$$-3x > 3$$

$$x < \frac{3}{3}$$

$$\boxed{x < -1}$$

así

$$(3/2, \infty) \cap (-1, \infty)$$

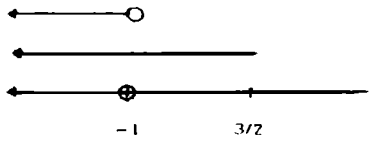


$$(3/2, \infty)$$

ó

así

$$(-\infty, -1) \cap (-\infty, +3/2)$$



$$(-\infty, -1)$$

y la solución de la desigualdad $-1 < \dfrac{x+6}{2x-3}$ es

$$(-\infty, -1) \cup (3/2, \infty)$$

Ahora resolveremos la desigualdad

$$\frac{x+6}{2x-3} < 1$$

Si $2x - 3 > 0$, $\boxed{x > 3/2}$ ó Si $2x - 3 < 0$, $\boxed{x < 3/2}$

$$\frac{x+6}{2x-3} < 1$$

$$x + 6 < 1(2x - 3)$$

$$x + 6 < 2x - 3$$

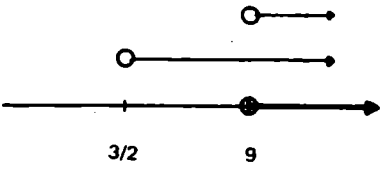
$$6 + 3 < 2x - x$$

$$9 < x$$

$\boxed{x > 9}$

así

$(3/2, \infty) \cap (9, \infty)$



$(9, \infty)$

$\cap$

$$\frac{x+6}{2x-3} < 1$$

$$x + 6 > 1(2x - 3)$$

$$x + 6 > 2x - 3$$

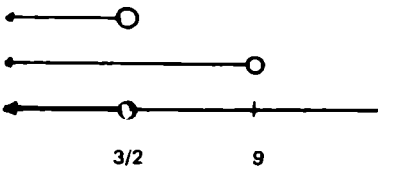
$$6 + 3 > 2x - x$$

$$9 > x$$

$\boxed{x < 9}$

así

$(-\infty, 3/2) \cap (-\infty, 9)$



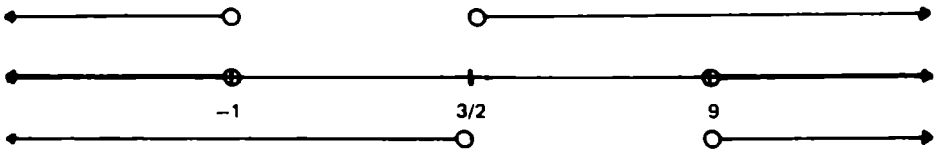
$(-\infty, 3/2)$

y la solución de la desigualdad $\dfrac{x+6}{2x-3} < 1$ es

$$(-\infty, 3/2) \cup (9, \infty)$$

finalmente la solución de $\left|\dfrac{x+6}{2x-3}\right| < 1$ es

$$[(-\infty, -1) \cup (3/2, \infty)] \cap [(-\infty, 3/2) \cup (9, \infty)]$$



o sea

$$(-\infty, -1) \cup (9, \infty)$$

14. $|3x-4| \geq |4x|$

$$\frac{|3x-4|}{|4x|} \geq 1$$

$$\left|\frac{3x-4}{4x}\right| \geq 1$$

$$\frac{3x-4}{4x} \geq 1 \quad \text{ó} \quad \frac{3x-4}{4x} \leq -1$$

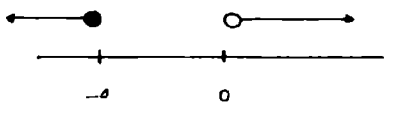
Si $4x > 0$ ó $\boxed{x > 0}$

$3x - 4 \geq 4x$ $\cap$

$\boxed{-4 \geq x}$

así

$(0, \infty) \cap (-\infty, -4]$



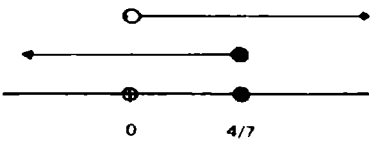
ϕ

Si $4x > 0$ ó $\boxed{x > 0}$

$3x - 4 \leq -4x$ $\cap$

$7x \leq 4$

$\boxed{x \leq 4/7}$



$(0, 4/7]$

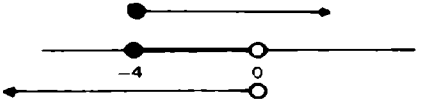
Si $4x < 0$ ó $\boxed{x < 0}$

$3x - 4 \leq 4x$ $\cap$

$\boxed{-4 \leq x}$

así

$(-\infty, 0) \cap [-4, \infty)$



$[-4, 0)$

Si $4x < 0$ ó $\boxed{x < 0}$

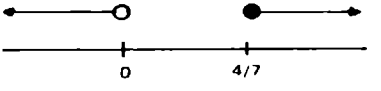
$3x - 4 \geq -4x$

$7x \geq 4$ $\cap$

$\boxed{x \geq 4/7}$

así

$(-\infty, 0) \cap [+4/7, \infty)$



ϕ

la solución de $\frac{3x-4}{4x} \geq 1$ la solución de $\frac{3x-4}{4x} \leq -1$

es es

$\phi \cup [-4, 0) = [-4, 0)$ $(0, 4/7] \cup \phi = (0, 4/7]$

y finalmente la solución de $\left|\frac{3x-4}{4x}\right| \geq 1$

es

$$[-4, 0) \cup (0, 4/7]$$

y puesto que $x = 0$ satisface la desigualdad $|3x - 4| \geq |4x|$ se tiene que la solución de $|3x - 4| \geq |4x|$ es

$$[-4, 4/7]$$

Existe una relación entre la raíz principal cuadrada de un número y su valor absoluto.

Si $x \in R$, $\sqrt{x}$ no está definida si $x < 0$ entonces, $\forall\, x \in R$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Ejemplos.

15. $\sqrt{(5)^2} = |5|$
$5 = 5$

16. $\sqrt{(-3)^2} = |-3|$
$3 = 3$

La raíz cuadrada de un número está definida o existe sólo si su radicando es positivo o cero, es decir

Si $x \in R$, $\sqrt{x}$ existe o está definida si $x \geq 0$.

Ejemplo.

17. Dar el valor que puede tomar la variable x, para que la raíz exista, o sea los valores de x para que la expresión sea real.

i) $\sqrt{2x+3}$

ii) $\sqrt{x^2-4}$

iii) $\sqrt{x^2+9}$

Solución.

i) $\sqrt{2x+3}$ existe si y sólo si

$2x+3 \geqslant 0$

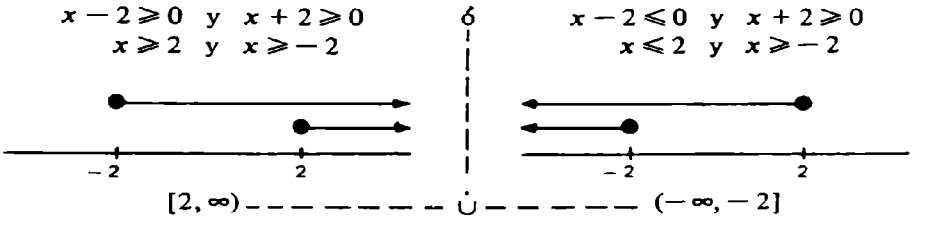
$2x \geqslant -3$

$x \geqslant -3/2$

o sea que $x \in [-3/2, \infty)$

ii) $\sqrt{x^2-4}$ existe si $x^2-4 \geqslant 0$

$(x-2)(x+2) \geqslant 0$



o sea que $\sqrt{x^2-4}$ es real si

$$x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

iii) $\sqrt{x^2+9}$ existe o es real si $x^2+9 \geqslant 0$

al factorizar x^2+9 observamos que tiene raíces imaginarias, por lo que la solución es ϕ o $(-\infty, \infty)$. Para esta desigualdad en especial la solución es $(-\infty, \infty)$, o sea que $\sqrt{x^2+9}$ es real para cualquier valor de x.

Los teoremas siguientes de valores absolutos nos serán de gran utilidad en cursos posteriores, sobre todo en cálculo.

Teorema 3.

Para todo $a, b \in R$.

i) $|ab| = |a|\,|b|$

ii) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

Demostración de i).

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2}\,\sqrt{b^2} = |a|\,|b|$$

entonces: $|ab| = |a|\,|b|$

La demostración de *ii*) quedará como ejercicio.

Teorema 4. *Desigualdad del triángulo.*

Para todo $a, b \in R$:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Demostración:

Consideremos diferentes posibilidades para a y b

1 $a \geq 0$ y $b \geq 0$

Si $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$

Si $b \geq 0 \Rightarrow |b| = b$

$a + b \geq 0 \Rightarrow |a + b| = a + b$

así: $|a + b| = a + b = |a| + |b|$

2. $a < 0$ y $b < 0$

Si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$, si $b < 0 \Rightarrow |b| = -b$

$a + b < 0 \Rightarrow |a + b| = -(a + b)$

así: $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$

3. $a \geq 0$ y $b < 0$

Si $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$ y si $b < 0 \Rightarrow |b| = -b$
por lo tanto:

$$|a + b| = a + b \qquad \text{si } a + b \geq 0$$

o

$$|a + b| = -(a + b) \qquad \text{si } a + b < 0$$

pero

$a + b < a + (-b) = |a| + |b|$, porque $a \geq 0$ y $b < 0$,
$-(a + b) = (-a) + (-b) \leq a + (-b) = |a| + |b|$, porque $a \geq 0$ y $b < 0$.

De donde observamos que cualquiera de los dos tiene resultado:

$$|a| + |b|$$

o sea, que:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

4. $a < 0$ y $b \geq 0$

La demostración es idéntica a la de punto 3, de donde se cumple para todos los casos que:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Inmediato a este teorema tenemos el siguiente:

Teorema 5.

Para todo $a, b \in R$:

i) $|a - b| \leq |a| + |b|$

ii) $|a| - |b| \leq |a - b|$

Demostración de i)

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$$

de donde: $|a - b| \leq |a| + |b|$

La demostración de *ii)* quedará como ejercicio.

Ejercicios.

1. Resolver para x:

a) $|2x - 8| = 5$
b) $|5x + 9| = 6$
c) $|2 - 3x| = 4$
d) $|7x - 15| = -7$
e) $|8x - 4| = |x|$
f) $|x - 3| = |x + 1|$
g) $|8x| = x - 1$
h) $3x - 4 = |5x + 1|$
i) $|5x - 9| = 2$
j) $|2x - 17| = -1$
k) $|8 - 9x| = 4$
l) $|3 - 6x| = 3$
m) $|x/2 - 3/4| = 1$
n) $|x/3 + 5/7| = 2$
ñ) $|5x/4 - 9/5| = 1/5$

2. Resolver las siguientes desigualdades y dar el intervalo solución y representarlo en la recta numérica.

a) $|20 - 10x| > 5$
b) $|6 + 2x| \leqslant 1$
c) $|12 - 6x| \geqslant 4$
d) $|8 - 7x| > 2$
e) $|5x - 8| < 7$
f) $|5 + 6x| \geqslant 6$
g) $|3x + 8| \leqslant 6$
h) $|3x - 6| \leqslant 3$
i) $|9 - 7x| \geqslant 12$
j) $|5x - 1/2| > 1$
k) $|7 - 12x| \leqslant 3$
l) $|6x + 9| \leqslant 4$
m) $|x + 3| \leqslant 2$
n) $|2x - 5| \leqslant 5$
ñ) $|8x + 5| > 3$
o) $|4x + 7| < 7$
p) $|1/2 - x/3| \leqslant 1$
q) $|2/3 - x/7| \geqslant 1$
r) $|3x/5 - 3| > 3$
s) $|3x/5 - x/2| \leqslant 4$
t) $\left|\frac{2x}{3} - \frac{x}{4} - 1\right| < 2$
u) $|6x/7 - 2/7| \geqslant 1/7$
v) $\left|1 - \frac{3}{7} + \frac{x}{5}\right| \geqslant 5$
w) $|6 - \frac{1}{6} + \frac{x}{6}| \geqslant 12$
x) $\left|\frac{5x - 6}{3 + x}\right| < 1/2$
y) $|\frac{2x - 1}{x + 5}| \leqslant 1/2$
z) $\left|\frac{2x - 3}{x + 2}\right| < 1/4$
a') $|\frac{2 - 3x}{x + 4}| \geqslant 1/5$

b') $|3 + 2x| < |2 - x|$ c') $|1 + 2x| < |3 - x|$

d') $|x - 2| \geq |3x - 1|$ e') $\left|\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right| > \left|\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right|$

f') $\left|\frac{5x - 1}{x}\right| \geq \left|\frac{3x}{x - 4}\right|$ g') $\left|\frac{2x + 3}{x}\right| \geq \left|\frac{2x}{x + 4}\right|$

3. Encontrar todos los valores de x para los cuales la expresión es real.

a) $\sqrt{9x - 4}$ *b*) $\sqrt{8 - 5x}$

c) $\sqrt{x^2 - (1/2)x - 1/2}$ *d*) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$

e) $\sqrt{x^2 - 1}$ *f*) $\sqrt{1 - x^2}$

g) $\sqrt{x^2 + 4x + 4}$ *h*) $\sqrt{x^2 + 6x + 9}$

i) $\sqrt{15x^2 - 14x + 3}$ *j*) $\sqrt{6x^2 + x - 2}$

4. Demostrar en cada teorema de esta sección los incisos *ii*).

CAPÍTULO 9

Trigonometría

INTRODUCCIÓN

El solo nombre de trigonometría nos hace pensar que ésta se ocupa de algunas propiedades de los triángulos y sus aplicaciones; de hecho, en el inicio de su estudio, esta fue su principal preocupación. Ya en el siglo II A.C., algunos astrónomos griegos realizaban estudios de trigonometría, en dicha época, las aplicaciones se reducían básicamente a la astronomía y a la navegación.

Pero hasta el siglo XVII se empezó a referir este material con el nombre de trigonometría, aunque seguiría insistiendo tan sólo en problemas que involucraban la medición y resolución de triángulos. Actualmente, la trigonometría da lugar a un tipo especial de funciones, llamadas funciones trigonométricas, que juegan un papel muy importante sobre todo en algunas aplicaciones del cálculo.

Finalmente, podemos decir que la trigonometría nos permitirá continuar con el estudio de los números complejos en lo que se refiere a la extracción de raíces.

Sección 9.1

ÁNGULOS

Objetivos

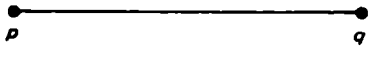
Después de estudiada esta unidad, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir distancia entre dos puntos en $R \times R$.
2. Dados dos puntos, encontrar su distancia.
3. Definir ángulo y ángulos dirigidos.
4. Definir grado y radián.
5. Dado un ángulo en grados expresarlo en radianes y viceversa.

El concepto central de esta sección es la idea de ángulo. Para poder llegar a ella, necesitaremos algunos conceptos elementales.

Definición. Si p y q son dos puntos, el segmento pq, que será denotado por $\overline{pq}$ está definido como el conjunto de todos los puntos que están entre p y q.

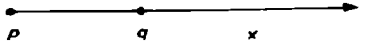
$\overline{pq}$



Definición. Si p y q son dos puntos, el rayo pq, que será denotado por $\overrightarrow{pq}$ está definido como el conjunto de todos los puntos del segmento pq unido con el conjunto de puntos x tales que q está entre p y x.

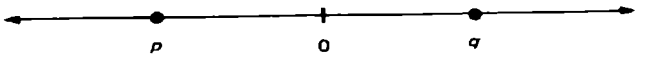
El rayo pq está formado por el segmento pq y además los puntos que están después de q al prolongar el segmento.

$\overrightarrow{pq}$



Observación. Es costumbre llamar al punto p del rayo pq, origen o extremo del rayo.

Definición. Sean p y q dos puntos diferentes en una recta numérica.

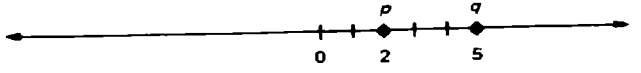


la distancia entre estos dos puntos, que será denotada como $d\,(p,q)$ o $|\,\overline{pq}\,|$ se define por:

$$|p - q| \text{ o } |q - p|$$

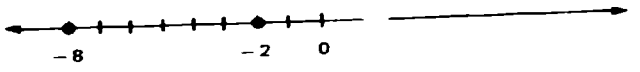
Ejemplos.

1.



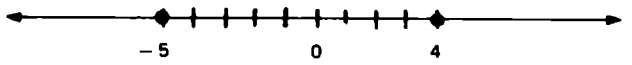
$$d\,(p, q) = |\,5 - 2\,| = |\,3\,| = 3$$

2.



$$|\overline{pq}| = |(-8) - (-2)| = |-8 + 2| = |-6| = 6$$

3.



$$|pq| = d(p,q) = |(-5) - (+4)| = |-5 - 4| = |-9| = 9$$

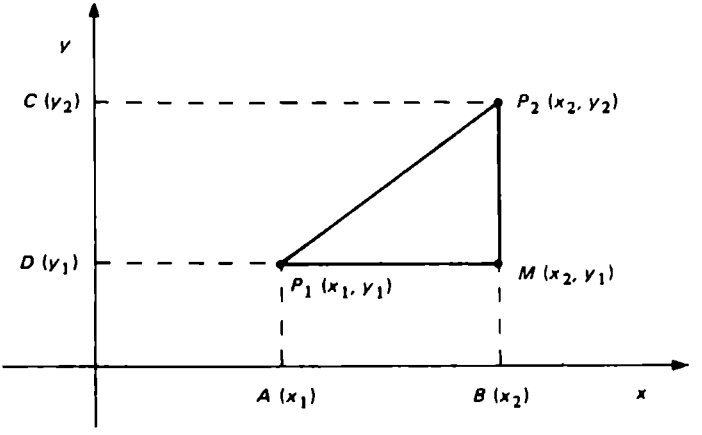
Siguiendo la distancia entre dos puntos cualesquiera en una recta numérica y el teorema de Pitágoras, podemos llegar al siguiente teorema, que nos dice cómo encontrar la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano.

Teorema.

Sean $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera del plano, entonces la distancia entre ellos está dada:

$$d(p_1, P_2) = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Demostración



Construimos el triángulo rectángulo $P_1\ M\ P_2$ con el segmento $P_1\ P_2$ como hipotenusa.

Por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$|\overline{P_1 P_2}|^2 = |\overline{P_1 M}|^2 + |\overline{P_2 M}|^2.$$

La longitud del segmento P_1M es idéntica a la del segmento AB, ya que dichas rectas son paralelas, de donde:

$$|\overline{P_1M}| = |\overline{AB}| = |x_2 - x_1|.$$

Lo mismo sucede para el segmento P_2M que es paralelo al segmento DC, entonces:

$$|\overline{P_2M}| = |\overline{DC}| = |y_2 - y_1|$$

y sustituyendo en el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

y despejando obtenemos:

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y^2 - y_1)^2}$$

De este modo se llega a la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano.

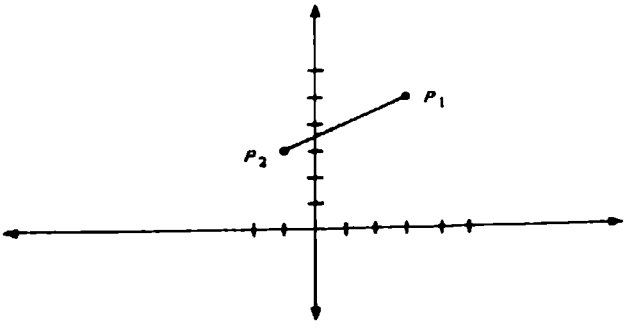
Ejemplo.

4. Si $P_1(3, 5)$ y $P_2(-1, 3)$, encontrar su distancia de P_1 a P_2:

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(3-(-1))^2 + (5-3)^2}$$

$$= \sqrt{16+4}$$

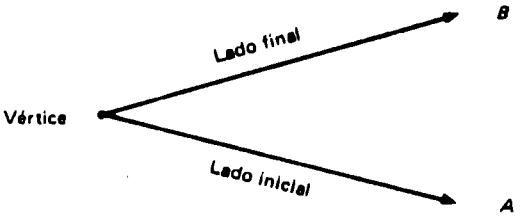
$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



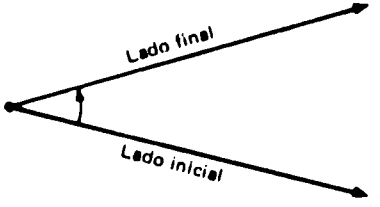
Definición. Un ángulo es la figura formada por la rotación de un rayo alrededor de su origen, desde una posición inicial hasta una posición final.

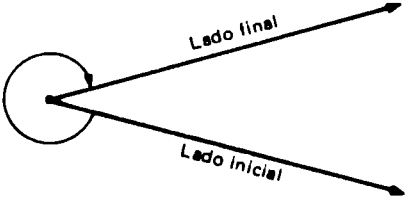
Observaciones.

a) La amplitud de la rotación es la medida del ángulo.
b) La posición inicial es llamada *lado inicial* y la posición final, *lado terminal.*
c) El extremo del rayo se llama *vértice* del ángulo.



El lado inicial de un rayo puede llevarse a la posición final por rotación en el mismo sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario.

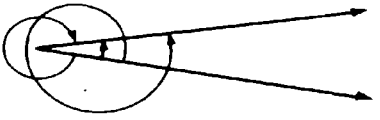




Si la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj, diremos que el ángulo es negativo y si es en sentido contrario, diremos que es un ángulo positivo.

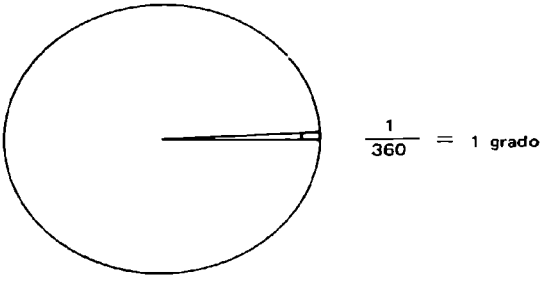
Definición. Un ángulo dirigido es aquel al que se le ha asignado un sentido.

Observación. El ángulo formado por dos rayos no está determinado en forma única. Si se dan dos rayos, podemos formar varios ángulos con ellos. La figura siguiente muestra tres de estos ángulos.



La medida de un ángulo puede ser dada en grados o en radianes.

Definición. Un grado es la magnitud de un ángulo cuyo vértice está en el centro de un círculo y cuyos lados interceptan un arco de longitud igual a $\frac{1}{360}$ de la circunferencia.



Observaciones.

a) Si un ángulo de un grado es dividido en 60 partes iguales, a cada una de estas partes se le llamará *minuto;* cada minuto, a su vez, puede dividirse en 60 partes iguales, a las cuales llamaremos segundos. Los símbolos que se utilizan para denotar grados, minutos y segundos son, respectivamente: $^\circ$, $'$, $''$.

b) No existe límite para la magnitud de un ángulo.

c) Si un rayo efectúa una revolución completa en contra de las manecillas del reloj, habrá generado un ángulo de 360°.

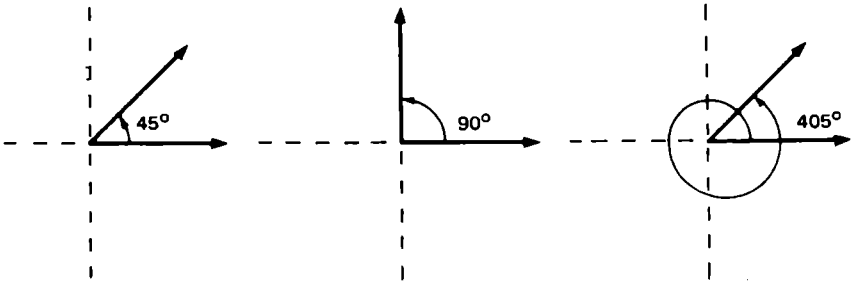
d) Los ángulos serán denotados por medio de las letras griegas: α (alfa),

β (beta), γ (gamma), θ (theta), ϕ (phi) o por letras mayúsculas de nuestro alfabeto (A, B, C, etc.).

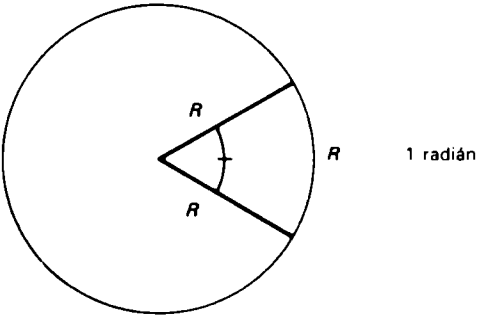
e) Los ángulos serán denotados anteponiéndoles el símbolo: $\measuredangle$

Ejemplos.

5. Trazar los ángulos $\theta = 45°$, $\theta = 90°$, $\theta = 405°$.



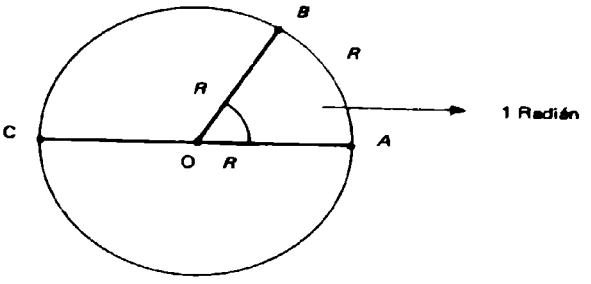
Definición. Un radián es la medida de un ángulo con vértice en el centro de un círculo y cuyos lados interceptan un arco de circunferencia de longitud igual al radio.



En geometría existe una relación entre grados y radianes:

Los ángulos en el centro de un círculo son proporcionales a los arcos que interceptan.

Consideremos la siguiente circunferencia:



de donde, según la relación anterior, tenemos:

$$\frac{\measuredangle\, A\,O\,C}{\measuredangle\, A\,O\,B} = \frac{\widehat{A\,B\,C}}{\widehat{A\,B}}$$

($\widehat{AB}$; $\widehat{ABC}$ significa las longitudes de los arcos AB y ABC, respectivamente).

$\measuredangle\, A\,O\,C = 180°$

$\measuredangle\, A\,O\,B = 1$ radián

$\widehat{AB} = R$

y $\widehat{A\,B\,C}$ es una semicircunferencia de longitud $\pi\,R$, ya que la longitud completa es $2\,\pi\,R$, y así:

$$\frac{180°}{1 \text{ radián}} = \frac{\pi\,R}{R}$$

$$\pi \text{ radianes} = 180°$$

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} \approx .017 \text{ radianes (aproximadamente)}$$

Observación. La relación π radianes $= 180°$ es muy importante y hay que tenerla presente.

La siguiente proporción puede resultar muy útil para convertir de radianes a grados o de grados a radianes.

$$\frac{\text{Número de grados}}{360} = \frac{\text{Número de radianes}}{2\,\pi}$$

Es decir:

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \approx 57.3^\circ \text{ (aproximadamente)}$$

Es decir,

$$\text{Núm. de grados} = \frac{(\text{Núm. de radianes})(360^\circ)}{2\pi}$$

é

$$\text{Núm. de grados} = \frac{(\text{Núm. de radianes})(180^\circ)}{\pi}$$

También despejando Núm. de radianes se tiene que

$$\text{Núm. de radianes} = \frac{(\text{Núm. de grados})(\pi)}{180^\circ}$$

Con la anterior se puede concluir que

a) Para cambiar de radianes a grados se multiplica por $180/\pi$
b) Para cambiar de grados a radianes se multiplica por $\pi/180$

Ejemplos.

6. Convierte en radianes los siguientes ángulos.

a) 60° *b*) 35° *c*) 90° *d*) 405°

Solución.

$$a) \text{ Núm. de radianes} = \frac{(\text{Núm. de grados})(\pi)}{180^\circ}$$

$$= \frac{(60)(\pi)}{180^\circ}$$

$$= \frac{\pi}{3} \text{ radianes}$$

b) Núm. de radianes $= \dfrac{(\text{Núm. de grados})(\pi)}{180}$

$$= \frac{35(\pi)}{180} = \frac{7\pi}{36} \text{ radianes}$$

c) Núm. de radianes $= \dfrac{(\text{Núm. de grados})(\pi)}{180}$

$$= \frac{(90)(\pi)}{180} = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$$

d) Núm. de radianes $= \dfrac{(\text{Núm. de grados})(\pi)}{180}$

$$= \frac{(405)(\pi)}{180}$$

$$= \frac{9}{4}\pi \text{ radianes}$$

7. Expresar en grados los siguientes ángulos.

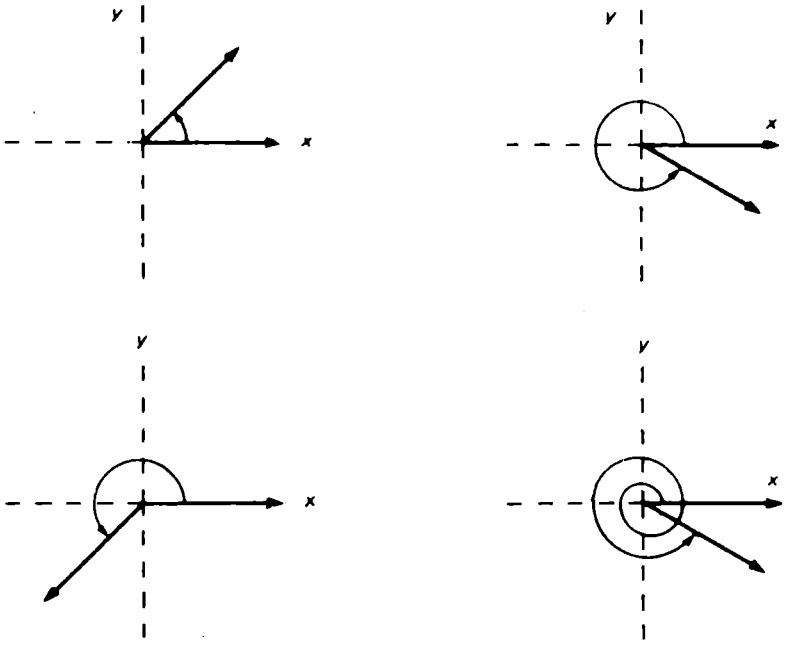
a) $\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{2\pi}{3}\left(\dfrac{180}{\pi}\right) = \dfrac{360}{3} = 120°$

b) $\dfrac{4}{5}\pi = \dfrac{4}{5}(180) = 4\,(36) = 144°$

c) $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{8}\left(\dfrac{180}{\pi}\right) = \dfrac{180}{2} = 90°$

d) 1.2 radianes $= \left(1.2\right)\left(\dfrac{180}{\pi}\right) = \left(1.2\right)\dfrac{180}{3.1416}\Bigg) = \left(68.75°\right)$

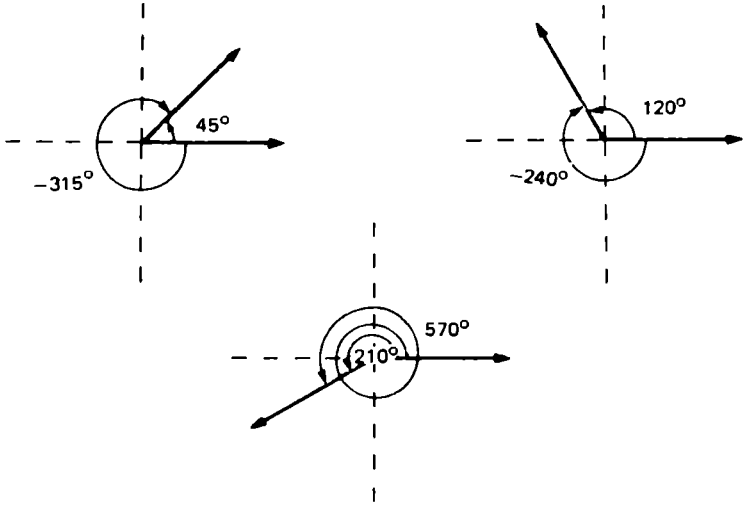
Definición. Un ángulo θ está en *posición normal* cuando su vértice y el lado inicial coinciden con el origen y el lado positivo del eje x respectivamente, en un sistema de coordenadas.



Definición. Si dos o más ángulos colocados en posición normal tienen el mismo lado inicial y final, se dirá que son ángulos coterminales.

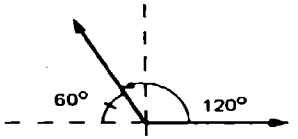
Ejemplo.

8.

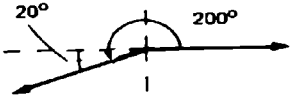


$-315°$ y $45°$ son ángulos coterminales como también lo son $120°$ y $-240°$ y $210°$ y $570°$.

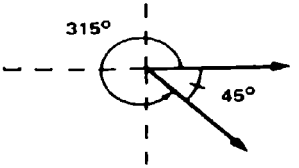
Definición. Para todo ángulo θ en posición normal, el ángulo reducido de un ángulo dado es el ángulo no negativo, más pequeño formado por el lado terminal y el eje de las x.



$\theta = 120°$
ángulo reducido de $120° = 60°$



$\theta = 200°$
ángulo reducido de $200° = 20°$



$\theta = 315°$
ángulo reducido de $315° = 45°$

Observaciones

a) Si el ángulo θ está en el segundo cuadrante, entonces su ángulo reducido es $(180° - \theta)$.

b) Si el ángulo θ está en el tercer cuadrante, entonces su ángulo reducido es $(\theta - 180°)$.
c) Si el ángulo θ está en el cuarto cuadrante, entonces su ángulo reducido es $(360° - \theta)$.

Ejercicios.

1. Encuentre la distancia entre los siguientes pares de puntos:

   a) (6, 7) y (−4, 1)
   b) (12, 5) y (−3, −3)
   c) (−7, 3) y (1, 1)
   d) (5, 0) y (0, 5)

2. Demuestre que el triángulo de vértices P (2, 1), Q (5, 5) y R (−2, 4) es isósceles.

3. Encontrar el perímetro de los triángulos cuyos vértices son:

   a) A (−4, −6), B (0, 0) y C (3, 10)
   b) A (0, 3), B (3, 10) y C (5, −4).

4. Demostrar que los puntos: p (0, 0), q (4, 9) y r (8, 18) son colineales (que están en una misma línea recta).

5. Decir si los siguientes puntos son colineales o no:

   a) (−1, 0), (0, 3), (1, 5)
   b) (2, 9), (3, 12), (−1, 0).

6. Demostrar que los puntos: p (12, 9), q (20, −6), r (5, −14) y s (−3, 1) son los vértices de un cuadrado.

7. Demostrar que los puntos: p (2, 3), q (−4, −3) y r (6, −1) son los vértices de un triángulo rectángulo.

8. Decir si los siguientes tres puntos forman un triángulo rectángulo:

   a) (2, 6), (3, −2), (6, 3)
   b) (−4, 4), (7, 1), (3, −3)

9. Encontrar las longitudes de las diagonales del rectángulo formado por los puntos (3, 2), (3, −3), (8, 2) y (8, −3).

10. Convertir las medidas dadas en grados a radianes y viceversa:

a) 12°
b) 45°
c) 35°
d) 180°
e) 157°
f) 240°
g) 275°
h) 348°
i) 360°
j) 112.5°
k) $\pi/4$
l) $(2/3)\,\pi$
m) π
n) $\dfrac{15\,\pi}{90}$
ñ) $9\,\pi/10$
o) 0.025
p) 2.00
q) $\dfrac{7\,\pi}{6}$
r) 5.9

Sección 9.2

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir las seis funciones trigonométricas de un ángulo cualesquiera.
2. Dada una función trigonométrica, hallar las demás.

En esta sección discutiremos otro tipo de funciones conocidas como funciones trigonométricas, que son:

$f(x)$ = seno (x)
$f(x)$ = coseno (x)
$f(x)$ = tangente (x)
$f(x)$ = cotangente (x)
$f(x)$ = secante (x)
$f(x)$ = cosecante (x)

Es costumbre representar estas funciones con abreviaturas y sin el paréntesis del ángulo variable:

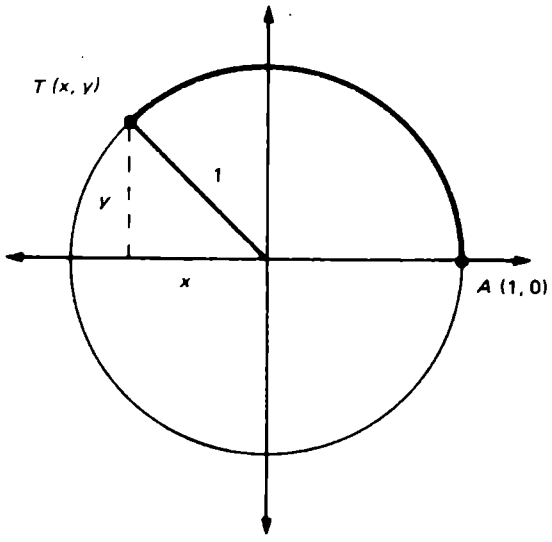
sen x	cot x
cos x	sec x
tan x	csc x

donde x puede ser un simple número real o un número que denote la medida de un ángulo y se le conoce como argumento.

Para definir las funciones trigonométricas consideraremos dos casos:

Funciones trigonométricas de un número real

Consideremos un círculo unitario en un plano coordenado y un punto T con coordenadas (x, y) en ese círculo.



El número real t representará la longitud del arco de circunferencia desde A hasta T.

Entonces, las funciones trigonométricas se definen por:

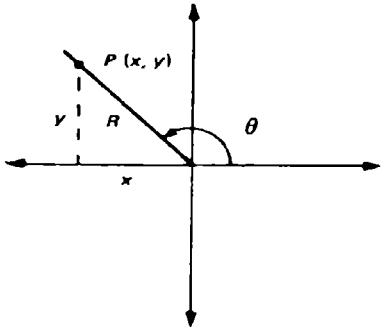
$\operatorname{sen} t = y$	$\cot t = \dfrac{x}{y}$
$\cos t = x$	$\sec t = \dfrac{1}{x}$
$\tan t = \dfrac{y}{x}$	$\csc t = \dfrac{1}{y}$

Ya que la longitud de una circunferencia es 2π (π aproximadamente 3.1416) podemos representar los números reales t en función de π. O sea, un cuarto de circunferencia lo podemos representar por $t = \frac{\pi}{2} \approx 1.07$, media circunferencia por $t = \pi \approx 3.1416$, la circunferencia completa por $t = 2\pi \approx 6.2832$.

Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Sea θ un ángulo cualquiera colocado en posición normal y sea P un punto cualquiera que tiene las coordenadas (x, y) diferentes del origen, que se encuentra en el lado terminal de θ.

Sea R la longitud desde el origen al punto P, que se conoce como el radio vector del punto P.



Se definen las funciones trigonométricas del ángulo θ como:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{radio vector de } P} = \frac{y}{R}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{abscisa de } P}{\text{radio vector de } P} = \frac{x}{R}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{abscisa de } P} = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{abscisa de } P}{\text{ordenada de } P} = \frac{x}{y}$$

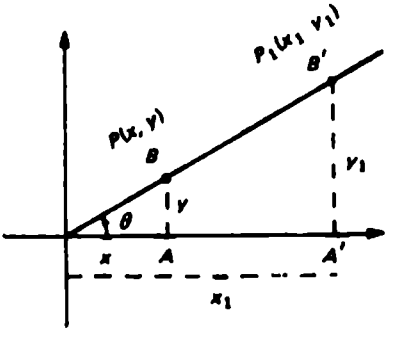
$$\sec \theta = \frac{\text{radio vector de } P}{\text{abscisa de } P} = \frac{R}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{radio vector de } P}{\text{ordenada de } P} = \frac{R}{y}$$

Podemos observar que el dominio y dominio de imágenes para cada una de las funciones es:

Función	*Dominio*	*Dominio de imágenes*
sen θ	todos los ángulos	$[-1,1]$
cos θ	todos los ángulos	$[-1,1]$
tan θ	todos los ángulos para los cuales $x = 0$	$(-\infty, \infty)$
cot θ	todos los ángulos para los cuales $y = 0$	$(-\infty, \infty)$
sec θ	todos los ángulos para los cuales $x = 0$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
csc θ	todos los ángulos para los cuales $y = 0$	$(-\infty, -1] \cup [1,\infty)$

Observación. Al definir las funciones, especificamos que P fuera un punto cualquiera del lado terminal de θ. Si escogiéramos un punto diferente de P, digamos $P_1\ (x_1\ ,\ y_1)$ cuyo radio vector es R_1.



Las funciones trigonométricas serían:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y_1}{R_1} \qquad \cot\theta = \frac{x_1}{y_1}$$

$$\cos\theta = \frac{x_1}{R_1} \qquad \sec\theta = \frac{R_1}{x_1}$$

$$\tan\theta = \frac{y_1}{x_1} \qquad \csc\theta = \frac{R_1}{y_1}$$

pero los triángulos:

$$A\,O\,B \quad \text{y} \quad A'\,O\,B'$$

son semejantes, de donde se tiene que las razones (cocientes) de sus lados serán iguales, o sea, que:

$$\frac{y}{R} = \frac{y_1}{R_1} \qquad \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$$

$$\frac{x}{R} = \frac{x_1}{R_1} \qquad \frac{R}{x} = \frac{R_1}{x_1}$$

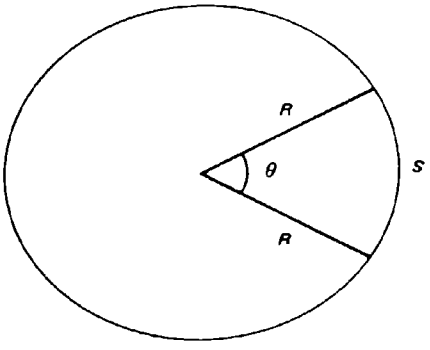
$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} \qquad \frac{R}{y} = \frac{R_1}{y_1}$$

Entonces podemos concluir que el valor de cualquiera de las funciones trigonométricas no depende del punto que se escoja en el lado terminal del ángulo θ.

Observación. La longitud de un arco en cualquier circunferencia es:

$$\text{longitud de un arco} = R\,\theta$$

donde R es el radio de la circunferencia y θ está medido en radianes.



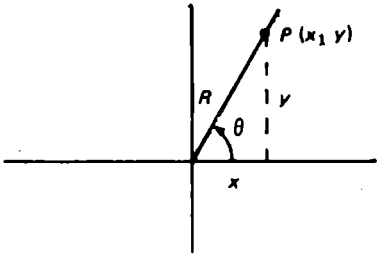
Si consideramos una circunferencia unitaria y S es la longitud de cualquier arco de esta circunferencia, tenemos:

$$\begin{aligned} S &= R\,\theta \\ &= (1)\,(\theta) \\ S &= \theta \end{aligned}$$

de donde la distancia S es igual a la medida en radianes del ángulo que se forma.

Con esta observación llegamos a que las funciones trigonométricas de un número real t (t es el arco de la circunferencia unitaria) son idénticas a las funciones de un ángulo θ cuando θ se mide en radianes.

Observación. Un caso especial de esta segunda parte es cuando el ángulo θ queda en el primer cuadrante, o sea, $0° < \theta < 90°$ (ángulo agudo) y el triángulo que se forma es un triángulo rectángulo.



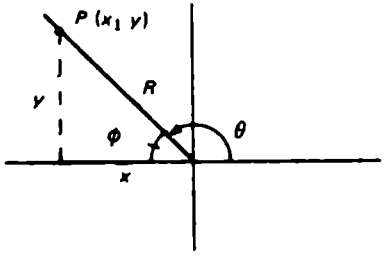
y sus lados reciben los nombres de cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa y así, las definiciones de las funciones trigonométricas quedarán:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{R} \qquad \cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{x}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{R} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{R}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y}{x} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{R}{y}$$

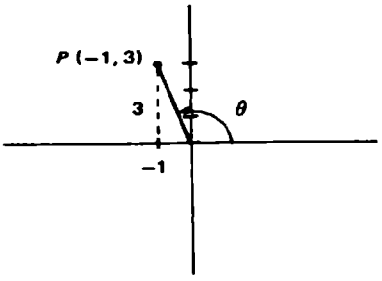
Observación. Las funciones trigonométricas de un ángulo θ mayor de $90°$ serán iguales que las de su ángulo reducido salvo, quizá, por el signo.



Es decir: las funciones del ángulo θ son iguales en valor absoluto que las del ángulo ϕ (ϕ es el ángulo reducido de θ).

Ejemplos

1. Hallar los valores de las funciones trigonométricas de θ si el punto $(-1, 3)$ está en el lado terminal de θ.



$R = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ por teorema de Pitágoras

(R siempre será ≥ 0).

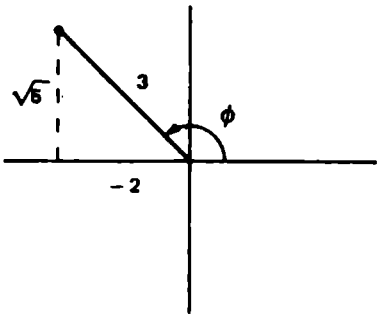
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \qquad \cot\theta = \frac{-1}{3}$$

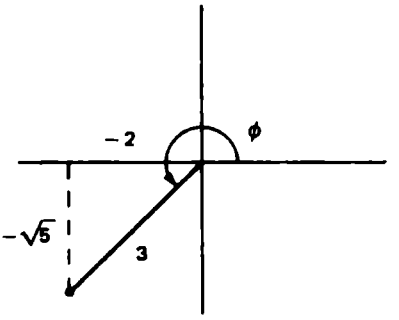
$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{10}} \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{10}}{-1}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{-1} \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

2. Hallar los valores de las funciones trigonométricas de ϕ si $\cos\phi = -\frac{2}{3}$.

En este ejemplo puede suceder que ϕ esté en el segundo o en el tercer cuadrante, por lo que debemos dar dos respuestas.





$y = \sqrt{9-4}$

$y = \sqrt{5}$

$\text{sen } \phi = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos \phi = \dfrac{-2}{3}$

$\tan \phi = \dfrac{\sqrt{5}}{-2}$

$\cot \phi = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$

$\sec \phi = \dfrac{3}{-2}$

$\csc \phi = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

$y = \sqrt{9-4}$

$y = \sqrt{5}$

$\text{sen } \phi = \dfrac{-\sqrt{5}}{3}$

$\cos \phi = \dfrac{-2}{3}$

$\tan \phi = \dfrac{-\sqrt{5}}{-2}$

$\cot \phi = \dfrac{-2}{-\sqrt{5}}$

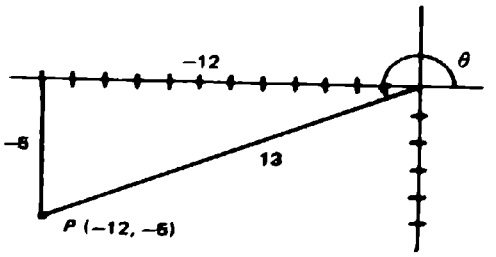
$\sec \phi = \dfrac{3}{-2}$

$\csc \phi = \dfrac{3}{-\sqrt{5}}$

3. Si $\sec \theta = -\dfrac{13}{12}$ y θ está en el tercer cuadrante, hallar las demás funciones de θ:

$$\sec \theta = -\frac{13}{12} = \frac{R}{x}$$

y así: $x = -12$ y $R = 13$.



$$y = \sqrt{169 - 144}$$

$$y = \sqrt{25}$$

$$y = 5$$

Entonces, puesto que $x = -12$, $y = -5$ y $R = 13$ tenemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-5}{13} \qquad \cot\theta = \frac{-12}{-5}$$

$$\cos\theta = \frac{-12}{13} \qquad \sec\theta = \frac{13}{-12}$$

$$\tan\theta = \frac{-5}{-12} \qquad \csc\theta = \frac{13}{-5}$$

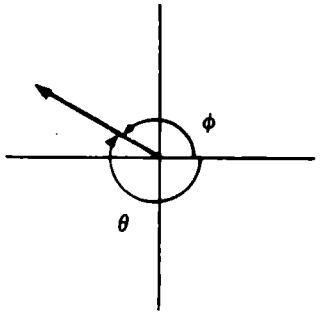
Observaciones. De acuerdo a las definiciones de las funciones trigonométricas, y tomando en cuenta los ejemplos anteriores, podemos llegar a las siguientes conclusiones:

a) Los signos de las funciones trigonométricas en los diferentes cuadrantes son:

2o.	1o.
sen (+) cot (−)	sen (+) cot (+)
cos (−) sec (−)	cos (+) sec (+)
tan (−) csc (+)	tan (+) csc (+)
sen (−) cot (+)	**sen (−) cot (−)**
cos (−) sec (−)	**cos (+) sec (+)**
tan (+) csc (−)	**tan (−) csc (−)**
3o.	4o.

Recordando que R siempre es positivo.

b) Los ángulos coterminales (que tengan los mismos lados inicial y final) tienen las mismas funciones trigonométricas.



ϕ ángulo cualquiera
θ ángulo coterminal
(o viceversa).

Ejercicios.

1. ¿Pueden las funciones sen θ y cos θ tomar cualquier valor en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$? Justificar su respuesta.

2. ¿Los valores de sec θ y csc θ pueden estar en el intervalo $(-1, 1)$? Justificar su respuesta.

3. Hallar las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal, cuyo lado final pasa por cada uno de los puntos dados.

   a) $(3,4)$
   b) $(-4,-3)$
   c) $(-1,3)$
   d) $(5,-2)$
   e) $(5,12)$
   f) $(-1,\sqrt{3})$
   g) $(-1/2,-1/2)$
   h) $(-1,-1)$
   i) $(2,3\sqrt{2})$
   j) $(1,-1)$
   k) $(3,2)$
   l) $(1,1)$
   m) $(\sqrt{3},\sqrt{2})$
   n) $(-1/\sqrt{3}, +1/\sqrt{2})$
   ñ) $(1/3,-1)$
   o) $(-\sqrt{5},\sqrt{3})$

4. ¿En cuáles de los cuadrantes puede terminar el ángulo θ, en los casos siguientes?

a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{7}{25}$

b) $\cos\theta = -\frac{2}{5}$

c) $\tan\theta = \frac{40}{9}$

d) $\cot\theta = -\frac{4}{3}$

e) $\sec\theta = -\frac{2}{1}$

f) $\csc\theta = \frac{25}{7}$

5. Hallar los valores de las otras funciones trigonométricas que faltan si:

a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta \in$ Primer cuadrante

b) $\cot\theta = \frac{-8}{15}$, $\theta \in$ Segundo cuadrante

c) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\theta \in$ Tercer cuadrante

d) $\tan\theta = -1$

e) $\cos\theta = -\frac{3}{4}$

f) $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$

g) $\sec\theta = \frac{-41}{9}$

h) $\csc\theta = \frac{-13}{5}$

i) $\cos\theta = \frac{40}{41}$

j) $\sec\theta = \frac{-41}{9}$

6. Establecer el signo de las siguientes funciones:

a) $\operatorname{sen} 250°$

a) sen 250°
b) cos (−120°)
c) tan (−45°)
d) sen (0°)
e) cos (90°)
f) tan (45°)
g) cot (550°)
h) sec (−220°)
i) csc (3605°)
j) cot (−30°)
k) sec (−120°)
l) csc (−180°)

Sección 9.3

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Enunciar y demostrar las identidades fundamentales.
2. Aplicar las identidades fundamentales a la verificación de otras identidades.
3. Dadas las ecuaciones paramétricas de una curva, eliminar su parámetro.

Para empezar con esta sección, debemos recordar algo sobre las identidades.

Definición. Una identidad es una proposición de igualdad, que es válida para todos los valores permisibles de las variables que aparecen en ella y se denota por el símbolo (≡).

Existen muchas relaciones de identidad entre las funciones trigonométricas. Las más importantes son las llamadas identidades fundamentales, que a continuación estudiaremos.

Identidades de recíprocas

1. $\operatorname{sen} t \csc t \equiv 1$
2. $\cos t \sec t \equiv 1$
3. $\tan t \cot t \equiv 1$

Observación. Son llamadas recíprocas porque el producto de ellas es la unidad.

Identidades de división

4. $\tan t \equiv \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$

5. $\cot t \equiv \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$

Identidades de los cuadrados

6. $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t \equiv 1$

7. $1 + \tan^2 t \equiv \sec^2 t$

8. $1 + \cot^2 t \equiv \csc^2 t.$

Las demostraciones de estas identidades se basan en las definiciones de las funciones trigonométricas, que quedarán como ejercicios.

Observación. Las identidades fundamentales pueden escribirse de diferentes formas, por ejemplo:

$$\operatorname{sen} t \equiv \frac{1}{\csc t} \qquad \text{o} \qquad \csc t \equiv \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

$$\tan t \cos t \equiv \operatorname{sen} t$$

$$\cos t \equiv \frac{\operatorname{sen} t}{\tan t}$$

etc.

Estas ocho identidades fundamentales serán la base para demostrar otras identidades trigonométricas. Para ello recurriremos a procedimientos como reducir el primer miembro al segundo o viceversa o cada miembro, por separado, reducirlo a una misma forma. En estas demostraciones usaremos también operaciones algebraicas como la suma de fracciones, factorización, multiplicación y división (evitando la división por cero y la radicación).

Antes de ver ejemplos de demostraciones con identidades, veremos la transformación de algunas expresiones en otras equivalentes.

Ejemplos.

1. Transformar la siguiente expresión a una función que sólo contenga $\cot A$:

$$\frac{1 + \cot^2 A}{\cot A \sec^2 A}$$

$$\frac{1 + \cot^2 A}{\cot A \sec^2 A} \equiv \frac{\csc^2 A}{\frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}\left(\frac{1}{\cos A}\right)^2}$$

por las identidades:

$1 + \cot^2 A \equiv \csc^2 A$

$\cot A = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$

$\sec A \equiv \frac{1}{\cos A}$

$$\equiv \frac{\left(\frac{1}{\operatorname{sen} A}\right)^2}{\frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} \cdot \frac{1}{\cos^2 A}}$$

por la identidad:

$\csc A \equiv \frac{1}{\cos A}$

$$\equiv \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 A}}{\frac{\cos A}{\operatorname{sen} A \cos^2 A}}$$

operaciones algebraicas

$$\equiv \frac{\operatorname{sen} A \cos^2 A}{\operatorname{sen}^2 A \cos A}$$

$$\equiv \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$$

$$\equiv \cot A.$$

2. Transformar $\tan \beta \cos \beta$ a otra expresión que sólo contenga $\operatorname{sen} \beta$.

$$\tan \beta \cos \beta \equiv \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} \cdot \cos \beta$$

identidad:

$\tan \beta \equiv \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}$

$$\equiv \frac{\operatorname{sen} \beta \cos \beta}{\cos \beta}$$

$$\equiv \operatorname{sen} \beta$$

En general, no existe un procedimiento único para demostrar identidades. Algunas veces es recomendable escribir las identidades en senos y cosenos y se pide también tener muy presente las identidades fundamentales para aplicarlas en cualquier momento.

La manipulación de las identidades trigonométricas es de gran utilidad en otros cursos de matemáticas, en especial los de cálculo.

Ejemplos.

3. Comprobar: $\tan A \csc A \equiv \sec A$

$\tan A \csc A \equiv \sec A$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} \quad \frac{1}{\operatorname{sen} A} \equiv \frac{1}{\cos A}$$

por identidades:

$$\tan A \equiv \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\cos A \operatorname{sen} A} \equiv \frac{1}{\cos A} \qquad \csc A \equiv \frac{1}{\operatorname{sen} A}$$

$$\frac{1}{\cos A} \equiv \frac{1}{\cos A} \qquad \sec A \equiv \frac{1}{\cos A}$$

4. **Comprobar la identidad:**

$$\frac{\cos A}{1 + \operatorname{sen} A} + \frac{\cos A}{1 - \operatorname{sen} A} \equiv 2 \sec A$$

operaciones con fracciones

$$\frac{\cos A\,(1 - \operatorname{sen} A) + \cos A\,(1 + \operatorname{sen} A)}{(1 + \operatorname{sen} A)\,(1 - \operatorname{sen} A)} \equiv \frac{2}{\cos A}$$

$$\frac{2 \cos A}{\cos^2 A} \equiv \frac{2}{\cos A}$$

$$\frac{2}{\cos A} \equiv \frac{2}{\cos A}$$

5. **Comprobar la identidad:**

$$\operatorname{sen}^4 u - \cos^4 u \equiv 2 \operatorname{sen}^2 u - 1$$

Por factorización:

$$(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u)(\operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u) \equiv 2\operatorname{sen}^2 u - 1$$
$$(1)(\operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u) \equiv 2\operatorname{sen}^2 u - 1$$
$$\operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u \equiv 2\operatorname{sen}^2 u - 1$$
$$\operatorname{sen}^2 u - (1 - \operatorname{sen}^2 u) \equiv 2\operatorname{sen}^2 u - 1$$
$$\operatorname{sen}^2 u - 1 + \operatorname{sen}^2 u \equiv 2\operatorname{sen}^2 u - 1$$
$$2\operatorname{sen}^2 u - 1 \equiv 2\operatorname{sen}^2 u - 1$$

6. Comprobar la identidad:

$$\frac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} \equiv \sec\theta + \tan\theta$$

$$\frac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} \equiv \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} \equiv \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Multiplicamos numerador y denominador del lado izquierdo por $(1 + \operatorname{sen}\theta)$ y obtenemos:

$$\frac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} \equiv \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)}{1 - \operatorname{sen}^2\theta} \equiv \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)}{\cos^2\theta} \equiv \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \equiv \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Una aplicación de las identidades trigonométricas es en la eliminación del parámetro de *ecuaciones paramétricas*.

Definición. Sean x y y funciones en la variable t, o sea:

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

Se dice que el par de ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son ecuaciones paramétricas y t es su parámetro.

Observaciones.

a) La característica de las ecuaciones paramétricas es que ambas funciones están en la misma variable t. Si la variable t (parámetro) se elimina, se obtiene una ecuación en las variables x y y, que es llamada *ecuación cartesiana*. Si se desea construir una curva dada por sus ecuaciones paramétricas, será bastante útil eliminar el parámetro y obtener una ecuación cartesiana, que en ocasiones es más sencilla de graficar.

b) Las ecuaciones paramétricas son útiles en el estudio de la posición de una partícula, cuando dicha partícula es función del tiempo. Si la función de t es una función trigonométrica, la eliminación del parámetro se facilita mediante el uso de las identidades. No existe un solo método para resolver problemas de este tipo, por lo que a continuación presentamos algunos ejemplos y diferentes maneras de resolver cada uno.

Ejemplos.

7. Eliminar t para obtener la ecuación cartesiana, en las siguientes ecuaciones paramétricas:

$x = 5 \operatorname{sen} t$

$y = 2 \cos t.$

Despejamos sen t y cos t de ambas ecuaciones:

$$\operatorname{sen} t = \frac{x}{5}$$

$$\cos t = \frac{y}{2}$$

elevaremos al cuadrado a ambos lados de las ecuaciones:

$$\operatorname{sen}^2 t = \frac{x^2}{25}$$

$$\cos^2 t = \frac{y^2}{4}$$

y sustituyendo en la identidad:

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

tenemos:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

que es la ecuación cartesiana.

8. $x = 1 + \tan t$
$y = 1 + \sec t$

Despejamos $\tan t$ y $\sec t$:

$$\tan t = x - 1$$
$$\sec t = y - 1$$

y sustituyendo en la identidad:

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$
$$1 + (x-1)^2 = (y-1)^2$$

que es la ecuación cartesiana.

9. $x = 2 \cot t$
$y = 2 \operatorname{sen}^2 t$

$$\frac{x}{2} = \cot t \ , \ \frac{y}{2} = \operatorname{sen}^2 t$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}$$

y sustituyendo $\operatorname{sen}^2 t = y/2$, tenemos:

$$\frac{x^2}{4} = \frac{1 - \frac{x}{2}}{\frac{y}{2}}$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\frac{2-y}{2}}{\frac{y}{2}}$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{(2-y)}{y}$$

$$x^2 y = 4(2-y)$$

$$x^2 y = 8 - 4y$$

que es la ecuación cartesiana.

Ejercicios.

1. Demostrar las ocho identidades fundamentales.

2. Expresar las seis funciones trigonométricas en términos únicamente del sen θ.

3. Expresar las seis funciones trigonométricas en términos únicamente de la tan θ.

4. Expresar cada ejercicio en términos de una sola función trigonométrica.

   a) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

   b) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + \tan^2\alpha$

   c) $\dfrac{1 + \cot^2 B}{\sec^2 B}$

   d) $(\cot^2\phi + 1)\operatorname{sen}\phi$

   e) $\cos\theta + \tan\theta \operatorname{sen}\theta$

   f) $\operatorname{sen}\beta \csc\beta + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta\cot\beta}$

   g) $1 + \tan^2\theta - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\csc^2\theta - 1}$

   h) $\dfrac{\csc^2 x - 1}{\csc x \cos^2 x}$

   i) $\cot\alpha(\cos\alpha + \tan\alpha \operatorname{sen}\alpha)$

   j) $\dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 A}{1 + \tan^2 A}$

5. Comprobar las siguientes identidades para los valores permisibles del argumento dado.

a) $\dfrac{\operatorname{sen} a \sec a}{\tan a + \cot a} \equiv 1 - \cos^2 a$

b) $\operatorname{sen} \beta \cot \beta \equiv \cos \beta$

c) $\tan \alpha \csc \alpha \equiv \sec \alpha$

d) $\tan \theta + \cot \theta \equiv \sec \theta \csc \theta$

e) $\operatorname{sen}^2 u\,(1 + \cot^2 u) \equiv 1$

f) $\dfrac{\csc x}{\sec x} \equiv \dfrac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$

g) $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha - 1}{\cos \alpha} \equiv \tan \alpha - \sec \alpha$

h) $\operatorname{sen}^4 \beta - \cos^4 \beta \equiv 2 \operatorname{sen}^2 \beta - 1$

i) $\dfrac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \equiv \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta}$

j) $\dfrac{\csc u + \cot u}{\operatorname{sen} u + \tan u} \equiv \csc u \cot u$

k) $\dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \equiv 2 \csc x$

l) $(1 + \csc \theta)(1 - \operatorname{sen} \theta) \equiv \cot \theta \cos \theta$

m) $\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta} \equiv \dfrac{\tan \theta}{1 + \tan \theta}$

n) $(\sec \theta - \tan \theta)^2 \equiv \dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

ñ) $\dfrac{\cos \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta} - \tan \theta \equiv \sec \theta$

o) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 t + \cos^3 t}{\operatorname{sen} t + \cos t} \equiv 1 - \operatorname{sen} t \cos t$

p) $\dfrac{\operatorname{sen} u + \cos u}{\sec u + \tan u} - \dfrac{\operatorname{sen} u - \cos u}{\sec u - \tan u} \equiv 2 - 2 \operatorname{sen}^2 u \sec u$

$q)\ \cos^2 A\,(\tan^2 A + 1) \equiv 1$

$r)\ \dfrac{\tan B}{1 + \cot B} + \dfrac{\cot B}{1 + \tan B} \equiv \tan B + \cot B - 1$

$s)\ \dfrac{\cot\theta + \csc\theta\cos\theta}{\cot\theta} \equiv 2$

$b)\ \dfrac{\sec x - \csc x}{\sec x + \csc x} \equiv \dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$

$u)\ \dfrac{\tan A - \operatorname{sen} A}{\tan A \cdot \operatorname{sen} A} \equiv \dfrac{\tan A \operatorname{sen} A}{\tan A + \operatorname{sen} A}$

$v)\ \cot^2\alpha\cos^2\alpha \equiv \cot^2\alpha - \cos^2\alpha$

$w)\ \dfrac{(\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta)^2}{\cos^4\beta - \operatorname{sen}^4\beta} \equiv 1 - 2\operatorname{sen}^2\beta$

$x)\ \dfrac{\sec^2\alpha\ \tan^2\alpha}{\sec^4\alpha + \tan^4\alpha} \equiv \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha}$

$y)\ \tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x \equiv \operatorname{sen}^2 x \tan^2 x$

$z)\ \dfrac{\operatorname{sen} A + \cos A - 1}{\operatorname{sen} A - \cos A + 1} \equiv \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A + 1}$

$a')\ \dfrac{\cos B + \operatorname{sen} B \tan B}{\operatorname{sen} B \sec B} \equiv \csc B$

$b')\ \operatorname{sen} C + \cos C + \dfrac{\operatorname{sen} C}{\cot C} \equiv \sec C + \csc C - \dfrac{\cos C}{\tan C}$

$c')\ \dfrac{\cot A - \cot B}{1 + \cot A \cot B} \equiv \dfrac{\tan B - \tan A}{\tan B \tan A + 1}$

$d')\ 2(1 + \operatorname{sen} x)(1 + \cos x) \equiv (1 + \operatorname{sen} x + \cos x)^2$

$e')\ \dfrac{\operatorname{sen}^2 A + 2\cos A - 1}{2 + \cos A - \cos^2 A} \equiv \dfrac{1}{1 + \sec A}$

$f')\ \dfrac{\cot A + \cot B}{\tan A + \tan B} + \dfrac{1 - \cot A \cot B}{1 - \tan A \tan B} \equiv 0$

$g')\ \left(\dfrac{\sec A + \csc A}{1 + \tan A}\right)^2 \equiv \dfrac{\tan A + \cot A}{\tan A}$

h') $\dfrac{\operatorname{sen}^3 t}{\tan t - \operatorname{sen} t} \equiv \dfrac{\operatorname{sen}^2 t \cos t}{1 - \cos t}$

i') $(a \operatorname{sen} x + b \cos x)^2 + (b \operatorname{sen} x - a \cos x)^2 \equiv a^2 + b^2$

j') $\dfrac{2 \tan \alpha \sec \alpha + \sec \alpha}{3 + \tan \alpha - 2 \sec^2 \alpha} \equiv \dfrac{1}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}$

k') $\dfrac{\operatorname{sen}^6 \theta - \cos^6 \theta}{2 \operatorname{sen}^2 \theta - 1} \equiv 1 - \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta$

l') $(\operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B)^2 + (\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B)^2 \equiv 1$

m') $\operatorname{sen}^6 \alpha + \cos^6 \alpha \equiv 1 - 3 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha$

n') $\operatorname{sen}^2 A \tan^2 A + \cos^2 A \cot^2 A \equiv \tan^2 A + \cot^2 A - 1$

$\tilde{n}'$) $\dfrac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} \equiv \tan x$

o') $1 + \cot A \equiv \dfrac{(1 - \cot^2 A) \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A - \cos A}$

p') $\dfrac{\operatorname{sen} V}{\cot V + \csc V} - \dfrac{\operatorname{sen} V}{\cot V - \csc V} \equiv 2$

q') $\dfrac{\cot A}{\sec A - \tan A} - \dfrac{\cos A}{\sec A + \tan A} \equiv \csc A + \operatorname{sen} A$

r') $\dfrac{\operatorname{sen} B \cos B + \cos B \operatorname{sen} B}{\cos B \cos B - \operatorname{sen} B \operatorname{sen} B} \equiv \dfrac{\tan B + \tan B}{1 - \tan B \tan B}$

s') $\operatorname{sen}^2 C + 2 \cos^2 C + \cos^2 C \cot^2 C \equiv \csc^2 C$

t') $\dfrac{\operatorname{sen}^3 A + \cos^3 A}{\operatorname{sen}^2 A + 2 \operatorname{sen} A \cos A + \cos^2 A} \equiv \dfrac{1}{\operatorname{sen} A + \cos A} - \dfrac{\cos A}{1 + \cot A}$

6. Eliminar t en las siguientes ecuaciones paramétricas para obtener la ecuación cartesiana.

a) $x = \cos t$
$y = \operatorname{sen} t$

b) $x = 3 \cot t$
$y = 3 \cos t$

c) $x = \cos^3 t$
$y = \operatorname{sen}^3 t$

d) $x = 5 \cos t$
$y = \operatorname{sen} t$

e) $x = 1 - 2 \cot t$
$y = 3 - \csc t$

f) $x = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$
$y = \csc t.$

g) $x = \cos^2 t$
$y = h + a \cos t$

h) $x = 16 \operatorname{sen}^4 t$
$y = 16 \cos^4 t$

i) $x = \operatorname{sen} t + \cos t$
$y = \cos t - \operatorname{sen} t$

j) $x = \operatorname{sen} t - \csc t$
$y = \cos t - \sec t.$

k) $x = \cos t$

$y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \, (1 + \cos t)$

l) $x = \cos t$
$y = \cot t \, (1 + \cos t)$

m) $x = \frac{1}{2} \cot t$

$y = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 t$

Nota: Algunas identidades del problema 5 aparecen demostradas en el apéndice A.

Sección 9.4

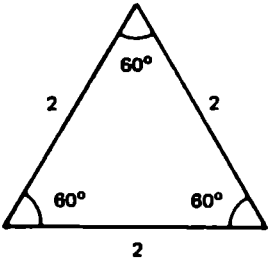
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES

Objetivos

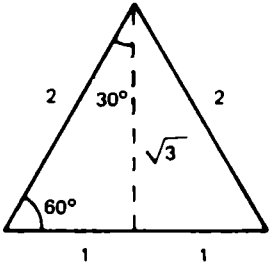
Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270° y 360° sin usar tablas.
2. Definir la relación que existe entre un ángulo de argumento negativo con el mismo ángulo de argumento positivo.

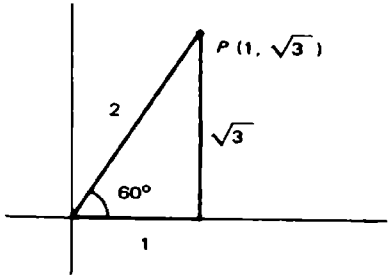
Siguiendo procedimientos geométricos, se pueden calcular los valores exactos de las funciones trigonométricas de un ángulo de 30° y 60°. Primero consideremos un triángulo cuyos lados midan 2 unidades y sus ángulos sean iguales y midan 60°

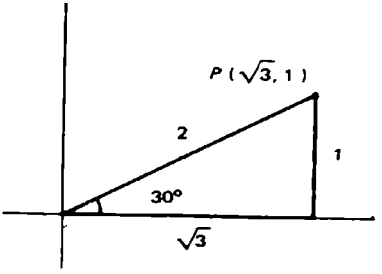


Si dividimos en dos este triángulo, obtenemos un triángulo rectángulo de las siguientes medidas:



Colocando este triángulo en un eje de coordenadas, podemos obtener las funciones de un ángulo de 30° y 60° de la siguiente manera:





$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

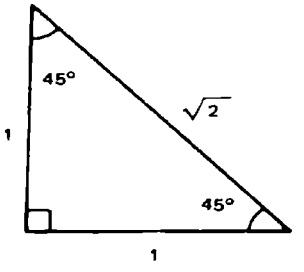
$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} \qquad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30° = \sqrt{3}$$

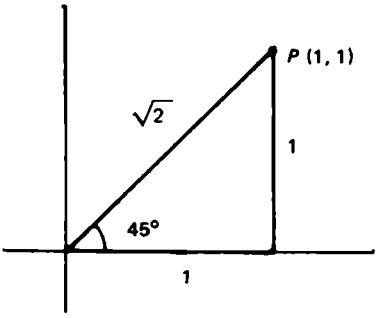
$$\sec 60° = 2 \qquad \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc 30° = 2$$

Para encontrar las funciones trigonométricas de un ángulo de 45°, consideraremos ahora un triángulo rectángulo cuyos lados iguales sean la unidad y los ángulos midan 45°.



Colocaremos también este triángulo en posición normal en un eje de coordenadas:



y las funciones serán:

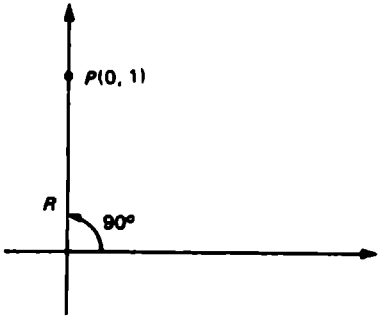
$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cot 45° = 1$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 45° = \sqrt{2}$$

$$\tan 45° = 1 \qquad \csc 45° = \sqrt{2}$$

Al considerar ángulos de 90° o múltiplos de él (0°, 90°, 180°, 270°, 360°, etc.) observamos que el lado final de dichos ángulos, coincide con uno de los ejes; por esto, al tomar un punto en el lado final, una de las coordenadas es cero.

Entonces, para las funciones de $\pi/2$ tenemos:



$x = 0$
$y = 1$
$R = 1$

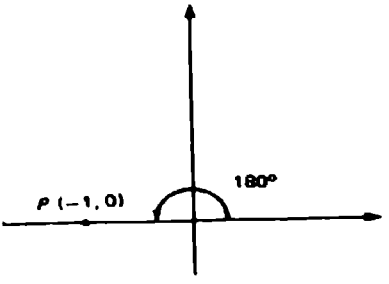
Elegimos P (0, 1) en el lado terminal del ángulo 90° (se puede escoger cualquier punto P en el lado terminal y para mayor facilidad de operaciones escogimos (0, 1)). Y las funciones son:

$$\text{sen } 90° = \frac{y}{R} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot 90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 90° = \frac{x}{R} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sec 90° = \frac{R}{x} = \frac{1}{0} \text{ (no existe)}$$

$$\tan 90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} \text{ (no existe)} \qquad \csc 90° = \frac{R}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

Para las funciones de 180° tenemos:



$x = -1$
$y = 0$
$R = 1$

$$\text{sen } 180° = \frac{0}{+1} = 0 \qquad \cot 180° = \frac{-1}{0} \text{ (no existe)}$$

$$\cos 180° = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \sec 180° = \frac{1}{-1} = -1$$

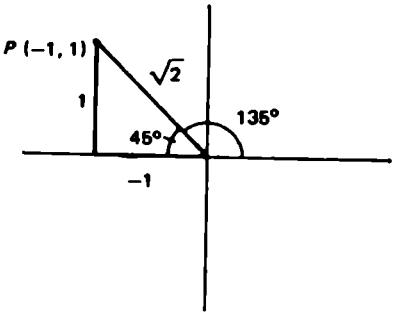
$$\tan 180° = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \csc 180° = \frac{1}{0} \text{ (no existe)}$$

Las funciones de 270°, 360° = 0° quedarán como ejercicio, el procedimiento es el mismo que los anteriores.

Las funciones trigonométricas de 30°, 60° y 45° nos pueden servir para encontrar aquellas funciones trigonométricas que sean múltiplos de ellos, excepto aquellas que coincidan con los ejes coordenados, colocando un triángulo de 30°, 60°, 90° o uno de 45°, 45°, 90° en posición normal.

Ejemplos.

1. Hallar los valores exactos de las funciones trigonométricas de 135°.



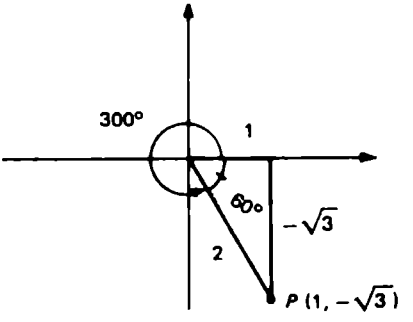
Las funciones de un ángulo de 135° serán las de uno de 45° colocado en posición normal en el segundo cuadrante con sus respectivos signos:

$\text{sen } 135° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\cot 135° = -1$

$\cos 135° = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\sec 135° = -\sqrt{2}$

$\tan 135° = -1$ $\qquad$ $\csc 135° = \sqrt{2}$

2. Hallar los valores exactos de las funciones trigonométricas de 300°.



Las funciones de un ángulo de 300° serán las de uno de 60° colocado en el cuarto cuadrante en posición normal con sus respectivos signos).

$$\operatorname{sen} 300^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad \cot 300^\circ = \frac{1}{-\sqrt{3}}$$

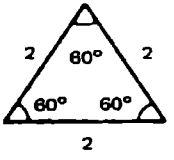
$$\cos 300^\circ = \frac{1}{2} \qquad \sec 300^\circ = 2$$

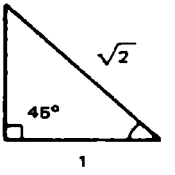
$$\tan 300^\circ = -\sqrt{3} \qquad \csc 300^\circ = \frac{2}{-\sqrt{3}}$$

Observaciones.

a) Al hablar del valor exacto de una función trigonométrica entenderemos un número entero o un número de la forma a/b donde los valores que pueden tomar a y b son enteros o raíces de números enteros.

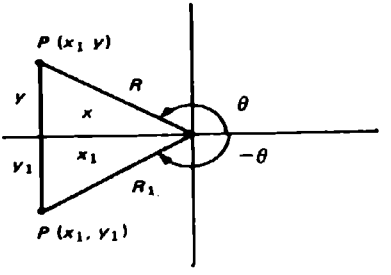
b) El objetivo principal de esta sección es que el estudiante pueda obtener los valores de las funciones trigonométricas de 30°, 60°, 45°, 90° y múltiplos de ellos *sin usar tablas*, por lo que le recomendamos tener presentes los triángulos de referencia:





para poder encontrar estos valores.

Consideremos los ángulos θ y $-\theta$ en posición normal y $P(x, y)$ un punto en el lado terminal de θ y $P_1(x_1, y_1)$, otro punto en el lado terminal de $-\theta$.



Observamos que $x = x_1$, $y = -y_1$, $R = R_1$ y las funciones para cada ángulo son:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{R} \qquad \operatorname{sen}(-\theta) = \frac{y_1}{R_1} = \frac{-y}{R}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{R} \qquad \cos(-\theta) = \frac{x_1}{R_1} = \frac{x}{R}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \tan(-\theta) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \qquad \cot(-\theta) = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x}{-y}$$

$$\sec\theta = \frac{R}{x} \qquad \sec(-\theta) = \frac{R_1}{x_1} = \frac{R}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{R}{y} \qquad \csc(-\theta) = \frac{R_1}{y_1} = \frac{R}{-y}$$

de donde obtenemos:

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\frac{y}{R} = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cot(-\theta) = -\frac{x}{y} = -\cot\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{R} = \cos\theta \qquad \sec(-\theta) = \frac{R}{x} = \sec\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\frac{y}{x} = -\tan\theta \qquad \csc(-\theta) = -\frac{R}{y} = -\csc\theta$$

Resumiendo tenemos:

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

Es conveniente observar que las únicas funciones que permanecen idénticas son el coseno y la secante.

$$\cos -60^\circ = \cos 60^\circ \qquad \sec(-220^\circ) = \sec 220^\circ$$
$$\operatorname{sen}(-90^\circ) = -\operatorname{sen} 90^\circ \qquad \cot(-45^\circ) = -\cot 45^\circ$$
$$\tan(-150^\circ) = -\tan 150^\circ \qquad \csc(-120^\circ) = -\csc 120^\circ$$

Ejercicios.

1. Calcular los valores exactos de las funciones trigonométricas de 270°, 360° y 0°.

2. Calcular los valores exactos de las funciones trigonométricas de:

a) $-\frac{2\pi}{3}$

b) $-225°$

c) $\frac{5\pi}{6}$

d) $\frac{7\pi}{6}$

e) $-240°$

f) $\frac{3\pi}{4}$

g) $\frac{7\pi}{4}$

h) $\frac{5\pi}{3}$

i) $-330°$

j) $240°$

k) $300°$

l) $-390°$

m) $570°$

n) $495°$

ñ) $-480°$

3. Hallar los valores exactos de las expresiones siguientes:

a) $\text{sen}^2\ 45°\ \cos 60°$

b) $\cos^2 \pi \tan \pi/4 \sec \pi/6$

c) $\text{sen}^2\ 30° + \cos^2\ 30°$

d) $1 + \sec^2 135° =$

e) $\csc \frac{\pi}{4}\ \text{sen}^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4}$

f) $\operatorname{sen}(15°)^2 \cos(15°)^2 + \tan(15°)^2$

Nota: ($\operatorname{sen}^2 \theta = (\operatorname{sen}\theta)^2$)

4. Expresar las siguientes funciones de ángulos negativos como una función de ángulo positivo:

a) $\operatorname{sen}(-30°) =$
b) $\cos(-120°) =$
c) $\tan(-300°) =$
d) $\cot(-135°) =$
e) $\sec(-360°) =$
f) $\csc(-0°) =$

Sección 9.5

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Utilizar una calculadora científica para obtener los valores de todas las funciones trigonométricas de cualquier ángulo.
2. Obtener el valor del ángulo de una función trigonométrica dada.

UTILIZACIÓN DE LA CALCULADORA PARA OBTENER LOS VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Utilizando una calculadora científica que contengan las teclas | SEN | | COS | y | TAN | se obtienen los valores de estas funciones, y para obtener los valores de las funciones cot, sec y csc se utilizará la tecla | 1/x | , es decir, el inverso de x ya que $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ y $\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$.

Ejemplos.

3. Use la calculadora para aproximar cada uno de los valores de las funciones trigonométricas dadas.

a) Sen 48°
Se coloca la calculadora en el modo de grados y se procede de la siguiente forma:

introducción : 48° (valor del ángulo en grados)
oprimir [sen] : 0.7431448 (valor del sen de 48°)

Es decir, sen (48°) ≈ 0.7431

b) cos 25°10′

Para utilizar la calculadora se deberá expresar el valor del ángulo en grados y minutos en forma decimal.

$$25°10' = 25° \left(\frac{10}{60}\right)^{\circ} = 25.16666°$$

Después se coloca la calculadora en el modo de grados, para luego proceder como sigue:

marcar : 25.16666
oprimir [cos] : 0.9050746.

c) tan (1.2)

Se coloca la calculadora en el modo de radianes, para proceder de la forma siguiente:

marcar : 1.2 (valor del ángulo en radianes)
oprimir [tan] : 2.5721516

Por lo que tan (1.2) ≈ 2.5726

d) cot $\pi/5$

El valor del ángulo en radianes $\pi/5$ se calculará de la siguiente manera:

oprimir [π] : 3.1415927
dividir entre 5 : 0.6283185

después se coloca la calculadora en el modo radianes.

oprimir [tan] : 0.7265425
oprimir [1/x] : 1.3763819 (ya que $\cot x = \frac{1}{\tan x}$)

Por lo tanto cot $\pi/5 \approx 1.3764$

e) Sec (1.309)

Se coloca la calculadora en el modo de radianes y se procede de la siguiente forma:

marcar : 1.309 (valor del ángulo en radianes)
oprimir [cos] : 0.258816
oprimir [1/x] : 3.8637474 $\left(\text{ya que } \sec x = \frac{1}{\cos x}\right)$

Por lo que sec (1.309) $\approx$ 3.8637

f) Csc 140°

Se coloca la calculadora en el modo de grados y se procede de la siguiente manera.

ingresar : 140
oprimir [sen] : 0.6427876
oprimir [1/x] : 1.5557238 $\left(\text{ya que } \csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

Por lo que csc (140°) $\approx$ 1.5557

INVERSA DE UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

En algunas aplicaciones se hace necesario obtener el valor del ángulo, conociendo una función trigonométrica de dicho ángulo.
Por ejemplo.

Si sen $\theta = 1$ entonces $\theta = \pi/2$ ya que sen $\pi/2 = 1$

$\cos \theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ entonces $\theta = 45°$ ya que cos $45 = 1$

$\tan \theta = \sqrt{3}$ entonces $\theta = 60°$ ya que tan $60° = \sqrt{3}$

Cada una de estas expresiones se podrán denotar como

Sen $^{-1}$ $(1) = \pi/2$ que indica que sea $(\pi/2) = \pi/2$

Cos $^{-1}$ $(1/\sqrt{2}) = 45°$ que indica que cos $45° = 1/\sqrt{2}$

tan $^{-1}$ $(\sqrt{3}) = 60°$ que indica que tan $60° = \sqrt{3}$

Utilizando la calculadora científica podemos encontrar el ángulo θ si nos dan sen θ ó cualquiera de las demás funciones trigonométricas, utilizando la tecla [sen '] , [cos '] ó [tan ']

Observaciones.

1. Las funciones trigonométricas se denotan también por arc sen ó sen $^{-1}$, arc cos ó cos $^{-1}$, etc.
2. En la sección 11.5 de este texto se verá con más detalle el concepto de función inversa.

Ejemplo 4.

Use la calculadora para obtener el ángulo agudo en grados y radianes para la función trigonométrica dada.

a) $\cos \theta = 1/2$.
En el modo de grados

ingresar : 1/2
oprimir [cos] : 60°

Por lo que $\theta = 60°$ ya que $\cos 60° = 1/2$.
En el modo de radianes

ingresar : 1/2
oprimir [$\cos^{-1}$] : 1.0471976

Por lo que $\theta = 1.0471976 \approx \pi/3$, ya que $\cos (1.0471976) = 1/2$

b) $\operatorname{sen} \theta = -1/2$
En el modo de grados

introducir : $-1/2$
oprimir [sen^{-1}] : $-30°$

Por lo que $\theta = -30°$, ya que $\operatorname{sen} (-30°) = -1/2$
En el modo de radianes

ingresan: $-1/2$

oprimir [sen^{-1}] : -0.5235987

Por lo que $\theta \approx -0.5236$, ya que $\operatorname{sen} (-0.5236) = -1/2$

c) $\cot \theta = 2.747$

$$\text{como } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\text{entonces } 2.747 = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\text{ó } \tan \theta = \frac{1}{2.747}$$

$$\tan \theta = 0.3640334$$

En el modo de grados

introducir: 0.3640334
oprimir $\boxed{\tan^{-1}}$: 20.0032

Es decir $\theta \approx (20.0032)^\circ$, ya que $\cot (20.0032)^\circ = 2.747$
En el modo de radianes

introducir: 0.3640334
oprimir $\boxed{\tan^{-1}}$: 0.3491216

Por lo que $\theta \approx 0.3491216$, ya que $\cot (0.3491216) = 2.747$

Ejercicio.

En los problemas 1 al 21 utiliza una calculadora para obtener los valores de las funciones trigonométricas dadas.

1.	sen 40°	2. cos 75°	3. tan $3\pi/5$
4.	cot 125°	5. sec 170°	6. csc 250°
7.	sen $\pi/10$	8. csc 335°	9. tan 300°
10.	sen $12^\circ 40'$	11. cos $49^\circ 15'$	12. tan $95^\circ 20'$
13.	cot $(-95^\circ 20')$	14. sen $157^\circ 30'$	15. cos $192^\circ 50'$
16.	tan $3\pi/7$	17. cot $5\pi/6$	18. sec $2\pi/9$
19.	sen (0.58)	20. cos (2.01)	21. tan (1.03)

En los problemas 22 al 30 utiliza una calculadora para obtener los valores aproximados de las seis funciones trigonométricas.

22.	25°	23. 160°	24. 200°
25.	$305^\circ 10'$	26. $3\pi/7$	27. $\pi/9$
28.	0.5831	29. 1.23	30. $-\pi/2$

En los problemas 31 al 40 utiliza una calculadora para aproximar el ángulo agudo θ, medido en: (*a*) radianes (*b*) grados.

31.	sen $\theta = 0.4950$	32. cos $\theta = 0.771$
33.	tan $\theta = 3.867$	34. sen $\theta = 0.9710$
35.	cot $\theta = 0.2617$	36. cot $\theta = 0.1228$
37.	tan $\theta = 1.036$	38. cos $\theta = 0.0175$
39.	sec $\theta = 7.185$	40. csc $\theta = 171.9$

En los problemas 41 al 46 utiliza las identidades trigonométricas para obtener los valores de las funciones trigonométricas que faltan.

41. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{\sqrt{18}}$, $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{18}}$

42. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{6}{\sqrt{85}}$, $\tan\theta = \dfrac{6}{7}$

43. $\cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{61}}$, $\cot\theta = \dfrac{5}{6}$

44. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$, $\cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$

45. $\csc\theta = \dfrac{10}{8}$, $\sec\theta = \dfrac{10}{6}$

46. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{\sqrt{58}}$, $\cot\theta = \dfrac{7}{3}$

Sección 9.6

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Enunciar y demostrar las identidades trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos, doble y ángulo mitad.
2. Transformar la función trigonométrica de suma y resta de ángulos a productos de funciones y viceversa.
3. Verificar identidades trigonométricas donde aparezcan funciones de ángulos compuestos.

En esta unidad veremos otros tipos de identidad de funciones trigonométricas de argumentos compuestos. Estas identidades son de gran valor en otras ramas de las matemáticas sobre todo en cálculo. Se recomienda tratar de memorizarlas lo mejor posible. Para un mejor estudio, dividiremos estas identidades en cuatro grupos.

Funciones trigonométricas cuyo argumento es la suma o diferencia de dos ángulos

Teorema 1.

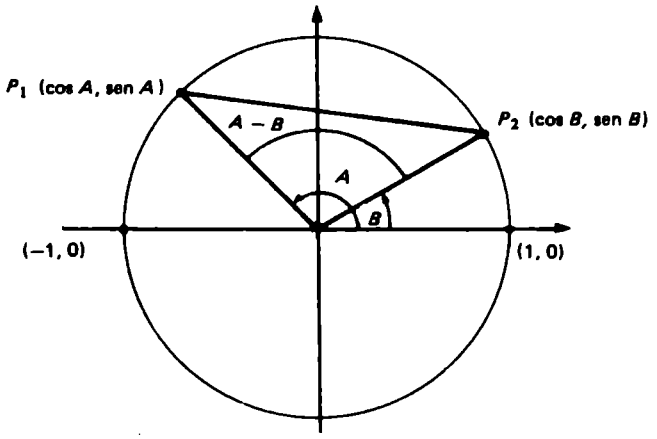
Para todo A y $B \in R$ (A y B son dos ángulos cualesquiera):

a) $\cos(A - B) \equiv \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

b) $\cos(A + B) \equiv \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$.

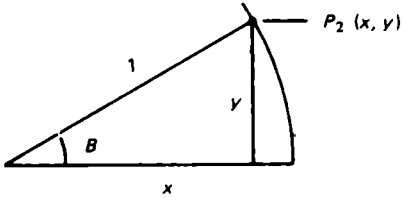
Demostración de a)

Consideremos un círculo unitario y sean A y B dos ángulos cualesquiera en posición normal.



En el lado terminal de B, P_2 es un punto cuyas coordenadas son P_2 (cos B, sen B) y P_1 un punto en el lado terminal de A, cuyas coordenadas son P_1 (cos A, sen A).

Para ver cómo se obtuvieron estas coordenadas, consideremos el P_2 con coordenadas P_2 (x, y), y recordemos que el círculo es unitario, entonces:



y $\operatorname{sen} B = \frac{y}{1}$ $\qquad$ $\cos B = \frac{x}{1}$

$\operatorname{sen} B = y$ $\qquad$ $\cos B = x$

y sustituyendo estos valores de x, y en las coordenadas de P_2 tenemos:

$$P_2\ (x, y) = P_2\ (\cos B, \operatorname{sen} B).$$

Para las coordenadas del punto P_1 se hará exactamente lo mismo. La distancia entre los puntos P_1 y P_2 es:

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(\cos B - \cos A)^2 + (\text{sen } B - \text{sen } A)^2}$$

$$\text{o } (|\overline{P_1 P_2}|)^2 = (\cos B - \cos A)^2 + (\text{sen } B - \text{sen } A)^2$$

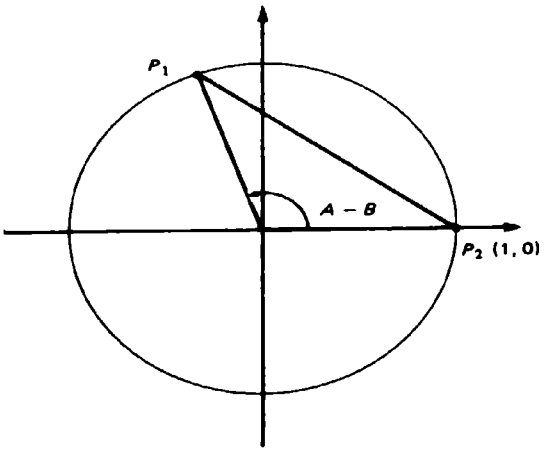
y desarrollando el lado derecho de esta ecuación obtenemos:

$$|\overline{P_1 P_2}|^2 = 2 - 2 \cos B \cos A - 2 \text{ sen } B \text{ sen } A \qquad (1)$$

Supongamos ahora que el círculo gira en el sentido de las manecillas del reloj hasta que el punto P_2 coincida con el punto (1, 0). El ángulo $(A - B)$ estará ahora en posición normal y las nuevas coordenadas del punto P_1 son:

$$P_1 \ [\cos(A - B), \text{sen } (A - B)]$$

o sea,



La distancia entre los puntos P_1 y P_2 será exactamente la que mantenían antes de efectuar el giro, con la diferencia que ahora tenemos nuevas coordenadas para los puntos:

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{[1 - \cos(A - B)]^2 + [0 - \text{sen } (A - B)]^2}$$

o $(\overline{P_2 P_2})^2 = [1 - \cos(A - B)]^2 + [0 - \operatorname{sen}(A - B)]^2$.

Desarrollando y simplificando obtenemos:

$$(\overline{P_1 P_2})^2 = 2 - 2\cos(A - B) \tag{2}$$

y así de 1 y 2 tenemos:

$2 - 2\cos(A - B) \equiv 2 - 2\cos B \cos A - 2\operatorname{sen} B \operatorname{sen} A$, que simplificada es:

$$\cos(A - B) \equiv \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

que es lo que se quería demostrar.

Demostración de b).

$$\cos(A + B) = \cos[A - (-B)]$$

y por identidad anterior:

$$\cos(A + B) \equiv \cos A \cos(-B) + \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(-B)$$

por funciones de argumento negativo

$$\cos(-B) = \cos B$$

y $\operatorname{sen}(-B) = -\operatorname{sen} B$.

Entonces:

$$\cos(A + B) \equiv \cos A \cos B + \operatorname{sen} A (-\operatorname{sen} B)$$

$$\cos(A + B) \equiv \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

Ejemplos.

1. Calcular $\cos \frac{7\pi}{12}$ a partir de las funciones $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{4}$:

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

2. Calcular el valor exacto de cos 15° a partir de los valores exactos de las funciones de 45° y 30°.

$$\cos 15° = \cos (45° - 30°)$$
$$= \cos 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30°$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

3. Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{12}{13}$ donde α está en el primer cuadrante y $\cos \beta = \frac{4}{5}$ donde β está en el primer cuadrante. ¿En qué cuadrante se encuentra el ángulo $(\alpha + \beta)$?

Como α y β están en el primer cuadrante, entonces $\alpha + \beta$ está en el primero o segundo cuadrante y como el coseno es positivo en el primero y negativo en el segundo, bastará determinar $\cos (\alpha + \beta)$.

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha$$
$$= \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13}$$
$$= \frac{20}{65} - \frac{36}{65}$$
$$= \frac{-16}{65}$$

$(\alpha + \beta)$ se encuentra en el segundo cuadrante.

Teorema 2. Identidades del seno de la suma y diferencia de dos ángulos.

$$\cos (90° - M) \equiv \operatorname{sen} M$$
$$\operatorname{sen} (90° - N) \equiv \cos N$$

Demostración.

Por las identidades anteriores del coseno tenemos:

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - M) &\equiv \cos 90^\circ \cos M + \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{sen} M \\ &\equiv (0)\cos M + (1)\operatorname{sen} M \\ &\equiv 0 + \operatorname{sen} M\end{aligned}$$

así

$$\cos(90^\circ - M) \equiv \operatorname{sen} M \tag{1}$$

Si en 1 sustituimos M por $(90^\circ - N)$ tenemos:

$$\begin{aligned}\cos[\,90^\circ - (90^\circ - N)\,] &\equiv \operatorname{sen}(90^\circ - N) \\ \cos[\,90^\circ - 90^\circ + N\,] &\equiv \operatorname{sen}(90^\circ - N) \\ \cos N &\equiv \operatorname{sen}(90^\circ - N)\end{aligned}$$

o

$$\operatorname{sen}(90^\circ - N) \equiv \cos N \tag{2}$$

Si en 1 sustituimos M por $A + B$ tenemos:

$$\cos[\,90^\circ - (A + B)\,] \equiv \operatorname{sen}(A + B)$$

$$\cos[\,(90^\circ - A) - B\,] \equiv \operatorname{sen}(A + B)$$

$$\cos(90^\circ - A)\cos B + \operatorname{sen}(90^\circ - A)\operatorname{sen} B \equiv \operatorname{sen}(A + B) \tag{3}$$

por 1 y 2 $\quad \cos(90^\circ - A) \equiv \operatorname{sen} A$

$$\operatorname{sen}(90^\circ - A) \equiv \cos A$$

y sustituyendo en 3 tenemos:

$$\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B \equiv \operatorname{sen}(A + B)$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(A + B) \equiv \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A}$$

Teorema 3. Identidad del seno de la diferencia de dos ángulos.

Si tomamos en cuenta que $A - B = A + (-B)$
y, por la identidad de sen $(A + B)$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A - B) &\equiv \operatorname{sen}[\,A + (-B)\,] \\ &\equiv \operatorname{sen} A \cos(-B) + \operatorname{sen}(-B)\cos A\end{aligned}$$

$$\equiv \text{sen } A \cos B + (-\text{sen } B) \cos A$$
$$\equiv \text{sen } A \cos B - \text{sen } B \cos A$$

$$\text{sen } (A - B) \equiv \text{sen } A \cos B - \text{sen } B \cos A$$

Ejemplo.

4. Calcular sen 75° a partir de los valores exactos de 45° y 30°.

$$\text{sen } 75° \equiv \text{sen } (45° + 30°)$$
$$\equiv \text{sen } 45° \cos 30° + \text{sen } 30° \cos 45°$$
$$\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\equiv \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$\equiv \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

5. Hallar el valor de sen $(A - B)$ si sen $A = \frac{3}{5}$ y cos $B = \frac{5}{13}$, donde A y B están en el primer cuadrante.

$$\text{sen } (A - B) \equiv \text{sen } A \cos B - \text{sen } B \cos A$$
$$\equiv \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13}$$
$$\equiv \frac{15}{65} - \frac{48}{65}$$
$$\equiv -\frac{33}{65}$$

Teorema 4. Identidades para la tangente.

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

Entonces, para $A + B$ tendremos:

$$\tan (A + B) \equiv \frac{\operatorname{sen} (A + B)}{\cos (A + B)}$$

$$\equiv \frac{\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}$$

Dividiendo numerador y denominador entre $\cos A \cos B$, obtenemos:

$$\equiv \frac{\dfrac{\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B}}$$

$$\equiv \frac{\dfrac{\operatorname{sen} A \cos B}{\cos A \cos B} + \dfrac{\cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \dfrac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B}}$$

$$\equiv \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\boxed{\tan (A + B) \equiv \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}}$$

Y para $\tan (A - B)$ tenemos:

$$\tan (A - B) \equiv \tan [A + (-B)]$$

$$\equiv \frac{\tan A + \tan (-B)}{1 - \tan A \tan (-B)}$$

pero $\tan (-B) = -\tan B$, de donde

$$\boxed{\tan (A - B) \equiv \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}}$$

Observación. Es común emplear las siguientes identidades erróneas:

$$\operatorname{sen} (A \pm B) \equiv \operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B$$

$$\cos(A \pm B) \equiv \cos A \pm \cos B$$
$$\tan(A \pm B) \equiv \tan A \pm \tan B$$

pero hay que tomar en cuenta que cualquier función cuyo ángulo es una suma o resta de ángulos no es igual a la suma o resta de las funciones de esos ángulos.

Funciones trigonométricas de argumento doble

A partir de las identidades de cos $(A+B)$, sen $(A+B)$ o tan $(A+B)$ podemos obtener las de ángulos doble o argumentos doble, tomando $B = A$:

$$\begin{aligned}\text{Para sen } 2A &\equiv \text{sen}(A+A)\\ &\equiv \text{sen } A \cos A + \cos A \text{ sen } A\\ &\equiv 2 \text{ sen } A \cos A\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{sen } 2A \equiv 2 \text{ sen } A \cos A}$$

También para cos $2A$ tendremos:

$$\begin{aligned}\cos 2A &\equiv \cos(A+A)\\ &\equiv \cos A \cos A - \text{sen } A \text{ sen } A\\ &\equiv \cos^2 A - \text{sen}^2 A\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos 2A \equiv \cos^2 A - \text{sen}^2 A}$$

ya que $\cos^2 A \equiv 1 - \text{sen}^2 A$ por las identidades fundamentales, la identidad $\cos 2A \equiv \cos^2 A - \text{sen}^2 A$ quedaría:

$$\begin{aligned}\cos 2A &\equiv \cos^2 A - \text{sen}^2 A\\ &\equiv (1 - \text{sen}^2 A) - \text{sen}^2 A\\ &\equiv 1 - \text{sen}^2 A - \text{sen}^2 A\\ &\equiv 1 - 2\,\text{sen}^2 A\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos 2A \equiv 1 - 2\,\text{sen}^2 A}$$

también $\operatorname{sen}^2 A \equiv 1 - \cos^2 A$

en la misma identidad tendríamos:

$$\begin{aligned} \cos 2A &\equiv \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A \\ &\equiv \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) \\ &\equiv \cos^2 A - 1 + \cos^2 A \\ &\equiv 2\cos^2 A - 1 \end{aligned}$$

$$\cos 2A \equiv 2\cos^2 A - 1$$

Observación. Hemos obtenido tres identidades para $\cos 2A$, o sea:

$$\cos 2A \equiv \begin{cases} \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A \\ 2\cos^2 A - 1 \\ 1 - 2\operatorname{sen}^2 A \end{cases}$$

que se podrán utilizar indistintamente.

$$\begin{aligned} \tan 2A &\equiv \tan (A + A) \\ &\equiv \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A} \\ &\equiv \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \end{aligned}$$

$$\tan 2A \equiv \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Observación. En cada una de las identidades de sen $2A$, cos $2A$ y tan $2A$, el argumento o ángulo del primer miembro es el doble del argumento del segundo miembro. Por ello, a estas identidades se les conoce como identidades de argumento doble.

Ejemplo.

6. Calcular (sen 22.5°) (cos 22.5°).

Como sen $2A \equiv 2$ sen A cos A, despejamos sen A cos A y obtenemos:

$$\text{sen } A \cos A \equiv (1/2)(\text{sen } 2A)$$

$$\text{sen } 22.5^\circ \cos 22.5^\circ \equiv (1/2) \text{ sen } 2(22.5^\circ)$$

$$\equiv (1/2)(\text{sen } 45^\circ)$$

$$\equiv (1/2) \frac{1}{\sqrt{2}} \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{sen } 22.5^\circ \cos 22.5^\circ \equiv \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Funciones trigonométricas de argumento mitad

De las identidades de cos 2θ podemos obtener las de un ángulo mitad. Despejando sen θ de cos $2\theta \equiv 1 - 2 \text{ sen}^2 \theta$ se obtiene:

$$\text{sen } \theta \equiv \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$

si hacemos $\theta = A/2$ tenemos,

$$\text{sen } \frac{A}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\left(\frac{A}{2}\right)}{2}}$$

$$\text{sen } \frac{A}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

De la misma forma, despejamos cos θ en la identidad cos $2\theta \equiv 2 \cos^2 \theta - 1$.

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

y sustituyendo θ por $\frac{A}{2}$ tenemos:

$$\cos \frac{A}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\left(\frac{A}{2}\right)}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

Para la $\tan \frac{A}{2}$, utilizando la identidad fundamental: $\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$ y las identidades de ángulo mitad del seno y coseno.

$$\tan \frac{A}{2} \equiv \frac{\operatorname{sen} \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$\equiv \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}}$$

$$\equiv \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

$$\equiv \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos A)(1 - \cos A)}{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}} \qquad (1)$$

$$\equiv \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos A)^2}{1 - \cos^2 A}}$$

$$\equiv \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos A)^2}{\operatorname{sen}^2 A}}$$

$$\equiv \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A}\right)^2}$$

$$\boxed{\tan \frac{A}{2} \equiv \pm \frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A}}$$

Si en 1 multiplicamos por $(1 + \cos A)$ en lugar de $(1 - \cos A)$ obtendríamos la identidad:

$$\boxed{\tan \frac{A}{2} \equiv \pm \frac{\operatorname{sen} A}{1 + \cos A}}$$

Observación. Para $\tan \frac{A}{2}$ hemos encontrado dos identidades diferentes que también se usarán indistintamente, o sea,

$$\tan \frac{A}{2} \begin{cases} \\ \pm \\ \\ \end{cases} \begin{matrix} \dfrac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A} \\ \\ \dfrac{\operatorname{sen} A}{1 + \cos A} \end{matrix}$$

Identidades de sumas y productos

Si sumamos las identidades:

$$\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B \equiv \operatorname{sen} (A + B) \quad (1)$$
$$\operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B \equiv \operatorname{sen} (A - B) \quad (2)$$

obtendremos la identidad siguiente:

$$2 \operatorname{sen} A \cos B \equiv \operatorname{sen} (A + B) + \operatorname{sen} (A - B)$$

Esta identidad nos permite convertir cualquier producto del seno de un ángulo por el coseno de otro ángulo diferente en la suma de los senos cuyos ángulos son la suma o la diferencia de esos ángulos diferentes. Si en lugar de sumar las 1 y 2, las restáramos, obtendríamos:

$$2 \cos A \operatorname{sen} B \equiv \operatorname{sen} (A + B) - \operatorname{sen} (A - B)$$

La suma y resta de los miembros correspondientes de las identidades:

$$\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \equiv \cos (A + B)$$
$$\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \equiv \cos (A - B)$$

nos conduce a las identidades:

$$2 \cos A \cos B \equiv \cos (A + B) + \cos (A - B)$$
$$-2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \equiv \cos (A + B) - \cos (A - B)$$

Por último, tendremos las identidades para la suma de dos funciones que se pueden obtener a partir de las anteriores haciendo:

$$A + B = \alpha$$
$$A - B = \beta$$

Resolviendo para A y B obtenemos:

$$A = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad B = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

y sustituyendo en las cuatro identidades anteriores, tenemos:

$$2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \equiv \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta$$

$$2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \equiv \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta$$

$$2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \equiv \cos \alpha + \cos \beta$$

$$-2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \equiv \cos \alpha - \cos \beta$$

Ejemplo.

7. Comprobar: $\operatorname{sen} 3x \cos 2x \equiv \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x)$

en la identidad: $2 \operatorname{sen} A \cos B \equiv \operatorname{sen} (A + B) + \operatorname{sen} (A - B)$

Sustituimos $A = 3x$, $B = 2x$ y obtenemos:

$$2 \operatorname{sen} 3x \cos 2x \equiv \operatorname{sen} (3x + 2x) + \operatorname{sen} (3x - 2x)$$
$$2 \operatorname{sen} 3x \cos 2x \equiv \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x$$

y despejando,

$$\operatorname{sen} 3x \cos 2x \equiv \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x)$$

Resumen de identidades

1. *Identidades fundamentales*

$$\operatorname{sen} u \csc u \equiv 1$$

$$\cos u \sec u \equiv 1$$

$$\tan u \cot u \equiv 1$$

$$\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u \equiv 1$$

$$1 + \tan^2 u \equiv \sec^2 u$$

$$1 + \cot^2 u \equiv \csc^2 u$$

$$\tan u \equiv \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$$

$$\cot u \equiv \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

2. *Identidades de suma y diferencia de ángulos.*

$$\operatorname{sen}(A + B) \equiv \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{sen}(A - B) \equiv \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B$$

$$\cos(A + B) \equiv \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\cos(A - B) \equiv \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\tan(A + B) \equiv \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A - B) \equiv \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

3. *Identidades de argumento doble.*

$$\operatorname{sen} 2A \equiv 2 \operatorname{sen} A \cos A$$

$$\cos 2A \equiv \begin{cases} \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A \\ 2\cos^2 A - 1 \\ 1 - 2\operatorname{sen}^2 A \end{cases}$$

$$\tan 2A \equiv \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

4. *Identidades de argumento mitad.*

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\tan \frac{A}{2} \equiv \pm \begin{cases} \dfrac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A} \\ \\ \dfrac{\operatorname{sen} A}{1 + \cos A} \end{cases}$$

5. *Identidades de sumas y productos de funciones.*

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} A \cos B &\equiv \operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B) \\ 2 \cos A \operatorname{sen} B &\equiv \operatorname{sen}(A + B) - \operatorname{sen}(A - B) \\ 2 \cos A \cos B &\equiv \cos(A + B) + \cos(A - B) \\ -2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B &\equiv \cos(A + B) - \cos(A - B) \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B \equiv 2 \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B \equiv 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B \equiv 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A - \cos B \equiv -2 \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Ejercicios.

1. Utilizando el valor exacto de las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60° y de sus múltiplos enteros, calcular el valor exacto del seno, coseno y tangente de los ángulos siguientes:

   a) 75°
   b) 90°
   c) 15°
   d) 225°
   e) 345°
   f) 195°
   g) 22.5°
   h) 112.5°
   i) 157.5°
   j) 120°
   k) 292.5°

2. Demostrar, utilizando las identidades de ángulos compuestos, que las siguientes son verdaderas para cualquier ángulo A.

a) $\cos(90° + A) \equiv -\text{sen } A$
b) $\cos(180° - A) \equiv -\cos A$
c) $\text{sen}(90° + A) \equiv \cos A$
d) $\text{sen}(180° + A) \equiv -\text{sen } A$
e) $\tan(90° + A) \equiv -\cot A$
f) $\tan(180° - A) \equiv -\tan A$
g) $\cos(270° - A) \equiv -\text{sen } A$
h) $\cos(360° - A) \equiv \cos A$
i) $\text{sen}(270° - A) \equiv -\cos A$
j) $\text{sen}(360° - A) \equiv -\text{sen } A$
k) $\tan(270° - A) \equiv \cot A$
l) $\tan(360° - A) \equiv -\tan A$

3. Si A es un ángulo del primer cuadrante, tal que $\text{sen } A = \frac{4}{5}$ y B es un ángulo del segundo cuadrante, donde $\cos B = -\frac{12}{13}$, calcular:

a) $\text{sen}(A + B)$
b) $\text{sen}(A - B)$
c) $\cos(A + B)$
d) $\cos(A - B)$
e) $\tan(A + B)$
f) $\tan(A - B)$
g) $\text{sen } 2A$
h) $\cos 2B$
i) $\tan 2A$
j) $\tan A/2$
k) $\text{sen } B/2$
l) $\cos B/2$

4. Reducir cada una de las expresiones siguientes a una sola función trigonométrica.

a) $\text{sen } 2A \cos 3A + \cos 3A \text{ sen } 2A$
b) $\text{sen } 553° \cos 508° - \text{sen } 508° \cos 553°$

c) $\operatorname{sen}(A + B)\cos B - \cos(A + B)\operatorname{sen} B$

d) $\cos 2A \cos A + \operatorname{sen} 2A \operatorname{sen} A$

e) $\cos 257^\circ \cos 273^\circ - \operatorname{sen} 257^\circ \operatorname{sen} 273^\circ$

f) $\cos(A + B)\cos B + \operatorname{sen}(A + B)\operatorname{sen} B$

g) $\dfrac{\tan 2A - \tan A}{1 + \tan 2A \tan A}$

h) $\dfrac{\tan 47^\circ + \tan 13^\circ}{1 - \tan 13^\circ \tan 47^\circ}$

i) $\dfrac{\tan(A + B) - \tan B}{1 + \tan(A + B)\tan B}$

j) $2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x$

k) $\cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x$

l) $2\cos^2\left(\dfrac{3A}{2}\right) - 1$

m) $\operatorname{sen} 5A \cos 5A$

n) $\dfrac{2\tan(1/4)A}{1 - \tan^2(1/4)A}$, $\dfrac{\tan 2A}{1 - \tan^2 2A}$

ñ) $\cos^4 A - \operatorname{sen}^4 A$

o) $2 \operatorname{sen} \dfrac{A + B}{2} \cos \dfrac{A - B}{2}$

p) $\dfrac{1 - \cos 3A}{\operatorname{sen} 3A}$, $\dfrac{\operatorname{sen} 5B}{1 + \cos 5B}$

q) $\sqrt{\dfrac{1 + \cos 6B}{2}}$, $\sqrt{\dfrac{4 - 4\cos 4A}{2}}$

r) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 10A}{1 + \cos 10A}}$

Verificar las siguientes identidades:

a) $\operatorname{sen}(A - B)\operatorname{sen}(A + B) \equiv \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B$

b) $\tan A - \tan B \equiv \dfrac{\operatorname{sen}(A-B)}{\cos A \cos B}$

c) $\dfrac{2\tan A}{2\tan 2A} \equiv \dfrac{1-\tan^2 A}{2}$

d) $2\cos A - \operatorname{sen} 2A \csc A \equiv 0$

e) $\operatorname{sen} 2x \sec x + \cos 2x \csc x \equiv \csc x$

f) $\dfrac{\cos 5A \cos 3A + \operatorname{sen} 5A \operatorname{sen} 3A}{\operatorname{sen} 3A - \operatorname{sen} A} \equiv \dfrac{\csc A}{2}$

g) $\operatorname{sen} B \cos^3 B - \cos B \operatorname{sen}^3 B \equiv \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4B$

h) $2\cos\alpha - 2\cos^3\alpha \equiv \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} 2\alpha$

i) $\dfrac{\operatorname{sen}\beta + \cos 2\beta - 1}{\cos\beta - \operatorname{sen} 2\beta} \equiv \tan\beta$

j) $1 - \operatorname{sen}\phi \equiv (\cos\dfrac{\phi}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{\phi}{2})^2$

k) $\tan 3\theta \equiv \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

l) $\dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} \equiv \sec\alpha$

m) $\dfrac{\operatorname{sen} 3A}{\cos A} + \dfrac{\cos 3A}{\operatorname{sen} A} \equiv 2\cot 2A$

n) $\cos(A+B)\cos(A-B) \equiv \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 B$

ñ) $\dfrac{\tan 2C}{\tan C} \equiv \dfrac{2\cot^2 C}{\cot^2 C - 1}$

o) $\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A} \equiv \operatorname{sen} 2A$

p) $\dfrac{\tan A/2 + \cot A/2}{\cot A/2 - \tan A/2} \equiv \sec A$

q) $\sec^6 B - \tan^6 B \equiv 1 + 3\tan^2 B \sec^2 B$

r) $\dfrac{\operatorname{sen} 4\alpha \cos 2\alpha - \cos 4\alpha \operatorname{sen} 2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} \equiv \tan 2\alpha$

s) $\dfrac{\operatorname{sen} 2\beta \cos\beta}{(1+\cos 2\beta)(1+\cos\beta)} \equiv \tan\dfrac{\beta}{2}$

6. Expresar las siguientes sumas como productos:

a) $\operatorname{sen} \pi/2 + \cos \pi/4$

b) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$

c) $\cos 2A + \cos A$

d) $\cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$

e) $\operatorname{sen} 3A - \cos 2A$

f) $\cos \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x$

7. Utilizando las identidades de sumas y productos, verificar lo siguiente:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} 5\theta - \operatorname{sen} 3\theta}{\cos 5\theta + \cos 3\theta} \equiv \tan \theta$

b) $\dfrac{1 + \operatorname{sen} A - \cos A}{1 + \operatorname{sen} A + \cos A} \equiv \tan \frac{A}{2}$

c) $\dfrac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\cos A - \cos B} \equiv -\cot \frac{1}{2}(A - B)$

d) $\operatorname{sen} 3\theta - \operatorname{sen} \theta \equiv 2 \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta$

e) $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta} \equiv \dfrac{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$

f) $\dfrac{\cos 2A + \cos 7A}{\cos 3A + \cos 6A} + \dfrac{\cos 6A - \cos A}{\cos 5A - \cos 2A} \equiv \dfrac{2 \operatorname{sen} 4A}{\operatorname{sen} 3A}$

g) $\dfrac{\operatorname{sen} (\alpha + 3\beta) + \operatorname{sen} (3\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta} \equiv 2 \cos (\alpha + \beta)$

h) $\dfrac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\cos A + \cos B} \equiv \tan \dfrac{A - B}{2}$

i) $\dfrac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} 3A + \operatorname{sen} 5A}{\cos A + \cos 3A + \cos 3A} \equiv \tan 3A$

$j)$ $\dfrac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 3A}{\cos A + \cos 2A + \cos 3A} \equiv \tan 2A$

$k)$ $\dfrac{\cos 6A + \cos 12A}{\operatorname{sen} 14A - \operatorname{sen} 4A} + \dfrac{\operatorname{sen} 7A - \operatorname{sen} A}{\cos 9A + \cos A} \equiv \dfrac{2 \cos 2A}{\operatorname{sen} 10A}$

$l)$ $\operatorname{sen}^2 3B - \operatorname{sen}^2 B \equiv 2 \operatorname{sen}^2 2B \cos^2 B$

$m)$ $\cos 2A + \cos 4A + \cos 6A \equiv 4 \cos A \cos 2A \cos 3A - 1$

Nota: Algunas identidades del problema 5 aparecen demostradas en el apéndice A.

Sección 9.7

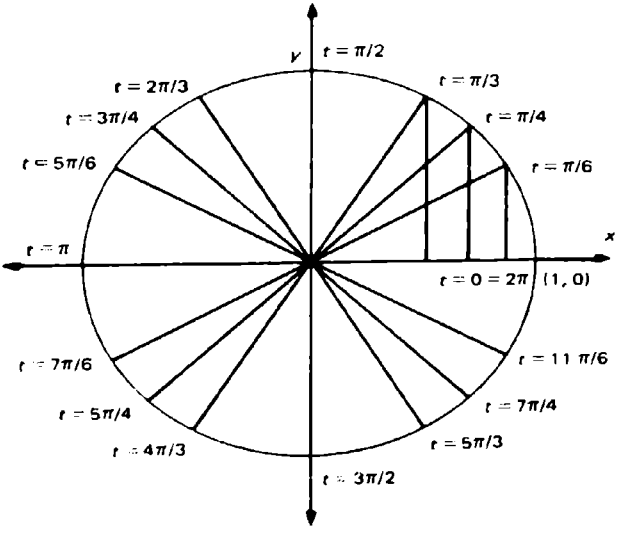
GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Objetivos

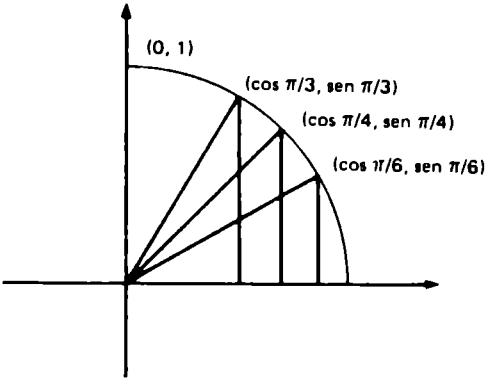
Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Graficar las seis funciones trigonométricas y describir su dominio e imagen en cada caso.
2. Graficar funciones trigonométricas de la forma: k sen $(ax \pm \theta)$, k cos $(ax \pm \theta)$, k tan $(ax \pm \theta)$, donde k y a son constantes.

Consideremos un círculo unitario donde t representa la longitud del arco:



Recordando que las coordenadas de cualquier punto en el círculo unitario son (cos t, sen t), observamos lo siguiente:



A medida que aumentamos el ángulo, nos damos cuenta que la longitud vertical (ordenada del punto), que es el seno del ángulo va aumentando, esto es:

$$\text{sen } 0 < \text{sen } \pi/6 < \text{sen } \pi/4 < \text{sen } \pi/3 < \text{sen } \pi/2$$

o $\quad 0 < 1/2 < 1/\sqrt{2} < \sqrt{3}/2 < 1$

Un análisis completo para estas funciones nos conducen a la siguiente tabla:

cuando t toma los valores de	*cos t*	*sen t*
0 a $\pi/2$	disminuye de 1 a 0	aumenta de 0 a 1
$\pi/2$ a π	disminuye de 0 a −1	disminuye de 1 a 0
π a $3\pi/2$	aumenta de −1 a 0	disminuye de 0 a −1
$3\pi/2$ a 2π	aumenta de 0 a 1	aumenta de −1 a 0

Para los valores de t mayores que 2π o menores que 0, los valores del sen t y cos t se repiten, ya que es inmediato verificar las siguientes identidades:

$$\text{sen}\,(t \pm n\,2\pi) \equiv \text{sen}\,t$$

y

$$\cos(t \pm n\,2\pi) \equiv \cos t$$

donde n es un entero positivo.

Definición. Si f es una función tal que $f(x + a) = f(x)$ para toda x en el dominio de f, entonces f es llamada una función periódica de periodo a.

Las funciones sen y cos son periódicas con periodo 2π. La variación y periodicidad de estas dos funciones se pueden ver en sus gráficas.

La función sen x

La gráfica del conjunto

$$\{\ (x, y) \mid y = \text{sen}\,x\ \}$$

es una curva continua.

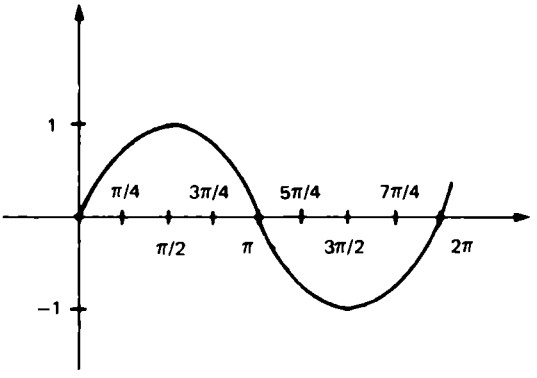
Algunos de los valores de esta función se dan en la siguiente tabla, que son ángulos conocidos.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
sen x	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0

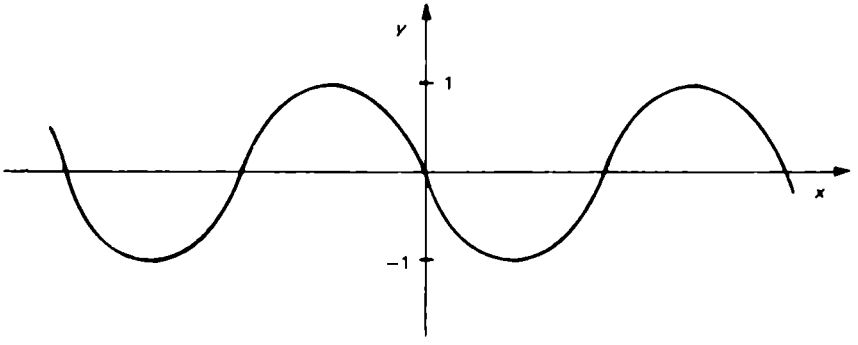
x	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
sen x	$-1/2$	$-1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/2$	0

Los demás valores los podemos encontrar por medio de las tablas trigonométricas, donde observamos que la función seno va aumentando poco a poco por décimas o centésimas desde 0° a 90°; para los valores entre 90° y 270° disminuyen también poco a poco y de 270° a 360° vuelve a aumentar su valor. El valor máximo de esta función es 1 y su valor mínimo −1.

Trazaremos su gráfica en un eje de coordenadas donde el eje de las x representará los valores de los argumentos de la función. Estos valores se representarán en radianes, donde hay que tener presente que $\pi \approx 3.14$ (aproximado).



Como la función seno es periódica, la curva se puede extender para cualquier lado del eje x tantos ciclos como se desee. Un ciclo es el conjunto de puntos que comprende un periodo.



Observaciones.

a) Los valores de la función $y = \operatorname{sen} x$ están comprendidos en el intervalo $[-1, 1]$.

b) La gráfica de $y = \text{sen } x$ en el periodo de 0 a 2π cruza el eje de las x en $x = 0$, π y 2π, o sea:

$$y = \text{sen } 0 = 0$$
$$y = \text{sen } \pi = 0$$
$$y = \text{sen } 2\pi = 0$$

c) La gráfica de $y = \text{sen } x$ toma su valor máximo de 1 cuando $x = \pi/2$, o sea:

$$y = \text{sen } (\pi/2) = 1.$$

d) La gráfica de $y = \text{sen } x$ toma su valor mínimo cuando $x = 3\pi/2$, o sea:

$$y = \text{sen } (3\pi/2) = -1.$$

A continuación veremos diferentes tipos de gráficas donde interviene la función seno.

Gráfica de $y = k$ sen x.

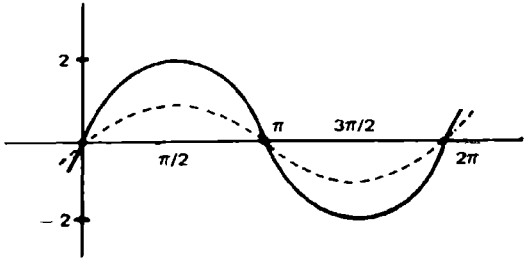
En la función $y = k \text{ sen } x$, a la constante positiva k la llamaremos amplitud de la función. Las ordenadas de $y = k \text{ sen } x$ son k-veces los valores de $y = \text{sen } x$.

La gráfica de $y = k \text{ sen } x$ toma su valor máximo, que es k en $x = \pi/2$ y su valor mínimo, que es $-k$ en $x = 3\pi/2$.

Ejemplos.

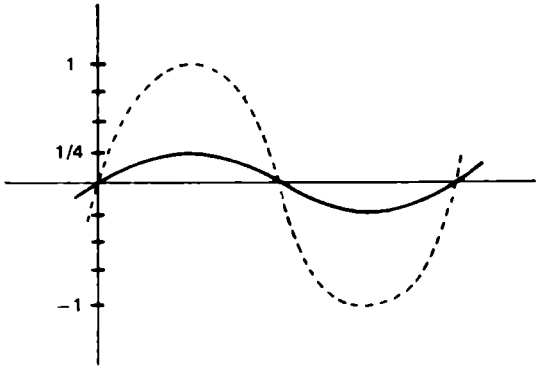
1. Graficar $y = 2 \text{ sen } x$ en un solo periodo.

   a) Cruza el eje x cuando:
   $x = 0$ $\qquad$ $x = \pi$ $\qquad$ $x = 2\pi$
   b) Toma su valor máximo de 2 cuando $x = \pi/2$.
   c) Toma su valor mínimo de -2 cuando $x = 3\pi/2$.



2. Graficar $y = (1/4)$ sen x en un periodo.

   a) Cruza al eje x cuando:
   $x = 0$ $\qquad x = \pi$ $\qquad x = 2\pi$
   b) Toma su valor máximo de $1/4$ cuando $x = \pi/2$.
   c) Toma su valor mínimo de $-1/4$ cuando $x = 3\pi/2$.



Observación. En estos ejemplos notarás que se incluyó la gráfica de la función y = sen x (punteada) para observar las alteraciones que esta función sufrió.

Gráfica de y = sen bx.

La gráfica de y = sen bx es de la misma naturaleza senoidal, donde (bx) es el argumento o ángulo de la función. Para la gráfica de esta función, tendremos las mismas consideraciones anteriores:

1. La gráfica cruza al eje x cuando el ángulo:

   $bx = 0$ $\qquad bx = \pi$ $\qquad bx = 2\pi$
   $x = 0$ $\qquad x = \pi/b$ $\qquad x = 2\pi/b$

2. Toma su valor mínimo cuando el ángulo:

   $bx = 3\pi/2$ $\qquad$ y $\qquad x = 3\pi/2b$

3. Toma su valor máximo cuando el ángulo:

   $bx = \pi/2$ $\qquad$ y $\qquad x = \pi/2b$

Observación. El periodo de $y = \text{sen } bx$ será $2\pi/b$.

Ejemplos.

3. Graficar $y = \text{sen } 2x$ en un solo periodo.

   a) Cruza al eje x cuando:

   $2x = 0 \qquad 2x = \pi \qquad 2x = 2\pi$

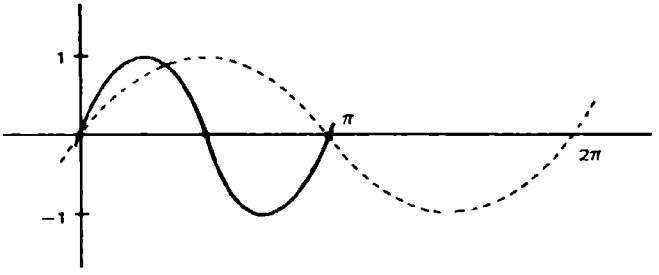
   ó $x = 0 \qquad x = \pi/2 \qquad x = \pi$

   b) Toma su valor máximo de 1 cuando:

   $2x = \pi/2 \qquad \text{y} \qquad x = \pi/4$

   c) Toma su valor mínimo de -1 cuando:

   $2x = 3\pi/2 \qquad \text{y} \qquad x = 3\pi/4$



4. Graficar $y = \text{sen } x/2$ en un solo periodo.

   a) Cruza al eje x cuando:

   $x/2 = 0 \qquad x/2 = \pi \qquad x/2 = 2\pi$

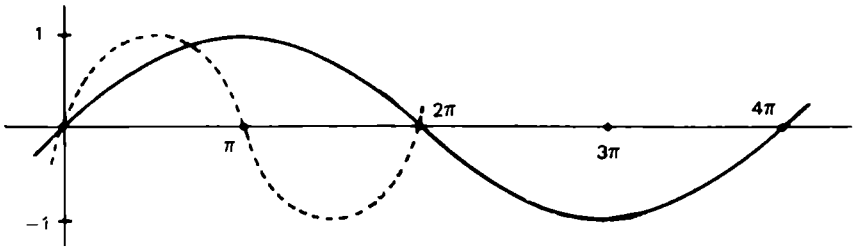
   ó $x = 0 \qquad x = 2\pi \qquad x = 4\pi$

   b) Toma su valor máximo de 1 cuando

   $x/2 = \pi/2 \qquad \text{y} \qquad x = \pi$

   c) Toma su valor mínimo de -1 cuando:

   $x/2 = 3\pi/2 \qquad \text{y} \qquad x = 3\pi$



Haciendo una combinación de las funciones $y = k$ sen x y $y =$ sen bx, podemos tener una función del tipo $y = k$ sen bx:

Ejemplo.

5. Graficar $y = 4$ sen $3x$.

   a) Cruza al eje x cuando:

   $3x = 0$ $\quad$ $3x = \pi$ $\quad$ $3x = 2\pi$

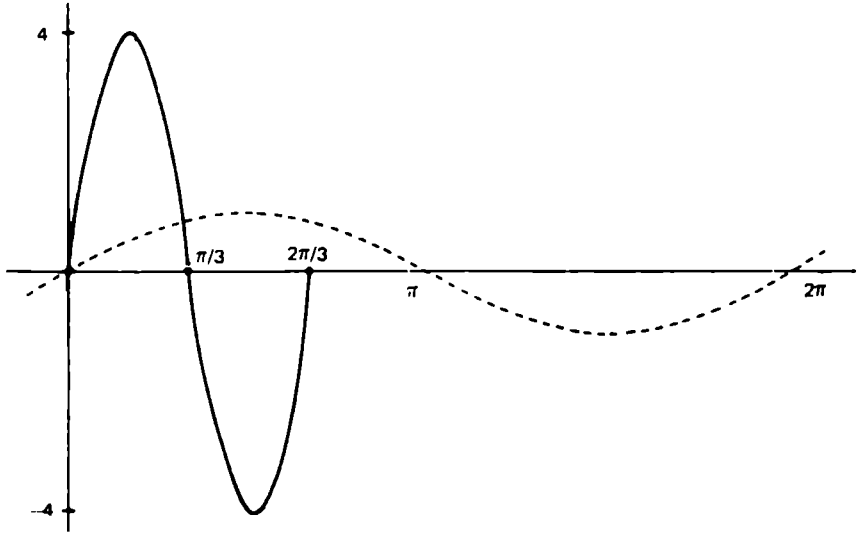
   ó $x = 0$ $\quad$ $x = \pi/3$ $\quad$ $x = 2\pi/3$

   b) Toma su valor máximo de 4 cuando:

   $3x = \pi/2$ y $x = \pi/6$

   c) Toma su valor mínimo de -4 cuando:

   $3x = 3\pi/2$ y $x = \pi/2$



Gráfica de $y = a \text{ sen } (bx + \phi)$.

La gráfica de $y = a$ sen $(bx + \phi)$ es similar a la de $y = k$ sen bx, donde ϕ recibe el nombre de ángulo de fase, puesto que defasa o mueve la gráfica a la derecha o a la izquierda, según sea negativo o positivo este ángulo. Para graficarla se procede de la misma forma que en las gráficas anteriores.

Ejemplo.

6. Graficar $y = (1/3)$ sen $(2x + \pi/2)$ en un solo periodo.

a) Cruza al eje x cuando:

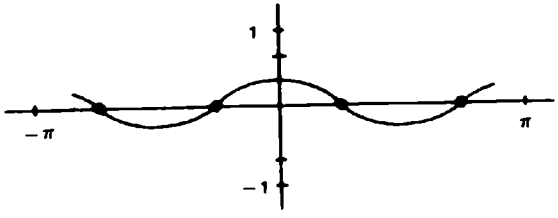
$$2x + \pi/2 = 0 \qquad 2x + \pi/2 = \pi \qquad 2x + \pi/2 = 2\pi$$
$$2x = -\pi/2 \qquad 2x = \pi - \pi/2 \qquad 2x = 2\pi - \pi/2$$
$$2x = \pi/2 \qquad 2x = 3\pi/2$$
$$x = -\pi/4 \qquad x = \pi/4 \qquad x = 3\pi/4$$

b) Toma su valor máximo de 1/3 cuando:

$$2x + \pi/2 = \pi/2$$
$$2x = \pi/2 - \pi/2$$
$$2x = 0$$
$$x = 0$$

c) Toma su valor mínimo de $(-1/3)$ cuando:

$$2x + \pi/2 = 3\pi/2$$
$$2x = 3\pi/2 - \pi/2$$
$$2x = \pi$$
$$x = \pi/2$$



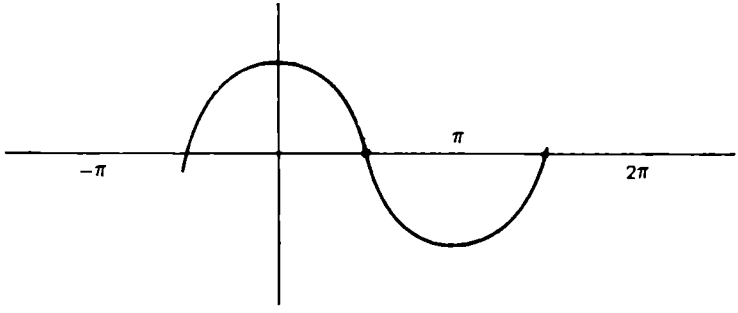
Observación. La gráfica se ha defasado $\pi/4$ unidades hacia la izquierda respecto a la de $y = (1/3)$ sen $2x$.

La función cos x

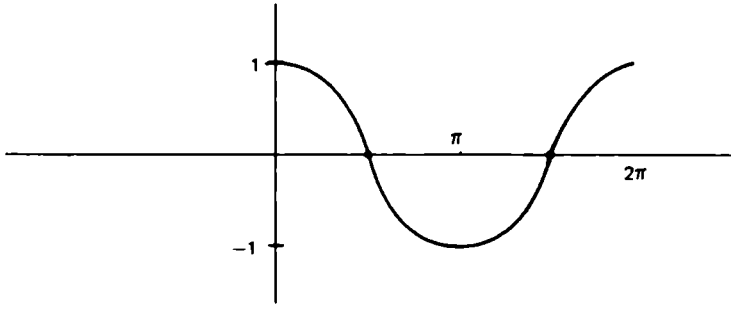
Sabemos por identidades que:

> Para toda x, sen $(x + \pi/2) \equiv \cos x$

Así, para graficar a $y = \cos x$, consideraremos a sen $(x + \pi/2)$ que es la gráfica de $y = \text{sen } x$, defasada $\pi/2$ unidades hacia la izquierda:



En el periodo 0 a 2π, su gráfica será:



Observaciones.

La gráfica de $y = \cos x$:

a) Cruza al eje x cuando:

$$x = \pi/2 \qquad \text{y} \qquad x = 3\pi/2$$

b) Toma su valor máximo de 1 cuando:

$$x = 0 \qquad \text{y} \qquad x = 2\pi$$

c) Toma su valor mínimo de -1 cuando:

$$x = \pi$$

Los diferentes tipos de funciones serán similares a las de la función seno.

Ejemplos.

7. Graficar $y = 2 \cos x$ en un solo periodo.

a) Cruza al eje x cuando:

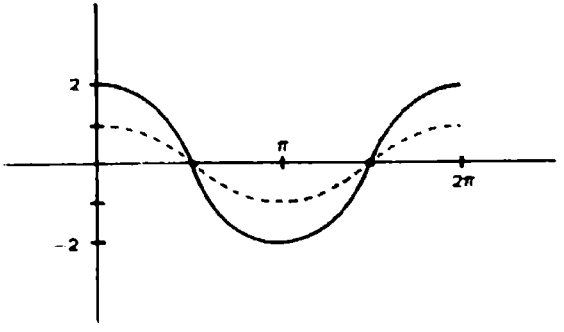
$$x = \pi/2 \qquad \text{y} \qquad x = 3\pi/2$$

b) Toma su valor máximo de 2 cuando:

$$x = 0 \qquad \text{y} \qquad x = 2\pi$$

c) Toma su valor mínimo de -2 cuando:

$$x = \pi$$



8. Graficar $y = (1/2) \cos 2x$ en un solo periodo.

a) Cruza al eje x cuando:

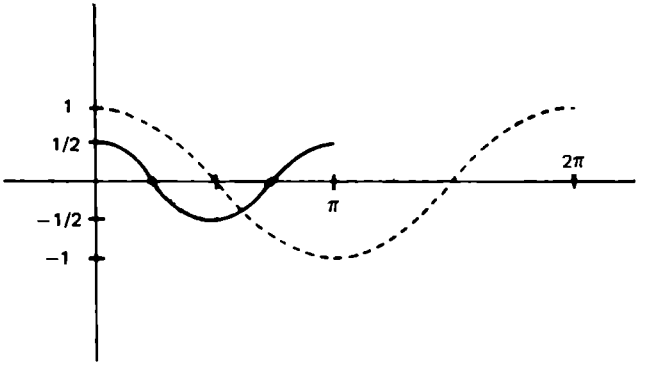
$$2x = \pi/2 \qquad \text{y} \qquad 2x = 3\pi/2$$
$$x = \pi/4 \qquad \text{y} \qquad x = 3\pi/4$$

b) Toma su valor máximo de 1/2 cuando:

$$2x = 0 \qquad \text{y} \qquad 2x = 2\pi$$
$$x = 0 \qquad \text{y} \qquad x = \pi$$

c) Toma su valor mínimo de $-1/2$ cuando:

$$2x = \pi$$
$$x = \pi/2$$



9. Graficar $y = 3 \cos (2x + \pi/4)$ en un solo periodo.

a) Cruza al eje x cuando:

$$2x + \pi/4 = \pi/2 \qquad \text{y} \qquad 2x + \pi/4 = 3\pi/2$$
$$2x = \pi/2 - \pi/4 \qquad\qquad 2x = 3\pi/2 - \pi/4$$
$$2x = \pi/4 \qquad\qquad 2x = \frac{5\pi}{4}$$
$$x = \pi/8 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{5\pi}{8}$$

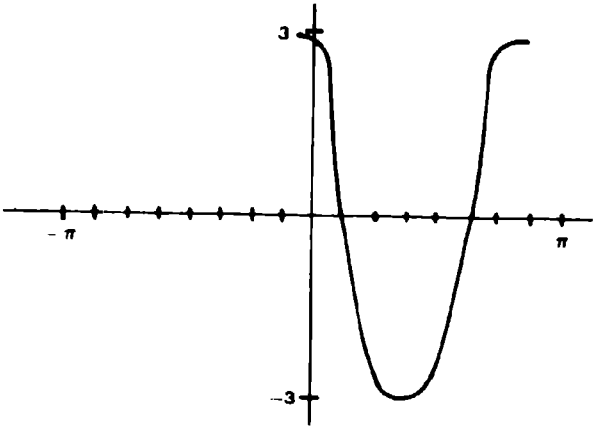
b) Toma su valor máximo.de 3 cuando:

$$2x + \pi/4 = 0 \qquad \text{y} \qquad 2x + \pi/4 = 2\pi$$
$$2x = -\pi/4 \qquad\qquad 2x = 2\pi - \pi/4$$
$$x = -\pi/8 \qquad \text{y} \qquad x = 7\pi/8$$

c) Toma su valor mínimo de -3 cuando:

$$2x + \pi/4 = \pi$$
$$2x = \pi - \pi/4$$

$$2x = 3\,\pi/4$$
$$x = 3\,\pi/8$$



La función tan x

Para llegar a la gráfica de $y = \tan x$, haremos un análisis para los valores de x entre 0 y 90°. Para algunos valores conocidos tenemos:

$$\tan 0^\circ = 0$$
$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.6$$
$$\tan 45^\circ = 1$$
$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1.7$$

Los valores aumentan casi por décimas. Si observamos en una tabla los valores de tan de 60° a 80° también aumentan de la misma forma y de 80° a 90° hay un cambio considerable y muy grande, por ejemplo:

Medida del ángulo	*Valor de la tan*
80°	5.67
85°	11.43
86°	14.30

Medida del ángulo	*Valor de la tan*
87°	19.08
88°	28.64
89°	57.29
89°10′	68.75
89°20′	85.94
89°30′	114.6
89°40′	171.9
89°50′	343.8
89°59′	3,437.7

Si nos vamos acercando a valores de ángulos menores de 90° el valor de la tangente seguirá aumentando en forma cada vez más rápida, de esta manera se puede probar que tan 90° no existe. Probar formalmente esto no está a nuestro alcance por ahora, sin embargo, el hecho de que no exista tan 90° coincide con lo mencionado en la sección 9.2 (tan 90° $= \frac{1}{0}$).

Para los valores entre 90° y 180°, la tangente es negativa. Si nos aproximamos a 90° por los valores mayores de 90°, la tangente toma valores mucho muy pequeños y negativos. Por ejemplo:

Medida del ángulo	*Valor de la tan*
tan 90°01′ = − tan 98°59′	−3,434.7
tan 90°10′ = − tan 89°50′	−343.8
tan 90°20′ = − tan 89°40′	−171.9
tan 90°30′ = − tan 89°30′	−114.6
tan 90°50′ = − tan 89°10′	−68.75
tan 91° = − tan 89°	−57.29

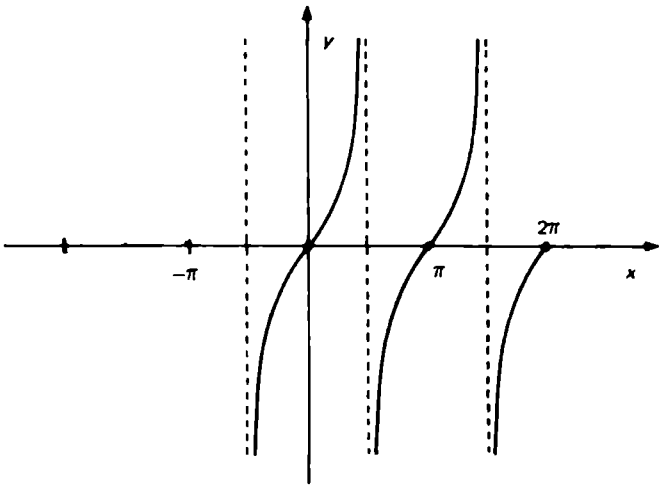
Medida del ángulo	*Valor de la tan*
$\tan 93^\circ = -\tan 87^\circ$	−19.08
$\tan 95^\circ = -\tan 85^\circ$	−11.43
$\tan 100^\circ = -\tan 80^\circ$	−5.67
$\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ$	−1.7
$\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ$	−1
$\tan 150^\circ = -\tan 30^\circ$	−0.6
$\tan 180^\circ = 0$	0

Para los valores entre 180° y 360° volveremos a tener exactamente los mismos valores, ya que esta función también es periódica, con periodo de 180° o π radianes, y la función no está definida en los ángulos de 90° y 270°.

El dominio y dominio de imágenes de la función $y = \tan x$ lo indicaremos en la siguiente tabla (donde $-\infty$ significará valores mucho muy pequeños y negativos y ∞ significará valores mucho muy grandes).

Dominio de tan x	*Dominio de imágenes de tan x*
$0^\circ \leqslant x < 90^\circ$	$0 \leqslant \tan x < \infty$
$90^\circ < x \leqslant 180^\circ$	$-\infty < \tan x \leqslant 0$
$180^\circ \leqslant x < 270^\circ$	$0 \leqslant \tan x < \infty$
$270^\circ < x \leqslant 360^\circ$	$-\infty < \tan x \leqslant 0$

Al trazar la gráfica de $y = \tan x$, utilizaremos sólo algunos valores y para indicar que en algún valor la tan de x no existe se colocarán rectas punteadas, llamadas asíntotas, a las cuales la curva se aproxima sin llegar a tocarlas nunca.



Las diferentes variaciones para $y = \tan x$ serán las mismas que para el seno y coseno. Para trazar sus gráficas, se procede de la misma forma, teniendo como base los valores del ángulo en 0, $\pi/4$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, que son los valores donde la gráfica cruza al eje x, no existe y donde vale 1 y -1. Por tanto para la gráfica de $y = k \tan x$, tenemos:

a) Cruza al eje x cuando $x = 0, \pi$ y 2π.
b) No existe cuando $x = \pi/2$ y $3\pi/2$.
c) Toma el valor de k cuando $x = \pi/4$ y $5\pi/4$.
d) Toma el valor de $-k$ cuando $x = -\pi/4, 3\pi/4$ y $7\pi/4$.

Observación. Puesto que la función $y = \tan x$ crece indefinidamente para algunos valores de x y para otros decrece indefinidamente, no existen valores donde la función pueda tomar un valor máximo o un valor mínimo.

Ejemplo.

10. Graficar $y = \tan 2x$.

a) Cruza al eje x cuando:

$$2x = 0 \qquad 2x = \pi \qquad 2x = 2\pi$$
$$x = 0 \qquad x = \pi/2 \qquad x = \pi$$

b) No existe cuando:

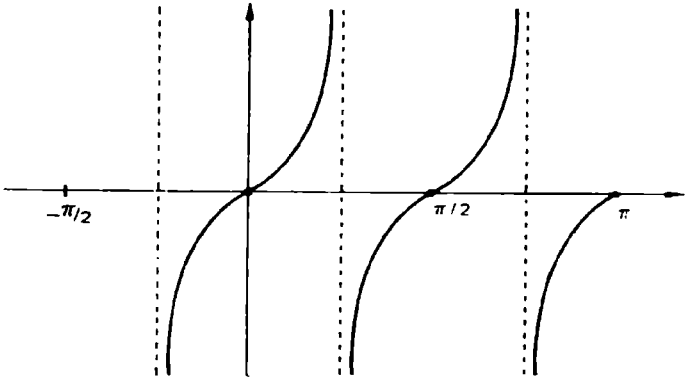
$$2x = \pi/2 \qquad 2x = 3\pi/2$$
$$x = \pi/4 \qquad x = 3\pi/4$$

c) Toma el valor de 1 cuando:

$$2x = \pi/4$$
$$x = \pi/8$$

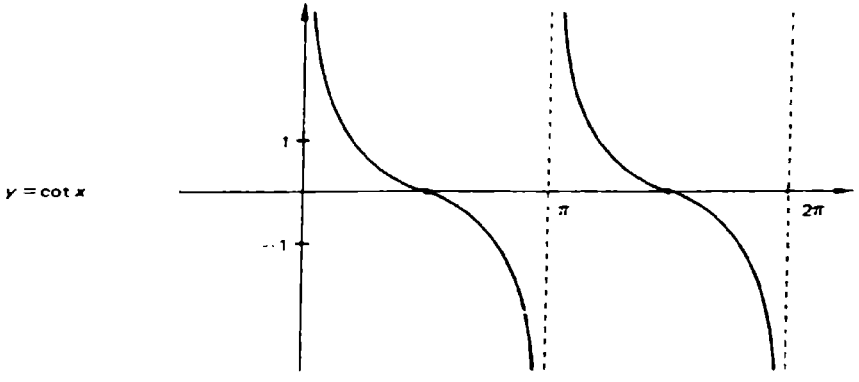
d) Toma el valor de -1 cuando:

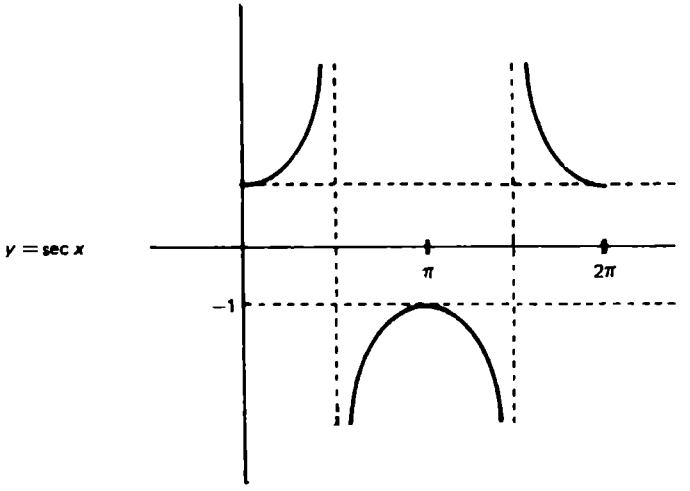
$$2x = -\pi/4 \qquad 2x = 3\pi/4$$
$$x = -\pi/8 \qquad x = 3\pi/8$$

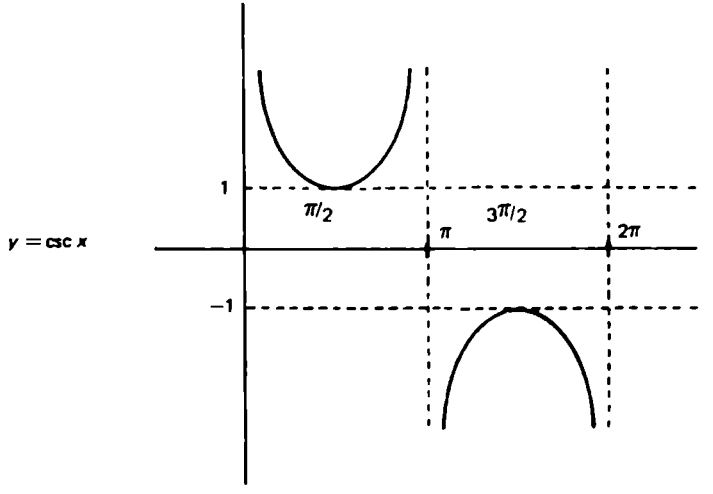


Las funciones cot x, sec x, csc x

Al igual que hicimos el análisis para graficar la función $y = \tan x$, se procederá para trazar las gráficas de $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$. Sus variaciones, periodo y sus gráficas se dan a continuación.







	0° *a* 90°	90° *a* 180°	180° *a* 270°	270° *a* 360°	*periodo*
cot x	$+\infty$ a 0	0 a $-\infty$	$+\infty$ a 0	0 a $-\infty$	$\pi = 180°$
sec x	1 a $+\infty$	$-\infty$ a -1	-1 a $-\infty$	$+\infty$ a 1	2π
csc x	$+\infty$ a 1	1 a $+\infty$	$-\infty$ a -1	-1 a $-\infty$	2π

Ejercicios.

1. Dar el dominio y dominio de imágenes de cada una de las 6 funciones trigonométricas.

2. Trazar la gráfica de cada una de las 6 funciones trigonométricas en un solo periodo.

3. Trazar la gráfica de las siguientes funciones en dos periodos.

   a) $y = 2 \tan x$

   b) $y = \frac{1}{4} \cot x$

   c) $y = \tan \frac{1}{3} x$

   d) $y = \frac{1}{3} \sec 3x$

   e) $y = \frac{1}{4} \csc x$

   f) $y = \frac{1}{2} \tan (2x - \pi)$

   g) $y = (-1/2) \tan x$

   h) $y = \frac{1}{2} \sec 2x$

   i) $y = 2 \cot (1/2)x$

   j) $y = -2 \csc 2x$

   k) $y = 3 \tan (x + \pi)$

   l) $y = \tan (3x - \pi)$

4. Graficar las siguientes funciones en el intervalo que se especifica:

   a) $y = \text{sen } x$ $\quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant 2\pi$

   b) $y = \frac{1}{3} \text{sen } x$ $\quad -\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$

   c) $y = 4 \text{ sen } x$ $\quad 0 \leqslant x \leqslant 3\pi$

   d) $y = \text{sen } 3x$ $\quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

   e) $y = \text{sen } \frac{1}{3} x$ $\quad 0 \leqslant x \leqslant 3\pi$

f)	$y = \operatorname{sen} \pi x$	$0 \leqslant x \leqslant 2$
g)	$y = 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} x$	$-2 \leqslant x \leqslant 2$
h)	$y = -\operatorname{sen} 2x$	$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
i)	$y = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$
j)	$y = 3 \operatorname{sen} (1/4)x$	$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
k)	$y = -2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x$	$0 \leqslant x \leqslant 2$
l)	$y = \cos x$	$-\pi/2 \leqslant x \leqslant 2\pi$
m)	$y = \frac{1}{3} \cos x$	$-\pi/2 \leqslant x \leqslant 2\pi$
n)	$y = 4 \cos x$	$0 \leqslant x \leqslant 3\pi$
ñ)	$y = \cos 3x$	$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
o)	$y = \cos \frac{1}{3} x$	$0 \leqslant x \leqslant 3\pi$
p)	$y = \cos \pi x$	$0 \leqslant x \leqslant 2$
q)	$y = 2 \cos \frac{2\pi}{3} x$	$-2 \leqslant x \leqslant 2$
r)	$y = -\cos 2x$	$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
s)	$y = -2 \cos \frac{1}{2} x$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$
t)	$y = 3 \cos (1/4)x$	$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
u)	$y = -2 \cos \frac{\pi}{2} x$	$0 \leqslant x \leqslant 2$
v)	$y = 2 \cos (x + \pi/3)$	un periodo
w)	$y = 3 \operatorname{sen} (2x - \pi/2)$	un periodo
x)	$y = 3 \cos (3x + \pi/2)$	un periodo
y)	$y = 2 \operatorname{sen} (x + \pi)$	un periodo
z)	$y = (1/5) \cos [(1/5)x - \pi/5]$	un periodo
a')	$y = (-1/3) \operatorname{sen} [(1/3)x + \pi/3]$	un periodo

$b')$ $y = \cos(x + \pi/4)$ un periodo

$c')$ $y = 2 \operatorname{sen}(2x - 2\pi)$ un periodo

Sección 9.8

LOGARITMOS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir el logaritmo y antilogaritmo de un número.
2. Demostrar las propiedades de los logaritmos.
3. Calcular logaritmos de cualquier base.
4. Empleando logaritmos, efectuar cálculos numéricos.
5. Dado el logaritmo de un número en una base determinada, cambiarlo a una base diferente.
6. Resolver ecuaciones con logaritmos y ecuaciones exponenciales.

Otras de las funciones importantes para nosotros serán la exponencial y la logarítmica. Para llegar a definir la función logarítmica, es necesario conocer la exponencial, por lo que haremos un pequeño estudio de ella.

Definición. Sea b cualquier número real positivo diferente de 1, entonces una función f se llama función exponencial de base b si y sólo si:

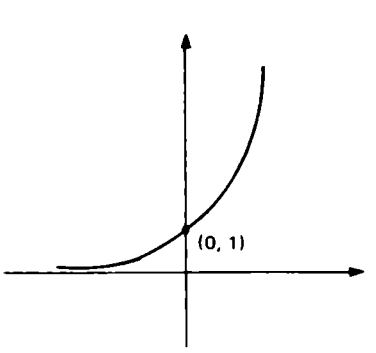
$$f = \{(x, y) \mid y = b^x, x \in R\}$$

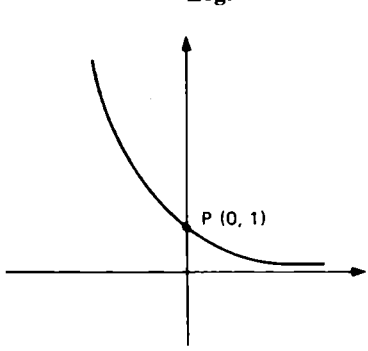
Observaciones

a) A la función exponencial la podemos identificar con sólo notar que la variable x aparece como exponente en la función.

b) El dominio de la función exponencial son los números reales y el dominio de imágenes son los números reales mayores que 0.

Las gráficas siguientes son semejantes a las de una función exponencial.





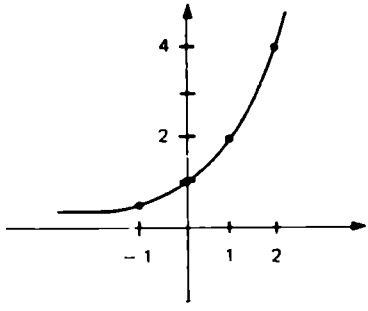
Ejemplos

1. Graficar la función $y = 2^x$.

   Si tabulamos algunos valores tenemos:

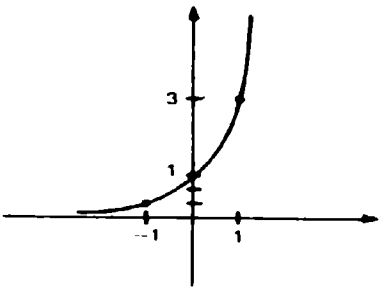
x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	2	4	8	1/2	1/4	1/8

   su gráfica será:



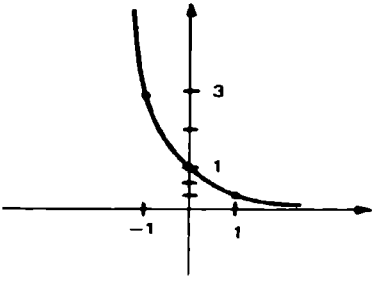
2. Graficar la función $y = 3^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27



3. Graficar $y = (1/3)^x$.

x	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3
y	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27



En general, las gráficas $y = b^x$ donde $0 < b < 1$ son semejantes a este último ejemplo.

Observación.

Para la gráfica de $y = b^x$ con $0 < b < 1$, tenemos:

1. Para toda $x \in R$, $b^x > 0$.
2. Si $x = 0$, $b^x = 1$
   si $x > 0$, $0 < b^x < 1$
   si $x < 0$, $b^x > 1$

La gráfica de $y = b^x$ cuando $b > 1$ es semejante a las obtenidas al graficar $y = 3^x$ y $y = 2^x$.

Observación.

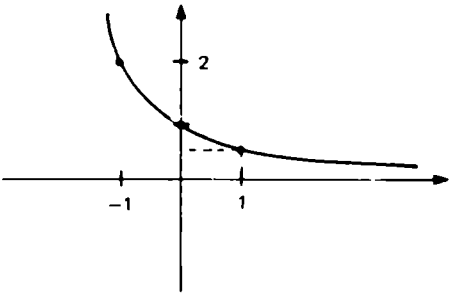
Para la gráfica de $y = b^x$ si $b > 1$, tenemos:

1. Para toda $x \in R$, $b^x > 0$.
2. Si $x = 0$, $b^x = 1$
   si $x > 0$, $b^x > 1$
   si $x < 0$, $0 < b^x < 1$.

Ejemplo.

4. Graficar $y = (1/2)^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8



Observación. Para los dos tipos de gráficas tenemos que el punto (0, 1) siempre pertenece a ella.

Definición. Si N y b son números positivos y si $b \neq 1$, entonces:

$$\log_b N = L \text{ si y sólo si } N = b^L$$

donde b es llamada la base del logaritmo.

Observaciones.

a) La expresión $\log_b N$ se lee: logaritmo de N en base b.

b) El logaritmo de un número lo estamos definiendo por medio de un exponente. Según esto, los conceptos de logaritmo y de exponente son exactamente lo mismo, por lo que podemos usar indistintamente las dos formas.

Ejemplos.

5. $\text{Log}_2\ 4 = 2 \Leftrightarrow 2^2 = 4$
6. $\text{Log}_5\ 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$
7. $\text{Log}_8\ \frac{1}{2} = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow 8^{-1/3} = \frac{1}{2}$
8. Hallar $\log_2 \frac{1}{16}$.

   Si tomamos $L = \log_2 \frac{1}{16}$ entonces $2^L = \frac{1}{16}$:

$$2^L = \frac{1}{16}$$

$$2^L = \frac{1}{2^4}$$

$$2^L = 2^{-4}$$

   y así, $L = -4$; de donde $\log_2 \frac{1}{16} = -4$.

9. Hallar x si $\log_{16} x = \frac{-3}{2}$.

   Como $\log_{16} x = \frac{-3}{2}$ es equivalente a $16^{-3/2} = x$.

$$x = 16^{-3/2}$$

$$= \frac{1}{16^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{16})^3} = \frac{1}{64}$$

10. Hallar x si $\log_x \frac{1}{81} = -2$.

$$\log_x \frac{1}{81} = -2 \quad \text{si y sólo si } x^{-2} = \frac{1}{81}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{81}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{81}$$

$$x = \pm 9$$

Sólo consideraremos el número positivo, ya que la base de un logaritmo no es negativa y así, $\log_9 \frac{1}{81} = -2$.

Si consideramos la ecuación logarítmica:

$$y = \log_b x$$

tenemos que a cada valor de x positivo, le asociamos un único valor de y. Esta ecuación define una función.

Definición. Si b es un número positivo diferente de 1, entonces la función:

$$f = \{ (x, y) \mid y = \log_b x, \ x > 0 \}$$

es una función logarítmica de base b.

Observamos que el dominio de esta función son los números reales positivos y su dominio de imágenes serán todos los números reales. Esto lo observamos en seguida. Para trazar la gráfica de $\{ (x, y) \mid y = \log_b x \}$ haremos uso de nuestra definición de logaritmo, que nos dice que es equivalente a la función exponencial.

Ejemplo.

11. Trazar la gráfica de $y = \log_2 x$.

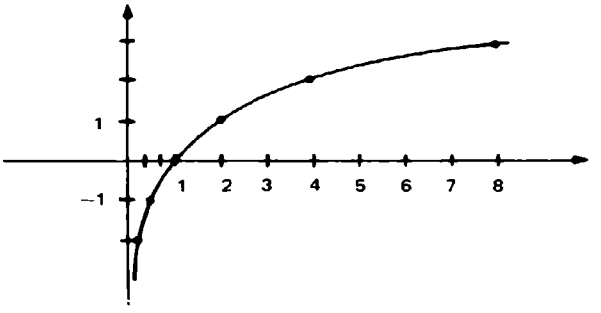
Para lograr la gráfica de esta función, haremos uso de la función exponencial equivalente a ella. O sea:

$$y = \log_2 x \text{ si sólo si } 2^y = x.$$

Aquí, al tabular daremos valores a y en lugar de x, para poder encontrar los valores de una manera sencilla, y sustituiremos en la exponencial.

x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
y	−3	−2	−1	0	1	2	3

Su gráfica será:



En general, la gráfica de una función logarítmica $y = \log_b x$, donde $b > 1$, es similar a la del ejemplo anterior.

Observaciones.

a) El dominio de $y = \log_b x$ son los reales positivos.

b) El dominio de imágenes de $y = \log_b x$ son los números reales.

c) Si $0 < x < 1$, $\log_b x < 0$
si $x > 1$, $\log_b x > 0$
si $x = 1$, $\log_b x = 0$.

d) Toda gráfica de una función logarítmica pasa por el punto (1, 0).

Si se nos presentan dos gráficas diferentes y se nos pide identificar si ésta es una función exponencial o logarítmica, podemos identificarla inmediatamente, ya que toda función exponencial pasa por el punto (0, 1) y toda función logarítmica pasa por el punto (1, 0).

Propiedades de los logaritmos

Ya que la función logaritmo es equivalente a la función exponencial, podemos reescribir las leyes de los exponentes en el lenguaje de los logaritmos. A continuación las enunciaremos.

Teorema 1.

Para toda $x, y, b \in R^+$, donde $b \neq 1$:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

> El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores.

Demostración.

Sea $\log_b x = m$ y $\log_b y = n$, por la definición de logaritmos tenemos:

$$\log_b x = m \Leftrightarrow b^m = x$$

y $\log_b y = n \Leftrightarrow b^n = y$

luego: $xy = b^m\ b^n = b^{m+n}$

De manera que, usando de nuevo la definición de logaritmo en

$$xy = b^{m+n}$$

tenemos: $\log_b xy = m + n.$

Sustituyendo tenemos:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

que es lo que se quería demostrar.

Teorema 2.

Para toda $x, b \in R^+$, tales que $b \neq 1$ y para toda $n \in R$:

$$\log_b x^n = n \log_b x.$$

> El logaritmo de la n–ésima potencia de un número positivo es n veces el logaritmo del número.

Demostración.

Sea $m = \log_b x$

entonces $x = b^m$

y si elevamos a ambos lados de esta ecuación a la n ésima potencia, tenemos:

$$(x^n) = (b^m)^n$$
$$x^n = b^{m\,n}$$

y por la definición de logaritmo:

$$\log_b x^n = mn$$

o

$$\log_b x^n = nm$$

o

$$\log_b x^n = n \log_b x$$

que es lo que se quería demostrar.

Teorema 3.

Para toda $x, y, b \in R^+$ tales que $b \neq 1$.

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

El logaritmo del cociente de números positivos es el logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

La demostración de este teorema quedará como ejercicio:

Ejemplos.

12. Si $\log_b 2 = .30$ y $\log_b 3 = .47$

hallar: $\log_b 6$ y $\log_b \frac{9}{8}$

$$\log_b 6 = \log_b (2)(3) = \log_b 2 + \log_b 3$$
$$= .30 + .47$$
$$= .77$$

$$\log_b \frac{9}{8} = \log_b 9 - \log_b 8$$
$$= \log_b 3^2 - \log_b 2^3$$
$$= 2 \log_b 3 - 3 \log_b 2$$

$$= 2(.47) - 3(.30)$$
$$= .94 - .90$$
$$= .04$$

13. $\log_b 8^3 = 3 \log_b 8 = 3 \log_b 2^3 = 9 \log_b 2.$

14. $\log_b \sqrt[4]{5^3} = \log_b 5^{3/4} = (3/4) \log_b 5$

15. Expresar lo siguiente como el logaritmo de un solo número:

$$3 \log_b xy + \frac{1}{3} \log_b z$$

$$3 \log_b xy + \frac{1}{3} \log_b z = \log_b (xy)^3 + \log_b z^{1/3}$$
$$= \log_b x^3 y^3 z^{1/3}$$

16. Resolver para x en términos de y en la siguiente expresión:

$$2 \log_4 x - (1/3) \log_4 y = 0$$

$$\log_4 x^2 - \log_4 y^{1/3} = 0$$
$$\log_4 \frac{x^2}{y^{1/3}} = 0$$

$$4^0 = \frac{x^2}{y^{1/3}}$$
$$1 = \frac{x^2}{y^{1/3}}$$
$$x^2 = y^{1/3} \qquad x = \sqrt{y^{1/3}}$$
$$y = x^6$$

USO DE LA CALCULADORA PARA OBTENER LOGARITMOS DE BASE 10 O BASE e.

Los logaritmos de base 10 eran utilizados para facilitar operaciones numéricas complicadas en las que intervenían productos, cocientes y potencias de números reales. Los logaritmos en base 10 son conocidos como LOGARITMOS COMUNES, decimales o de Buggs y se representaba por $\log x$, sin colocar la base.

Actualmente se puede disponer de una calculadora, por lo que no existe la necesidad de usar los logaritmos como herramienta para hacer cálculos. Sin embargo, los logaritmos en base 10 pueden presentarse en algunas aplicaciones.

Una calculadora con la tecla | log | nos servirá para aproximar los logaritmos de base 10.

Ejemplos.

17. log 28.5

introducir : 28.5
oprimir [log] : 1.4548449

así log 28.5 = 1.4548449

18. log 2.835

introducir : 2.835
oprimir [log] : 0.452553

Por lo que log 2.835 = 0.452553

19. Obtener x si log x = 0.564666

introducir : 0.564666
oprimir [INV] y [log] : 3.67

Por lo que x = 3.67, ya que log (3.67) = 0.564666.

20. Obtener x si log x = − 3.5

introducir : − 3.5
oprimir [INV] y [log] : 0.0003162277

así x = 0.0003162277

21. $\log_e 5 = \ln 5$

introducir : 5
oprimir [ln] : 1.6094379

22. Obtener x si $\log_e x = -0.287682$

introducir : − 0.287682
oprimir [INV] y [ln] : 0.75

así $x = 0.75$ ya que $\log_e (0.75) = -0.287682$

Observación.

Los logaritmos en base e (3.1415927) son llamados logaritmos naturales o naperianos (John Naper, 1550-1617) y se representan por $\log_e x$ o $\ln x$

Cambios de base de logaritmos

Algunas veces se conoce el logaritmo de un número en una base determinada y se desea encontrar el logaritmo del mismo número en otra base diferente. Para esto es necesario conocer la siguiente igualdad:

$$\log_a N = \log_b N \log_a b.$$

Demostración.

Sea $x = \log_b N$, por definición de logaritmo tenemos que $b^x = N$, a partir del cual se pueden tomar logaritmos a ambos lados de base a de ella, conservando la igualdad. O sea:

$$\log_a b^x = \log_a N$$

Usando las propiedades de los logaritmos tenemos:

$$x \log_a b = \log_a N$$

o

$$\log_a N = x \log_a b$$

pero $x = \log_b N$,

entonces:

$$\log_a N = \log_b N \log_a b.$$

Observaciones.

a) Esta igualdad la podemos indicar de la siguiente forma:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

que nos puede servir para cambiar a una base diferente, por ejemplo:

$$\log_8 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 8}$$

de donde se tiene que el logaritmo de 5 en base 8 se pudo expresar como el cociente de dos logaritmos en base 10.

b) Se deberá notar que la a puede tomar cualquier valor, pero es conveniente usar el que esté más de acuerdo a las tablas que se tengan.

Ejemplos.

23. Hallar $\log_8 5$.

Utilizando el teorema anterior con $a = 10$ tenemos:

$$\log_8 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 8} = \frac{.6990}{.9031} = .774$$

24. Hallar $\log_2 12$.

Utilizando el teorema de cambio de base tenemos:

$$\log_2 12 = \frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 2} = \frac{1.0792}{0.3010} = 3.585$$

Ecuaciones logarítmicas

Existen, además de las ecuaciones ya vistas en los capítulos anteriores, las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Para resolver una ecuación exponencial de la forma $a^x = b$, será necesario utilizar logaritmos de base 10, por comodidad. Los siguientes ejemplos nos ayudarán a resolver ecuaciones de estos tipos.

Ejemplos.

25. Resolver $4^x = 8$.

Utilizando logaritmos en base 10 tenemos:

$$\log 4^x = \log 8$$

$$x \log 4 = \log 8$$

$$x = \frac{\log 8}{\log 4}$$

$$x = \frac{0.9031}{0.6021}$$

$$x = 1.49$$

26. Resolver $4^{x-1} = 3^x$.

Utilizando logaritmos decimales:

$$\log 4^{x-1} = \log 3^x$$

$$(x-1)\log 4 = x \log 3$$

$$x \log 4 - \log 4 = x \log 3$$

$$x \log 4 - x \log 3 = \log 4$$

$$x (\log 4 - \log 3) = \log 4$$

$$x = \frac{\log 4}{\log 4 - \log 3}$$

$$x = \frac{\log 4}{\log \frac{4}{3}}$$

$$x = \frac{\log 4}{\log 1.33}$$

$$x = \frac{0.6021}{0.1239}$$

$$x = 4.85$$

27. Resolver $\log_{10}(3x - 1) - \log_{10} x = 0$

$$\log_{10}(3x - 1) - \log_{10} x = 0$$

$$\log_{10} \frac{3x - 1}{x} = 0$$

Utilizando la definición de logaritmo:

$$10^0 = \frac{3x - 1}{x}$$

$$1 = \frac{3x - 1}{x}$$

$$x = 3x - 1$$

$$\begin{aligned} 1 &= 3x - x \\ 1 &= 2x \\ x &= 1/2 \end{aligned}$$

Observación. Es conveniente comprobar las soluciones de una ecuación logarítmica, porque puede ser que, al sustituir el valor encontrado, queden logaritmos de números negativos y ya se ha visto que éstos no existen.

Ejercicios.

1. Escribir las expresiones siguientes en notación logarítmica:

   a) $2^3 = 8$

   b) $5^0 = 1$

   c) $3^{-4} = \frac{1}{81}$

   d) $8^{2/3} = 4$

   e) $10^{-4} = \frac{1}{.0001}$

   f) $4^{-2} = \frac{1}{16}$

   g) $b^a = m$

   h) $8^{4/3} = 16$

   i) $2^x = y$

   j) $x^2 = y$

2. Escribir las expresiones siguientes en forma exponencial:

   a) $\log_{10} 1 = 0$

   b) $\log_{10} 10 = 1$

   c) $\log_2 8 = 3$

   d) $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

   e) $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$

   f) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

g) $\log_6 \frac{1}{6} = -1$

h) $\log_2 x = y$

i) $\log x^2 = y$

j) $\log_x y = 2$

3. Hallar el valor de x en cada una de las expresiones siguientes:

a) $x = \log_4 16$

b) $x = \log_5 5$

c) $x = \log_{10} \frac{1}{10}$

d) $x = \log_{10} 10^{\sqrt{2}}$

e) $x = \log_9 3$

f) $x = \log_{1/2} 2$

g) $x = \log_a \sqrt{a}$

h) $x = \log_{b^2} b^5$

i) $2 = \log_5 x$

j) $4 = \log_x 16$

k) $\log_x 9 = \frac{2}{3}$

l) $\log_2 2^{5 \cdot 1} = x$

m) $\log_{16} x = -\frac{3}{4}$

n) $\log_8 x = 5$

ñ) $\log_2 x = -\frac{1}{3}$

o) $x^{\log_x 3} = x$

p) $x^{\log_x x} = x$

q) $2^{\log_2 x} = \frac{1}{4}$

4. Expresar como un logaritmo único con coeficiente 1, utilizando las propiedades de los logaritmos, cada una de las expresiones siguientes:

a) $\log_a x + \log_a y - \log_a z$

b) $\log_b xyz - 2 \log_b w$

c) $3 \log_b x + \frac{1}{2} \log_b yz$

d) $\log_b (x + 1) - \log_b (y - z)$

e) $\log_b (y^2 - 1) - \log_b (y+1)$

f) $\frac{1}{3} \log_a y - \frac{2}{5} \log_a z$

g) $-\log_a m + \frac{3}{2} \log_a (m - 1) + 4 \log_a m^2$

5. Usar las propiedades vistas en esta sección para obtener los siguientes logaritmos:

a) $\log_{10} (72)(2.587)$

b) $\log_{10} (32) \sqrt[5]{231}$

c) $\log_{10} (0.000728)^6$

d) $\log_{10} \dfrac{\sqrt[4]{7.29}\,(0.031)^5}{(0.2109)(7.91)^4}$

6. En las expresiones siguientes, hallar la representación numérica más simple de y

a) $y = \log_4 64 + \log_4 2 + \log_4 2$

b) $y = \log_3 243 - \log_3 3$

c) $y = \log_9 3 + \log_9 3$

d) $\log_2 3 + \log_2 2 = \log_2 y$

e) $\log_3 y = \log_3 3 - 2 \log_3 5$

7. Resolver para x en términos de y en las siguientes ecuaciones:

a) $\log_2 x - \log_2 y = 0$

b) $3 \log_3 y + \log_3 x = 0$

c) $\frac{1}{2} \log_5 y - \frac{1}{5} \log_5 x = 0$

d) $\frac{1}{3} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 y = 0$

e) $\log_8 x - \frac{1}{8} \log_8 y = 0$

8. Obtener los siguientes logaritmos:

a) log 125.3

b) log 12.54

c) log 0.0028

d) log 0.0007519

e) log 987.5

f) log 7450.9

g) log sen 38° 15′

h) log cos 49° 28′

i) log tan 67° 37′

j) log cot 93° 05′

k) log sec 15° 12′

l) log csc 118°

m) log sen 7° 02′

n) log cos 27° 59′

o) log tan 18°

p) log cot 127° 12′

9. Hallar el número o el ángulo agudo positivo, si $0° \leq \theta < 90°$

   a) $\log x = 2.8393$
   b) $\log x = 2.6372$
   c) $\log x = 7.2175$
   d) $\log x = 3.3825$
   e) $\log x = 3.4579$
   f) $\log x = 4.5791$
   g) $\log \operatorname{sen} \theta = 1.5691$
   h) $\log \cos \theta = 1.4693$
   i) $\log \tan \theta = 0.6630$
   j) $\log \cot \theta = 1.0061$
   k) $\log \sec \theta = 0.9361$
   l) $\log \cos \theta = 1.9160$

10. Hallar el valor de las expresiones siguientes:

   a) $\log_3 8$
   b) $\log_2 10$
   c) $\log_5 30$
   d) $\log_4 18.1$
   e) $\log_{1.4} 20$
   f) $\log_5 0.031$
   g) $\log_2 (7.41)^2$
   h) $\log_{1.5} 4.8$

11. Resolver para x las siguientes ecuaciones:

   a) $2^x = 9$
   b) $3^x = 20$
   c) $3^{x+1} = 4^{x-1}$
   d) $3^{3x} = 27$
   e) $10^{x^3} = 8$
   f) $2^{x^2} = 8$
   g) $\log 2x - \log (x-1) = 0$

h) $\log x + \log 4x = 6$

i) $\log x^2 + \log x - 1 = 0$

j) $2 \log x - \log 1000\, x = 0$

k) $\log (2x - 1) - \log x = 2$

l) $\log x - \log x^2 = 0$

12. Graficar las siguientes funciones y dar su dominio y su imagen.

a) $y = 4^x$

b) $y = (1/4)^x$

c) $y = \log_4 x$

d) $y = \log_{1/4} x$

e) $y = \log_3 x$

f) $y = \log_{1/3} x$

g) $y = 3^x$

h) $y = (1/3)^x$

13. Demostrar el teorema 3 de esta unidad.

Sección 9.9

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

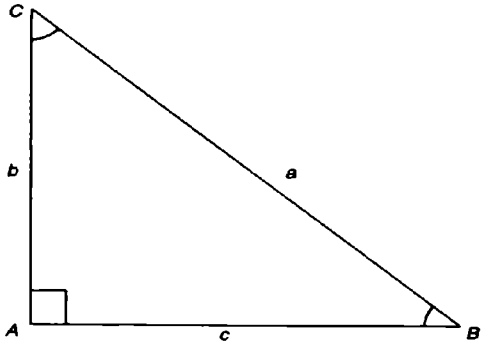
Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Resolver un triángulo rectángulo.
2. Enunciar y demostrar la ley de los senos y de los cosenos.
3. Aplicar la ley de los senos y la ley de los cosenos en la resolución de cualquier triángulo.

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Consideremos el siguiente triángulo rectángulo



donde A, B y C son sus ángulos y sus lados opuestos son a, b y c respectivamente. El ángulo A es el ángulo recto.

Si el ángulo A = 90° y como la suma de los tres ángulos ($A + B + C$) de un triángulo debe ser 180° se tiene que $B + C = 90°$.

El lado "a" que es el opuesto al ángulo recto A se le llama la hipotenusa del triángulo rectángulo, y los lados b y c catetos.

Consideremos las funciones trigonométricas de los ángulos B y C del triángulo rectángulo anterior.

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} \qquad \text{sen } C = \frac{c}{a}$$

$$\cos B = \frac{c}{a} \qquad \cos C = \frac{b}{a}$$

$$\tan B = \frac{b}{c} \qquad \tan C = \frac{c}{b}$$

$$\cot B = \frac{c}{b} \qquad \cot C = \frac{b}{c}$$

$$\sec B = \frac{a}{c} \qquad \sec C = \frac{a}{b}$$

$$\csc B = \frac{a}{b} \qquad \csc C = \frac{a}{c}$$

y se puede observar que

$$\begin{aligned} \text{sen } B &= \cos C & \cot B &= \tan C \\ \cos B &= \text{sen } C & \sec B &= \csc C \\ \tan B &= \cot C & \csc B &= \sec C \end{aligned}$$

sustituyendo $C = 90^\circ - B$ (ya que $B + C = 90^\circ$) tenemos que

$$\begin{aligned} \text{sen } B &\equiv \cos(90^\circ - B) & \cot B &\equiv \tan(90^\circ - B) \\ \cos B &\equiv \text{sen } (90^\circ - B) & \sec B &\equiv \cot(90^\circ - B) \\ \tan B &\equiv \cot(90^\circ - B) & \csc B &\equiv \csc(90^\circ - B) \end{aligned}$$

y se dice que la función sen y cos son COFUNCIONES entre sí, así como la tan y cot son COFUNCIONES entre sí y la sec y csc.

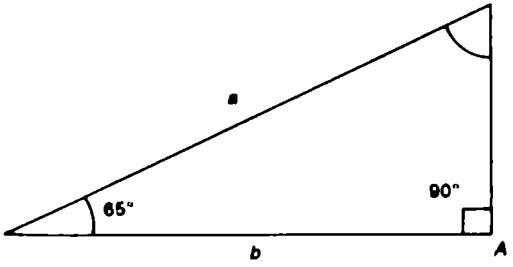
Observación. En general, las identidades anteriores son válidas para cualesquier ángulo θ.

RESOLUCIÓN DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

La expresión "Resolver un triángulo" significará obtener las longitudes de cada uno de los lados y la medida de cada ángulo del triángulo

Ejemplos.

1. *Resolver el* $\triangle ABC$ si $A = 90^\circ$, $B = 25^\circ$ y $C = 10$.
   En el $\triangle$ siguiente se denotarán los datos que se dan y lo que se desea encontrar.



DATOS	OBTENER
$A = 90^\circ$	$C = ?$
$B = 25^\circ$	$a = ?$
$c = 10$	$b = ?$

Como $B + C = 90^\circ$ entonces $C = 90^\circ - 25^\circ$

$$\boxed{C = 65^\circ}$$

Del triángulo ABC se observa que

$$\cos B = \frac{c}{a}$$

$$\cos 25° = \frac{10}{a} \text{ ó } a = \frac{10}{\cos 25}$$

$$a = \frac{10}{0.9063077}$$

$$\boxed{a = 11.03378}$$

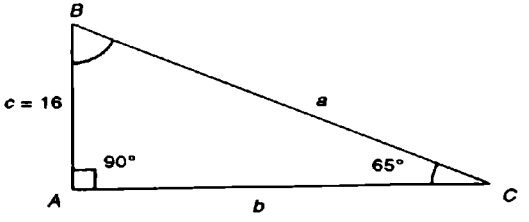
también, $\text{sen } 25° = \frac{b}{a}$ ó $b = a \text{ sen } 25°$

$$b = (11.03378)\ (0.4226182)$$

$$\boxed{b = 4.6630769}$$

y así la solución es $C = 65°$, $a \approx 11.03$ $b = 4.66$

2. Resolver el $\triangle ABC$ si $A = 90°$, $b = 10$ y $c = 16$



DATOS	OBTENER
$A = 90°$	$B = ?$
$b = 10$	$C = ?$
$C = 16$	$a = ?$

Observando el triángulo se tiene que

$$\tan B = \frac{10}{16}$$

$$\tan B = 0.625$$

$$B = \tan^{-1}(0.625)$$

$$\boxed{B = 32.005383^\circ}$$

como $B + C = 90^\circ$ y $B = 32.005383^\circ$

entonces $C = 90^\circ - B$

$$C = 90 - 32.005383^\circ$$

$$\boxed{C = 57.994617^\circ}$$

También $\text{sen } B = \dfrac{10}{a}$

$$a = \frac{10}{\text{sen } B}$$

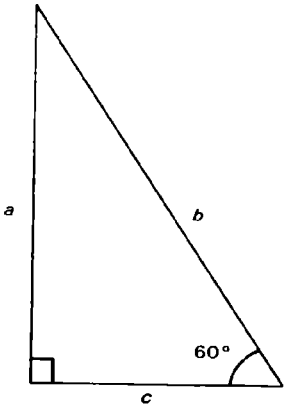
$$a = \frac{10}{0.8479983}$$

$$\boxed{a = 11.792476}$$

Por lo que la solución del Δ es

$B \approx 32^\circ$ $\quad C \approx 57.99^\circ$ $\quad a \approx 11.79$

3. La parte superior de una escalera de 5 metros está recostada contra el borde del techo de una casa. Si el ángulo de inclinación de la escalera desde la horizontal es de 60°. ¿Cuál es la altura aproximada de la casa y qué tan lejos está la parte inferior de la escalera de la base de la casa?



Variables — b = *altura de la casa.*
c = distancia de la base de la casa a la parte inferior de la escalera.

Datos — altura escalera = 5
ángulo de inclinación = 60°

Obtener — $b = ?$ $c = ?$

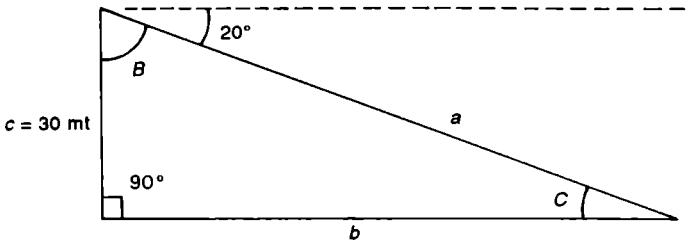
De la figura se puede afirmar que

$$\text{sen } 60° = \frac{b}{5} \qquad \cos 60° = \frac{c}{5}$$

$$b = 5 \text{ sen } 60° \qquad c = 5 \cos 60°$$
$$b = 5\ (0.8660254) \qquad c = 5\ (0.5)$$
$$b = 4.330127 \qquad c = 2.5$$

entonces la altura de la casa es aproximadamente 4.33 y la distancia de la base de la casa a la parte inferior de la escalera es 2.5.

4. Desde la punta de un faro, a 30 metros sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión (el ángulo hacia abajo desde la horizontal) en dirección a una boya es de 20°. ¿A qué distancia está la boya a la base del faro?



DATOS
c = 30 mts (altura de la torre)
ángulo de depresión = 20°

OBTENER
b = distancia de la base de la torre a la boya

Del triángulo de la figura anterior se puede decir que

$$B + 20 = 90^\circ$$

$$B = 90^\circ - 20^\circ$$

$$\boxed{B = 70^\circ}$$

y como $B + C = 90^\circ$

entonces $C = 90^\circ - B$

$= 90^\circ - 70^\circ$

$$\boxed{C = 20^\circ}$$

Además, $\tan C = \dfrac{c}{b}$

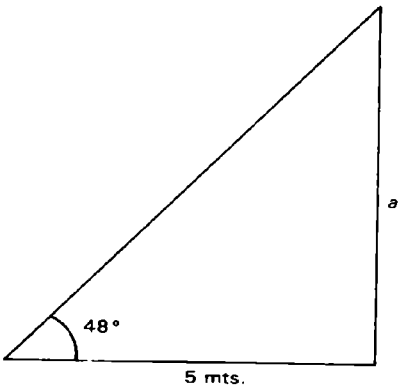
$$\tan 20^\circ = \frac{3c}{b}$$

$$b = \frac{3c}{\tan 20^\circ} = \frac{30}{0.363972} = 82.424323.$$

Es decir $b = \boxed{82.424323}$

Por lo que la distancia de la boya a la base del faro es de aproximadamente 82.42 mts.

5. Un punto en el suelo se encuentra a 5 mts de la base de un árbol. El ángulo de elevación (el ángulo hacia arriba desde la horizontal) de dicho punto a la parte más alta del árbol es de 480.
Calcular la altura del árbol.



DATOS
Ángulo de elevación = 48°
Distancia del punto a
la base del árbol = 5 mts

OBTENER
a = Altura del árbol

$$\tan 48^\circ = \frac{a}{5}$$

$$a = 5 \tan 48^\circ$$
$$a = 5(1.1106125) = 5.5530626$$

Por lo que la altura del árbol es aproximadamente 5.55 mts.

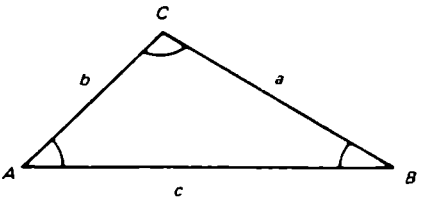
TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Para la resolución de un triángulo oblicuángulo se enunciarán y demostrarán dos leyes que son conocidas como leyes de los senos y cosenos.

En la resolución de triángulos oblicuángulos, podemos distinguir cuatro casos respecto a sus datos, que son:

1. Cuando se conocen dos ángulos y un lado.
2. Cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
3. Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido.
4. Cuando se conocen los tres lados.

Se denotarán los ángulos de un triángulo ABC por A, B y C y los lados opuestos correspondientes por a, b, c.



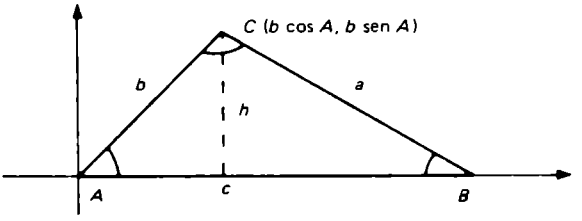
Ley de los senos

En todo triángulo ABC, las longitudes de sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Demostración.

Tracemos un sistema de coordenadas de modo que uno de los ángulos quede en posición normal.



Las coordenadas del punto C son $(b \cos A, b \text{ sen } A)$. En el triángulo se tiene lo siguiente:

$$\text{sen } A = \frac{h}{b} \quad \text{y} \quad \text{sen } B = \frac{h}{a}$$

o

$$h = b \text{ sen } A \quad \text{y} \quad h = a \text{ sen } B$$

igualando tenemos:

$$b \text{ sen } A = a \text{ sen } B$$

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{a}{\text{sen } A} \tag{1}$$

Si colocamos el ángulo B en posición normal y si procedemos de la forma anterior, se obtiene

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \tag{2}$$

y tomando en cuenta las igualdades 1 y 2 tenemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

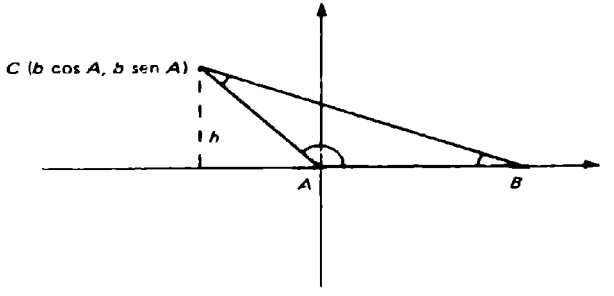
Esta ley se usa cuando los datos que se conocen son uno de sus lados y su ángulo opuesto.

Observaciones.

a) Ya que el seno de un ángulo es positivo en el primero y segundo cuadrantes, la ley de los senos no nos sirve si no se especifica el cuadrante del ángulo.

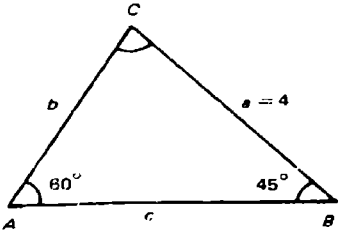
b) En el caso 2 cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos pueden haber dos soluciones, una o ninguna. El triángulo para el que puede haber dos soluciones es aquel en el que el ángulo dado es agudo y su lado opuesto es el menor de los dos lados conocido.

c) Para la demostración de la ley de los senos se escogió que el ángulo fuera agudo; si el ángulo es obtuso se procederá de la misma forma para su demostración.



Ejemplos.

6. Resolver el triángulo ABC, si $A = 60°$, $B = 45°$ y $a = 4$.



Por propiedades se sabe que la suma de los tres ángulos internos de un triángulo es de 180°; o sea: $A + B + C = 180°$. Por lo tanto si $A = 60°$ y $B = 45°$, entonces $C = 180° - (60° + 45°)$, $C = 75°$.

Por la ley de senos tenemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

y

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$$

sustituyendo sus valores:

$$b = \frac{4 \operatorname{sen} 45°}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = 3.26$$

$$b = 3.26$$

Utilizando de nuevo la ley de senos para encontrar c, tenemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

y sustituyendo sus valores:

$$c = \frac{4 \operatorname{sen} 75°}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{4\,(.9659)}{.8660} = 4.46$$

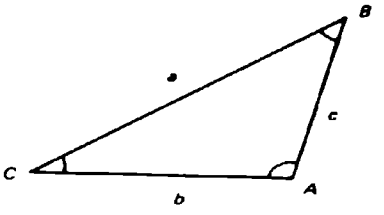
$$c = 4.46$$

La solución es: $C = 75°$, $b = 3.26$ y $c = 4.46$

7. Resolver el triángulo ABC si:

$A = 102°10'$, $C = 25°20'$ y $c = 172.5$

En la figura siguiente podemos observar los datos que tenemos y lo que se desea encontrar:



tenemos:

$A = 102°10'$ $\qquad a = ?$

$C = 25°20'$ $\qquad b = ?$

$c = 172.5$ $\qquad B = ?$

$B = 180° - (102°10' + 25°20')$

$B = 52°30'$

De acuerdo a la ley de senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad \text{y} \quad \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

y así:

$$a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} \quad \text{y} \quad b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$$

Sustituyendo valores:

$$a = \frac{172.5 \operatorname{sen} 102°10'}{\operatorname{sen} 25°20'} \quad \text{y} \quad b = \frac{172.5 \operatorname{sen} 52°30'}{\operatorname{sen} 25°20'}$$

$$a = \frac{(172.5)(\operatorname{sen} 102.1666°)}{\operatorname{sen} 25.3333°} \qquad b = \frac{(172.5)(\operatorname{sen} 52.5°)}{\operatorname{sen} 25.3333°}$$

$$a = \frac{168.62543}{0.4278837} \qquad b = \frac{136.85345}{0.4278837}$$

$$\boxed{a = 394.09174} \qquad \boxed{b = 319.83796}$$

y así la solución es:

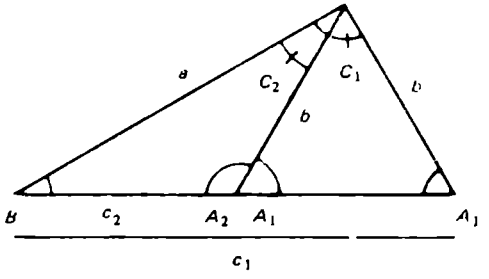
$$B = 52°30' \qquad a \approx 394.1 \qquad \text{y} \qquad b \approx 319.84$$

8. Resolver el triángulo ABC si:

$$b = 14.53 \ , \qquad a = 20.53 \qquad \text{y} \qquad B = 27°20'$$

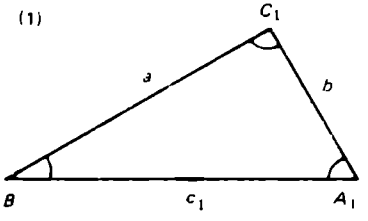
Como B es un ángulo agudo y $b < a$ habrá dos soluciones, que podemos ilustrar en la siguiente figura:

(3)

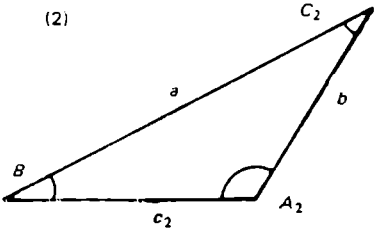


la cual se puede dividir en dos triángulos que son:

(1)



(2)



Al resolver el triángulo 1 tenemos, por ley de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A_1} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$\operatorname{sen} A_1 = \frac{a \operatorname{sen} B}{b}$$

Sustituyendo sus valores:

$$\operatorname{sen} A_1 = \frac{20.53 \operatorname{sen} 27°20'}{14.53}$$

Sustituyendo 20′ por $\left(\frac{20}{60}\right)^{\circ} = \left(\frac{2}{6}\right)^{\circ} = \left(0.333\right)^{\circ}$ en lo anterior

Tenemos, $\text{sen } A_1 = \dfrac{(20.53)\ \text{sen } 27.3333^{\circ}}{14.53}$

$$\text{sen } A_1 = \frac{(20.53)(0.4591664)}{14.53}$$

$$\text{sen } A_1 = \frac{9.4266873}{14.53}$$

$$\text{sen } A_1 = 0.648774$$

$$A_1 = \text{sen}^{-1}\ (0.648774)$$
$$A_1 = 40.449236$$
$$A_1 \approx (40.43^{\circ})$$
$$A_1 \approx 40^{\circ}(26.9)'$$

$$\boxed{A_1 \approx 40^{\circ}27'}$$

$$C_1 = 180 - (40^{\circ}27' + 27^{\circ}20'$$
$$C_1 = 180 - (67^{\circ}47')$$
$$C_1 = 179^{\circ}60' - 67^{\circ}47'$$

$$\boxed{C_1 = 112^{\circ}13'}$$

Por ley de los senos

$$\frac{C_1}{\text{sen } C_1} = \frac{a}{\text{sen } A_1}$$

$$C_1 = \frac{\text{a sen } C_1}{\text{sen } A_1}$$

$$C_1 = \frac{(20.53)\ \text{sen } 112^{\circ}13'}{\text{sen } 40^{\circ}27'}$$

$$C_1 = \frac{(20.53)\ \text{sen } (112.21666)^{\circ}}{\text{sen } (40.45)^{\circ}}$$

$$C_1 = \frac{(20.53)(0.9257606)}{0.6487842}$$

$$C_1 = \frac{19.005865}{0.6487842}$$

$$C_1 = (29.294587)$$

$$\boxed{C_1 \approx 29.29}$$

Para resolver el triángulo 2 debemos tener en cuenta que el triángulo 3 está formado a su vez, por dos triángulos, el triángulo 2 y uno más que es isósceles. También podemos ver que el ángulo A_2 es suplemento del ángulo A_1. O sea:

$$A_2 = 180° - A_1 = 180° - 40°27'$$

$$\boxed{A_2 = 139°33'}$$

$$C_2 = 180° - (A_2 + B)$$

$$= 180° - (166°53')$$

$$C_2 = 13°7'$$

$$\frac{c_2}{\operatorname{sen} C_2} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$c_2 = \frac{b \operatorname{sen} C_2}{\operatorname{sen} B}$$

Sustituyendo valores.

$$c_2 = \frac{14.53 \operatorname{sen} 13°7'}{\operatorname{sen} 27°20'} = \frac{(14.53) \operatorname{sen} (13.116666)}{\operatorname{sen} (27.3333)}$$

$$= \frac{(14.53)(0.2269346)}{0.4591664}$$

$$= 7.1811869$$

$$\approx 7.18$$

Para el triángulo 1

$a = 20.53$
$b = 14.53$
$c_1 = 29.29$
$A_1 = 40°27'$
$B_1 = 27°20'$
$C_1 = 112°13'$

Para el triángulo 2

$a = 20.53$
$b = 14.53$
$c_2 = 7.18$
$A_2 = 139°33'$
$B = 27°20'$
$C_2 = 13°7'$

Ahora estableceremos otra propiedad llamada ley de los cosenos, que podremos usar para resolver los otros dos casos de triángulos:

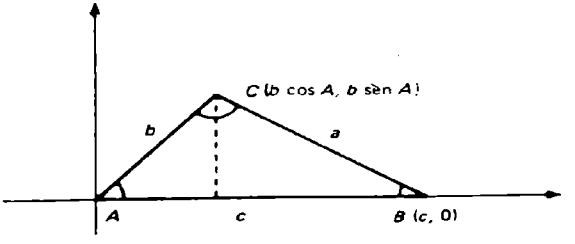
Ley de los cosenos

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de los mismos lados por el coseno del ángulo que forman. Así, en un triángulo ABC se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Demostración.

Consideremos el triángulo BAC colocado en un sistema de coordenadas de la siguiente forma:



Como el ángulo A está en posición normal, las coordenadas del vértice C son $(b \cos A, b \text{ sen } A)$ y las coordenadas de B son $(c, 0)$. La distancia entre los vértices B y C es a y utilizando la fórmula de distancia entre los dos puntos $(c, 0)$ y $(b \cos A, b \text{ sen } A)$ se tiene:

$$a = \sqrt{(b \cos A - c)^2 + (b \operatorname{sen} A - 0)^2}$$

$$a = \sqrt{b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 A}$$

$$a = \sqrt{(b^2 \cos^2 A + b^2 \operatorname{sen}^2 A + c^2 - 2bc \cos A}$$

$$a = \sqrt{b^2 (\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) + c^2 - 2bc \cos A}$$

$$a = \sqrt{b^2 (1) + c^2 - 2bc \cos A}$$

y elevando al cuadrado ambos términos concluimos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Para llegar a las otras dos expresiones de esta ley, se procederá de forma similar, considerando primero el ángulo B en posición normal y después el ángulo C.

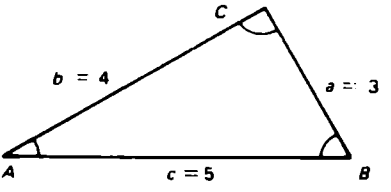
La ley de los cosenos no será útil para encontrar la longitud de un lado cuando se conocen los otros dos y el ángulo comprendido entre ellos, o para encontrar un ángulo cuando se conocen los tres lados.

Al utilizar la ley de los cosenos se puede identificar a qué cuadrante pertenece el ángulo, ya que si cos A es positivo, A pertenece al primer cuadrante y si cos A es negativo, A pertenece al segundo cuadrante. Esto presenta una ventaja sobre la ley de los senos, ya que en ella no podremos identificar a qué cuadrante pertenece el ángulo porque en el primer y segundo cuadrante el seno es positivo.

Ejemplos.

9. Resolver el triángulo ABC, si:

$$a = 3, \qquad b = 4, \qquad c = 5$$



Utilizando la ley de cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos A = \frac{16 + 25 - 9}{2(4)(5)}$$

$$\cos A = .8000$$

$$A = 36°52'$$

Para encontrar el ángulo B o C, podemos de nuevo utilizar la ley de cosenos. Pero, sin embargo, se simplificarán las operaciones si utilizamos la ley de senos. Por tanto:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{4 \operatorname{sen} 36°52'}{3}$$

$$B = 53°14'$$

$$C = 180° - (B + A) = 180° - (36°52' + 53°14')$$

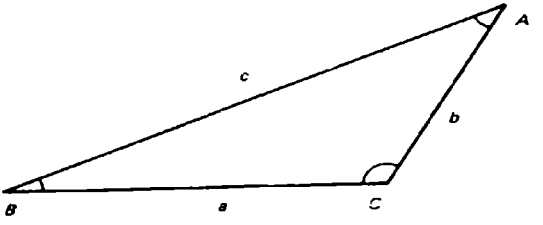
$$C = 89°44'$$

Y así, la solución es:

$$A = 36°52', \qquad B = 53°14' \quad \text{y} \quad C = 89°44'$$

10. Resolver el triángulo ABC, si:

$$a = 41.5, \qquad c = 72.4 \quad \text{y} \quad B = 30°15'$$



Por ley de cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

sustituyendo

$$b^2 = (41.5)^2 + (72.4)^2 - 2\,(41.5)\,(72.4)\cos 30°15'$$
$$b^2 = 1722.25 + 5241.76 - 6009.2 \cos (30.25)°$$
$$b^2 = 6964.01 - 5\,190.9603$$
$$b^2 = 1773.0497$$
$$b = \sqrt{1773.0497}$$

$$\boxed{b = 42.107597}$$

Por la ley de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{a \operatorname{sen} B}{b}$$

sustituyendo:

$$\operatorname{sen} A = \frac{41.5 \operatorname{sen} 30°15'}{42.1}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{41.5 \operatorname{sen} (30.25)°}{42.107597}$$

$$= \frac{41.5\,(0.5037739)}{42.107597}$$

$$\operatorname{sen} A = 0.4965047$$
$$A = \operatorname{sen}^{-1} (0.4965047)$$
$$A = (29.76)°$$
$$A = 29°(45.6)'$$

$$\boxed{A \approx 29°46'}$$

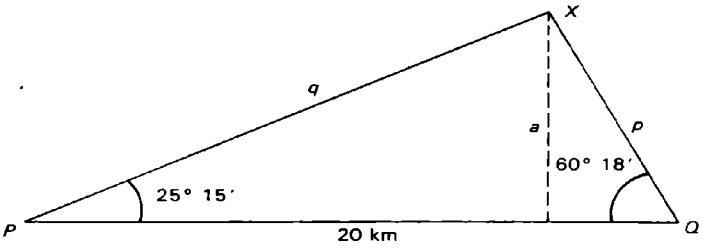
$$C = 180° - (30°15' + 29°46')$$
$$C = 180 - (59°(61)') = 180 - (60°01')$$
$$C = 179°60' - 60°01'$$

$$\boxed{C = 119°59'}$$

y así la solución es

$b = 42.1$, $\quad A = 29°46'$ y $C = 119°59'$

11. Los ángulos de elevación de un globo con respecto a dos puntos: P y Q sobre el mismo plano horizontal son de $25°15'$ y $60°18'$ respectivamente. Si la distancia entre los puntos P y Q es de 20 kms. y el globo se encuentra entre P y Q en el mismo plano vertical, obtener la altura aproximada del globo.



DATOS	OBTENER
$P = 25°15'$	$a =$ altura desde la horizontal
$Q = 60°18'$	PQ al Globo
$\overline{PQ} = 20$ km.	

Como $P + G + Q = 180°$ entonces $G = 180 - P - Q$

$G = 180 - 25°15 - 60°18' = 180° - 85°33'$

$G = 179°60' - 85°33'$

$$\boxed{G = 94°27'}$$

Por ley de senos se tiene que

$$\frac{p}{\text{sen } p} = \frac{20}{\text{sen } G}$$

$$p = \frac{20 \text{ sen } p}{\text{sen } G}$$

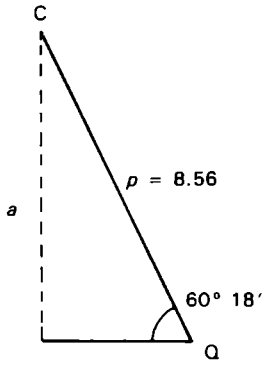
$$p = \frac{20 \text{ sen } 25°15'}{\text{sen } 94°27'} = \frac{20 \text{ sen } (25.25)°}{\text{sen } (94.45)°}$$

$$p = \frac{20(0.4265617)}{0.9969854}$$

$$p = 8.5571704$$

$$\boxed{p \approx 8.56 \text{ km}}$$ distancia de Q al Globo

En la figura del triángulo se observa el siguiente triángulo rectángulo.



Por lo que

$$\text{sen } 60°18' = \frac{a}{8.5571704}$$

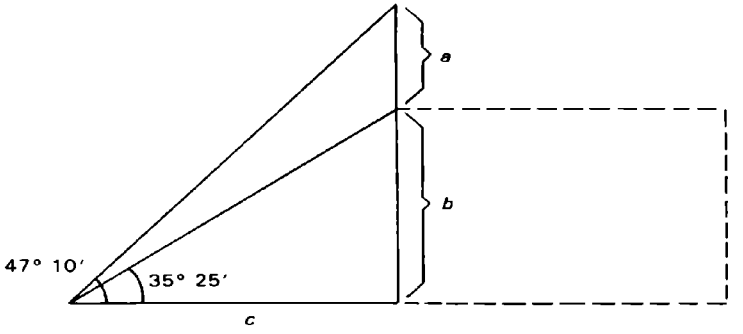
ó

$$a = (\text{sen } 60°18')(8.5571704)$$
$$a = (\text{sen}(60°.3)°)(8.5571704)$$
$$a = (0.8686315)(85571704)$$

$$\boxed{a = 7.4330279 \text{ km}}$$

Así se tiene que la altura del globo desde la horizontal $P\,Q$ es de aproximadamente 7.43 km.

12. En lo alto de un edificio se encuentra un astabandera de 10 metros de altura. Desde un punto situado en el mismo plano horizontal que la base del edificio, los ángulos de elevación de la parte superior e inferior del astabandera son respectivamente 47°10′ y 35°25′. Obtener la altura del edificio.



Datos

* Ángulo de elevación al pie del asta bandera = 35°25′
* Ángulo de elevación a la parte superior del asta bandera = 47°10′
* Altura del astabandera a = 10 mts.
* c = Distancia desde el punto de observación a la base del edificio.

Obtener

Altura del edificio = b = ?

$$\tan 35°25' = \frac{b}{c};\ tan\ 47°10' = \frac{a + b}{c}$$

$$\tan 47°10' = \frac{10 + b}{c}$$

despejaremos c en ambas ecuaciones

$$c = \frac{b}{\tan 35°25'}\ ;\ c = \frac{10 + b}{\tan 47°10'}$$

$$c = \frac{b}{0.7111009}\ ;\ c = \frac{10 + b}{1.0786423}$$

y como $c = c$

entonces $$\frac{b}{0.7111009} = \frac{10 + b}{1.0786423}$$

$$\begin{aligned} b(1.0786423) &= (10 + b)(0.7111009) \\ b(1.0786423) &= 10(0.7111009) + b\,(0.7111009) \\ b(1.0786423) - b(0.7111000) &= 7.111009 \\ b(1.0786423 - 0.7111009) &= 7.111009 \\ b(0.3675414) &= 7.111009 \\ b &= \frac{7.111009}{0.3675414} \\ b &= 19.347505 \end{aligned}$$

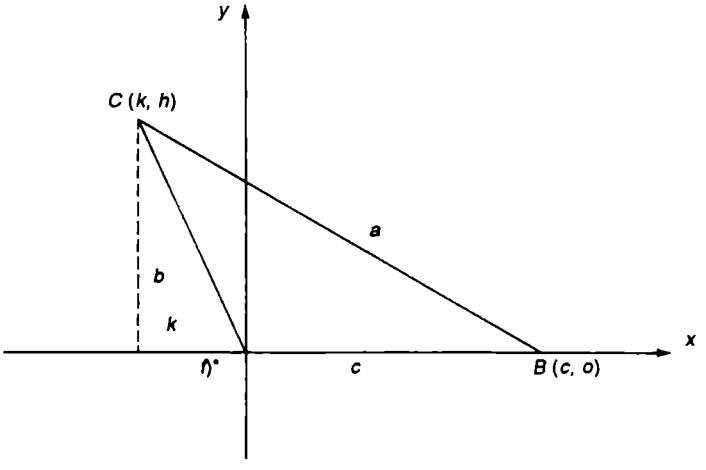
Por lo que la altura del edificio es aproximadamente 19.35 mts.

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Utilizando la ley de los cosenos se puede deducir una nueva fórmula para obtener el área de un triángulo en vez de la conocida fórmula.

$$A = \frac{\mathrm{b} \times \mathrm{h}}{2}$$

donde b = base del triángulo, h = altura del triángulo y A es el área.



h es la altura del triángulo y como se vio anteriormente en la ley de los senos las coordenadas del C (h, k) son C $(b \cos A^*, b \text{ sen } A^*)$ es decir.

$$h = b \text{ sen } A^*$$

En la figura mostrada la base es "c" por lo que el área del triángulo es

$$A = \frac{c\,h}{2}$$

$$A = \frac{c\,(b \text{ sen } A^*)}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\, b\, c \text{ sen } A^*}$$

Observación.

En la figura mostrada se toma al ángulo A^* en posición normal, y tomando a los ángulos B ó C en posición normal se pueden deducir las siguientes fórmulas respectivamente.

$$A = \frac{1}{2}\, a\, b \text{ sen } C \;;\; A = \frac{1}{2}\, a\, c \text{ sen } B$$

De lo anterior se puede llegar al siguiente resultado.

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

El ÁREA de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos lados cualesquiera con el seno del ángulo que forman dichos lados.

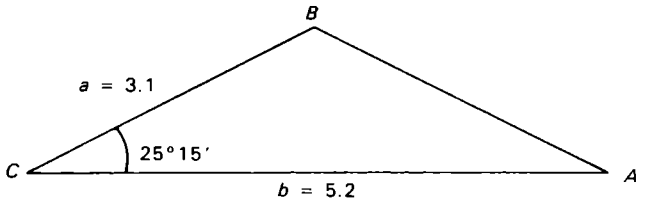
Es decir,

$$A = \frac{1}{2}\, bc \text{ sen } A^* \qquad A = \frac{1}{2}\, ba \text{ sen } C$$

$$\text{ó } A = \frac{1}{2}\, ac \text{ sen } B$$

Ejemplos.

13. Obtener el área del triángulo ABC si $a = 3.1$, $b = 5.2$ y $C = 25°15'$



$$\text{Área} = \frac{1}{2} ba \text{ sen } C$$

$$= \frac{1}{2} (3.1)(5.2) \text{ sen } 25°15'$$

$$= (8.06)(0.4265687) = 3.438144$$

En una de las fórmulas anteriores del área de un triángulo se harán algunas operaciones.

$$A = \frac{1}{2} bc \text{ sen } A^*$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} b^2c^2 \text{ sen}^2 A^*}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} b^2c^2 (1 - \cos^2 A^*)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} b^2c^2 (1 - \cos A^*)(1 + \cos A^*)}$$

$$** A = \sqrt{\frac{1}{2} bc (1 - \cos A^*) \frac{1}{2} ba (1 + \cos A^*)}$$

Por la ley de los cosenos $\cos A^* = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

y $1 - \cos A^* = 1 - \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2\,bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$$

$$1 - \cos A^* = \frac{[a + (b - c)][a - (b - c)]}{2bc}$$

$$1 - \cos A^* = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc}$$

y $$1 + \cos A^* = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{b^2 + 2\,bc + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$\boxed{1 + \cos A^* = \frac{[(b + c) + a]\,[(b + c) - a]}{2bc}}$$

Ahora si sustituimos las expresiones de $1 + \cos A^*$ y $1 - \cos A^*$ en ** se tiene que

$$\text{Área} = A = \sqrt{\frac{1}{2}\,bc\,\frac{(a+c-c)(a-b+c)}{2\,bc} \cdot \frac{1}{2}\,bc\,\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2\,bc}}$$

$$A = \sqrt{\frac{(a+b-c)}{2}\,\frac{(a-b+c)}{2}\,\frac{(a+b+c)}{2}\,\frac{(b+c-a)}{2}}$$

Si se considera a $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ entonces

$$s - a = \frac{1}{2}(a+b+c) - a \quad ; \quad s - b = \frac{1}{2}(a+b+c) - b$$

$$s - a = \frac{a+b+c-2a}{2} \quad ; \quad s - b = \frac{a+b+c-2b}{2}$$

$$\boxed{s - a = \frac{b+c-a}{2}} \quad ; \quad \boxed{s - b = \frac{a-b+c}{2}}$$

$$s - c = \frac{1}{2}(a+b+c) - c$$

$$s - c = \frac{a+b+c-2c}{2}$$

$$\boxed{s - c = \frac{a+b-c}{2}}$$

y regresando a la fórmula del área para sustituir los valores anteriores se tiene que

$$A = \sqrt{(s-c)(s-b)(s)(s-a)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

Esta fórmula del área es conocida como la FÓRMULA DE HERÓN.

FÓRMULA DE HERÓN

El área de un triángulo con lados a, b y c está dada por

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

Ejemplo 14.

Los lados de un terreno triangular miden 100, 84 y 44 mts de longitud. Obtener el área del terreno.

Por la fórmula de Herón se tiene que

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(100+84+44) = 114$

así,

$$A = \sqrt{114\,(114-100)(114-84)(114-44)}$$

$$A = \sqrt{114\,(14)(30)(70)} = \sqrt{335\,1600} = 1830.7376$$

Por lo que el área del terreno es aproximadamente de 1830.74 mts.

Ejercicios

1. Calcular el elemento del triángulo ABC que se pida, utilizando la ley de senos o cosenos, según convenga.

a)	$A = 120°$,	$B = 45°$	y	$b = 12$	encuentre a
b)	$a = 3$,	$b = 4$	y	$C = 45°$	encuentre c
c)	$A = 60°$,	$B = 30°$	y	$a = 5$	encuentre b
d)	$a = 3$,	$b = 4$	y	$c = 5$	encuentre C
e)	$B = 45°$,	$C = 120°$	y	$b = 3\sqrt{2}$	encuentre c
f)	$a = 7$,	$c = 14$	y	$B = 120°$	encuentre b
g)	$a = 3$,	$b = 1$	y	$A = 120°$	encuentre B
h)	$B = 45°$,	$b = 9$	y	$a = 6\sqrt{3}$	encuentre A

2. Resolver los siguientes triángulos:

a)	$c = 3.21$,	$C = 70°18'$	y	$B = 44°30'$
b)	$a = 78.4$,	$b = 61.21$	y	$c = 73.5$

c) $A = 25°3'$, $C = 45°13'$ y $b = 118.5$

d) $a = 83.5$, $b = 84.61$ y $c = 41.93$

e) $c = 0.6440$, $C = 40°23'$ y $B = 125°13'$

f) $a = 548.0$, $b = 335.2$ y $c = 216.7$

g) $c = 27°43'$, $A = 35°21'$ y $b = 467.1$

h) $a = 3.95$, $b = 4.36$ y $c = 2.48$

i) $b = 32$, $a = 26$ y $A = 29°$

j) $C = 27°$, $b = 9$ y $c = 8$

k) $c = 100$, $b = 120$ y $A = 43°$

l) $c = 72.9$, $a = 39.1$ y $B = 83°12'$

3. Demuestre que en todo triángulo ABC, el área K está dada por:

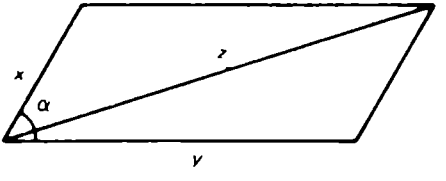
$$K = (1/2)bc \operatorname{sen} A.$$

(Utilice ley de senos).

4. Encuentre una fórmula que dé el área de un triángulo ABC cuando se conocen a, c y B.

5. Si x, y, z son los lados y la diagonal, respectivamente, del paralelogramo siguiente, y si α es el ángulo que se muestra en la figura, establecer la siguiente igualdad:

$$z^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha$$



6. Utilizar la ley de los cosenos para establecer el teorema de Pitágoras.

7. Demostrar que si un ΔABC es tal que sus lados satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$ entonces ΔABC es un triángulo rectángulo con $C = 90°$.

8. Desde un punto a nivel del suelo y a una distancia de 149.9 metros del pie de un muro, el ángulo de elevación del extremo superior del muro es de 35° ¿Qué altura tiene el muro?
(Cuando el objeto observado está sobre el plano horizontal el ángulo entre la visual dirigida hacia el objeto y la horizontal se llama ángulo de

elevación; si el objeto está bajo el plano horizontal, el ángulo se llama ángulo de depresión.)

9. En una circunferencia de radio 8.31 cms. ¿Cuánto mide el ángulo del centro que subtiende una cuerda de 3.93 cm?

10. Un barco es observado desde dos puntos diferentes en una playa recta. Estos puntos distan entre sí 800 mts. Los ángulos reportados por los observadores fueron 75° y 58°. Encuentre la distancia del barco hasta la orilla y las distancias entre el barco y cada uno de los observadores.

11. Si las diagonales de un paralelogramo miden 10 y 12 respectivamente, y forman un ángulo de 28°, encontrar las longitudes de sus lados.

12. Si los lados de un paralelogramo miden 47 y 64 cms y una de sus diagonales mide 23 cms, encontrar los ángulos del paralelogramo.

13. Tres ciudades diferentes, A, B y C, distan entre sí 20, 22, y 34 kms, o sea que la distancia entre AB es de 34; entre BC de 20 y de AC de 22 kms. Se desea prolongar la carretera de la ciudad A a la C para que un nuevo camino, que parte de la ciudad B, la encuentre en ángulo recto en un punto P. Hallar la distancia de estas nuevas carreteras.

Sección 9.10

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Resolver ecuaciones trigonométricas.

Así como en el álgebra tuvimos ecuaciones lineales, cuadráticas, cúbicas o polinomiales, también en trigonometría tendremos ecuaciones que contengan funciones trigonométricas que llamaremos *ecuaciones trigonométricas*. Para resolver una ecuación trigonométrica, tendremos que encontrar todos los ángulos o números reales que la satisfagan.

Si θ es la solución de una ecuación trigonométrica, también lo será $\theta + n\ (360^\circ)$, donde $n \in Z$ ya que θ y $\theta + n\,(360^\circ)$ son ángulos coterminales.

Puesto que no hay una forma general para una ecuación trigonométrica, es de esperarse que no exista un método general para su solución. En seguida resolveremos algunos tipos clásicos de ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo.

1. $\operatorname{sen} x = 1/2$

Podemos consultar una tabla para encontrar los valores de x y tendríamos:

$$x = 30°$$

que será una solución.

Sabemos también que sen x es positivo en el segundo cuadrante, por lo que habrá otra solución, que es:

$$x = 150°$$

Además, sen $30° = \operatorname{se}(30° + n\ 360°)$, donde $n \in Z$. Y sen $150° = \operatorname{sen}(150° + n\ 360°)$, $n \in Z$.

Y así, la solución la podemos escribir:

$$\{\ 30° + n\ 360°\ ,\ 150° + n\ 360°\ \}$$

También podemos expresar esto en radianes y tendríamos:

$$\left\{\ \frac{\pi}{6} + 2n\pi\ ,\ \frac{5\pi}{6} + 2n\pi\ \right\}$$

donde $n \in Z$

Para resolver una ecuación trigonométrica podemos utilizar todo lo referente a la solución de ecuaciones algebraicas, teniendo cuidado de no perder raíces o soluciones cuando sea necesario dividir entre un número ambos términos de una ecuación o cuando se necesite extraer raíces.

También, si ambos términos de una ecuación se elevan al cuadrado o se multiplican por un número, se debe verificar si no se han introducido raíces extrañas. Para esto se recomienda comprobar cada una de las soluciones.

Con todo lo anterior, podemos concluir que para resolver algunas ecuaciones trigonométricas, una parte de la solución será algebraica y otra trigonométrica. En otros casos su solución sólo será trigonométrica.

Ejemplos.

2. Resolver la ecuación $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Sabemos que:

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad \cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de donde, $\theta = 45°$ y $\theta = 315°$ y la solución completa será:

$$\{\, 45° \pm n\,360°,\ 315° \pm n\,360° \,\}$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Al resolver este ejemplo no utilizamos para nada el álgebra, solamente la trigonometría.

3. Resolver la ecuación:

$$2 \operatorname{sen} u = -\sqrt{3} \qquad (u \text{ está en radianes}).$$

Despejando sen u tenemos:

$$\operatorname{sen} u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Y si sabemos que:

$$\operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

y así: $u = \dfrac{4\pi}{3}$ y $u = \dfrac{5\pi}{3}$

Su solución completa es:

$$\left\{ \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \qquad \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \right\}, \quad n \in Z.$$

4. Resolver la ecuación:

$$\tan u \operatorname{sen} u - \sqrt{3} \operatorname{sen} u = 0, \quad 0 \leq u < 2\pi.$$

Factorizando;

$$\operatorname{sen} u\,(\tan u - \sqrt{3}) = 0$$

$$\operatorname{sen} u = 0 \qquad \text{o} \qquad \tan u - \sqrt{3} = 0$$

$$u = 0, \pi \qquad \tan u = \sqrt{3}$$

$$u = \frac{\pi}{3}, \ \frac{4\pi}{3}$$

La solución es $\{\, 0, \pi, \pi/3, 4\pi/3 \,\}$

5. Resolver la ecuación:

$$\operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

Como esta ecuación no se puede factorizar, aplicaremos la fórmula general, tomando como variable a sen x.

$$\text{sen } x = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{2} = 1 \pm 1.414$$

o sea:

$$\text{sen } x = 1 + 1.414 \qquad \text{sen } x = 1 - 1.414$$

$$\text{sen } x = 2.414 \qquad \text{sen } x = -0.414$$

En esta parte no hay solución, ya que el seno de cualquier ángulo no es mayor que 1.

Utilizando tablas encontramos:

$x = 204°30'$ y $x = 335°30'$

Y la solución total es:

$$\{ 204°30' + n\,360° \ , \ 335°30' + n\,360° \ \} \ , \ n \in Z.$$

La solución de ecuaciones trigonométricas donde hay diferentes funciones o funciones trigonométricas de ángulos compuestos, se obtiene reduciendo la ecuación a una forma más simple, utilizando identidades trigonométricas y cuyas soluciones deben incluir todas las soluciones de la ecuación original.

Ejemplos.

6. Resolver $3 \text{ sen } \theta - \cos^2 \theta - 3 = 0$, donde $0 \leqslant \theta < 360°$

Por identidades tenemos:

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Así:
$$3 \text{ sen } \theta - \cos^2 \theta - 3 = 0$$
$$3 \text{ sen } \theta - (1 - \text{sen}^2 \theta) - 3 = 0$$
$$3 \text{ sen } \theta - 1 + \text{sen}^2 \theta - 3 = 0$$
$$\text{sen}^2 \theta + 3 \text{ sen } \theta - 4 = 0$$

factorizando:

$$(\text{sen}\,\theta + 4)(\text{sen}\,\theta - 1) = 0$$
$$\text{sen}\,\theta = -4 \quad \text{o} \quad \text{sen}\,\theta = 1$$

θ no tiene solución, ya que: $\theta = 90°$

$$-1 \leqslant \text{sen}\,\theta \leqslant 1$$

Solución: $\theta = 90°$

7. Resolver la ecuación:

$$\text{sen}\,2u\,\text{sen}\,u + \cos u = 0$$
$$0 \leqslant u < 2\pi$$

Por identidades, sen $2u$ = 2 sen u cos u, así que:

$$\text{sen}\,2u\,\text{sen}\,u + \cos u = 0$$
$$2\,\text{sen}\,u\cos u\,\text{sen}\,u + \cos u = 0$$

factorizando, $\cos u\,(2\,\text{sen}^2 u + 1) = 0$

$$\cos u = 0 \quad \text{o} \quad 2\,\text{sen}^2 u + 1 = 0$$
$$u = \pi/2,\ 3\pi/2 \qquad 2\,\text{sen}^2 u = -1$$
$$\text{sen}^2 u = -1/2$$
$$\text{sen}\,u = \pm\sqrt{-1/2}$$

que no tendrá solución.

Solución: $u = \pi/2\ ,\ 3\pi/2$.

8. Resolver $\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1/2$.

$$0 \leqslant \theta < 360°$$

por identidades:

$$\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos 2\theta.$$

Así

$$\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1/2$$

$$\cos 2\theta = 1/2$$

Como $0 \leqslant \theta < 360°$ entonces $0 \leqslant 2\theta < 720°$

Así que:

$$\cos 2\theta = 1/2$$

Si:

$$2\theta = 60°, \quad 2\theta = 300°, \quad 2\theta = 420°, \quad 2\theta = 660°$$
$$\theta = 30°, \quad \theta = 150°, \quad \theta = 210°, \quad \theta = 330°$$

Solución: $\{ 30°, 150°, 210°, 330° \}$

Ejercicios

1. Encontrar todas las soluciones de las ecuaciones trigonométricas siguientes:

   a) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$
   b) $\operatorname{sen} x - 2 = 0$
   c) $3 \tan x + \sqrt{3} = 0$
   d) $\cot 3x = 0$
   e) $\sec x - 1 = 0$
   f) $2 \csc x - 1 = 0$

2. Resolver las ecuaciones trigonométricas siguientes para:

$$0 \leqslant u < 2\pi \quad \text{o} \quad 0° \leqslant \phi < 360°$$

   a) $\cos \phi = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi$
   b) $\csc u \cot u = \cot u$
   c) $2 \cos^2 u + \operatorname{sen} u = 1$
   d) $\operatorname{sen} \phi \csc^2 \phi = 2 \operatorname{sen} \phi$
   e) $\cos \phi + 1 = \operatorname{sen} \phi$
   f) $\cot \phi + 2 \cot^2 \phi = 0$
   g) $\sec u - \sec^2 u = 0$
   h) $2 \operatorname{sen}^2 \phi + \operatorname{sen} \phi = 0$

l) $\cos\phi + \sqrt{3}\cos\phi\tan\phi = 0$

j) $\cos u \sec u - 2\cos u = 0$

k) $2\operatorname{sen} u\cos^2 u - \operatorname{sen} u = 0$

l) $2\tan^2 u\cot u - \cot u = 0$

m) $2\tan\phi\operatorname{sen}\phi = \tan\phi$

n) $\operatorname{sen}^2 u + \operatorname{sen} u - 2 = 0$

ñ) $\cos^2\phi - 1 = 0$

o) $\tan^2\phi - 5\tan\phi + 6 = 0$

p) $\operatorname{oct}^2\phi - 7\cot\phi + 10 = 0$

q) $2\sec^2\phi + 5\sec\phi - 3 = 0$

r) $\csc^2\phi - 3\csc\phi - 4 = 0$

s) $14\csc^2\phi - \csc\phi - 3 = 0$

t) $\cot^2 u + 3\cot u - 28 = 0$

u) $\tan^2 u - 5\tan u - 14 = 0$

v) $\sec^2 u - 24\sec u\tan u + 119\tan^2 u = 0$

w) $9\operatorname{sen}^2 u - 9\operatorname{sen} u + 2 = 0$

x) $25\cos^2\phi - 10\cos\phi - 3 = 0$

y) $2\cos^4\phi - 9\cos^2\phi + 4 = 0$

z) $6\cot^4\phi + 7\cot^2\phi - 3 = 0$

a') $15\operatorname{sen}^6 u + 7\operatorname{sen}^3 u - 2 = 0$

b') $2\sec u\csc u + 4\sec u - 7\csc u - 14 = 0$

c') $2\cos u\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} u - 2\cos u + 1 = 0$

d') $\cos 2\phi - \operatorname{sen}\phi = 0$

e') $\operatorname{sen}\frac{u}{2} - \operatorname{sen} u = 0$

f') $\cos 2u + 3\operatorname{sen} u + 1 = 0$

g') $\cos 2u - \cos u - 1 = 0$

h') $2\operatorname{sen} 2\phi - \operatorname{sen}\phi = 0$

i') $3\cos^2 u - \operatorname{sen} u + 1 = 0$

j') $2\operatorname{sen}^2 u + \cos u + 3 = 0$

k') $2\operatorname{sen}\phi = \tan\phi$

l') $\tan^2 u - 2\sec^2 u + 5 = 0$

m') $\operatorname{sen} u - \cos^2 u + 2 = 0$

n') $\csc^2 u + 2\cot u = 0$

$\tilde{n}'$) $\operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

o') $\operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

p') $\operatorname{sen} \phi + \cos \phi + 1 = 0$

q') $\cos 2u - \operatorname{sen}^2 u = 0$

r') $\operatorname{sen} \phi - \cos \phi = 1$

s') $2 \operatorname{sen} u \cos u = 1/2$

t') $\cos 2u - \cos u = \operatorname{sen} \dfrac{u}{2}$

u') $\tan 2\phi = -2 \operatorname{sen} \phi$

Sección 9.11

RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Representar un número complejo en forma rectangular y pasarlo a forma polar y viceversa.
2. Multiplicar y dividir números complejos en forma polar e interpretarlo gráficamente.
3. Definir norma y amplitud de un número complejo.
4. Obtener las n–raíces enésimas de un número complejo.

En el capítulo 5 estudiamos el conjunto de los números complejos y se dijo que un número complejo se puede representar de dos formas diferentes: en forma de pareja y en forma rectangular. O sea:

Si $z \in C$ entonces $z = (a, b) = a + bi$, donde a y b son números reales.

Existe otra forma para representar un número complejo, a la que llamaremos *forma polar*. Esta nos será de gran utilidad al efectuar multiplicaciones, divisiones, elevación a potencias, radicación de complejos, etc.

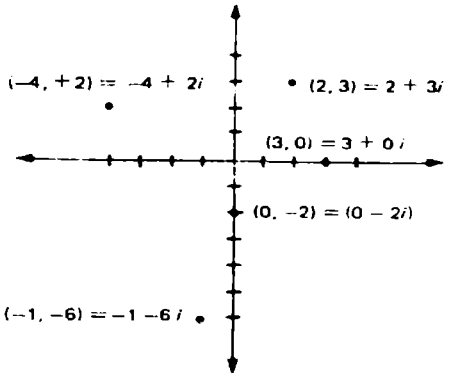
Aunque las operaciones las vimos anteriormente en los números complejos en forma de pareja o rectangular, éstas se pueden simplificar si los números complejos los representamos en forma polar.

Los números complejos pueden representarse gráficamente si se asocia el complejo $z = a + bi$ con el punto P de coordenadas (a, b).

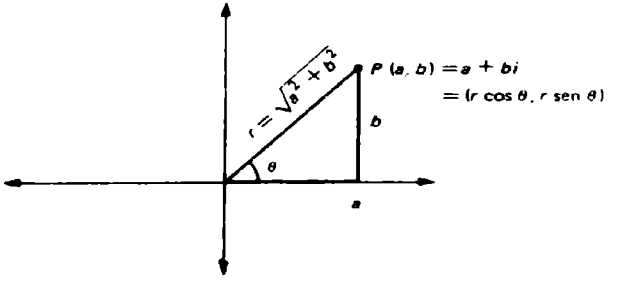
Así, cada número complejo (a, b) = $a + bi$ corresponde a un punto único del plano, cuyas coordenadas son $x = a$, y $y = b$ y recíprocamente cada punto del plano (a, b) le corresponde al número complejo único $a + bi$.

El plano en el cual representamos a los números complejos se le conoce como *plano complejo* donde el eje x es llamado *eje real* y el eje de las y, *eje imaginario*.

En la figura siguiente están representadas las gráficas de los números complejos $2 + 3i$, $3 + 0i$, $0 - 2i$, $-1 - 6i$, $-4 + 2i$.



Consideremos un número complejo $z = a + bi$. De acuerdo a lo anterior, este número lo podemos representar en un plano complejo mediante la pareja (a, b). Si trazamos una recta desde el origen al punto (a, b) se habrá determinado una distancia r y un ángulo θ en posición normal.



Es decir, el punto (a, b) ha sido representado en término de r y θ. Cuando un punto se encuentre en esta situación diremos que está en coordenadas polares.

Definición. La forma polar del número complejo $z = a + bi$ es el miembro de la derecha de la ecuación:

$$a + bi = r \cos \theta + (r \operatorname{sen} \theta)\, i\ ;$$

r es llamado el módulo o norma del número complejo z y θ es el argumento o amplitud.

Observaciones:

a) El número complejo z en forma polar puede ser representado como:

$$z = r \cos \theta + i\, r \operatorname{sen} \theta = r\,(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

y en forma simplificada:

$$z = r \operatorname{cis} \theta$$

b) Tomando en cuenta la representación de un número complejo en el plano, los valores de r y θ se pueden hallar por las relaciones:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \tan \theta = \frac{b}{a}$$

La amplitud de un número complejo no es única, pero se tomará

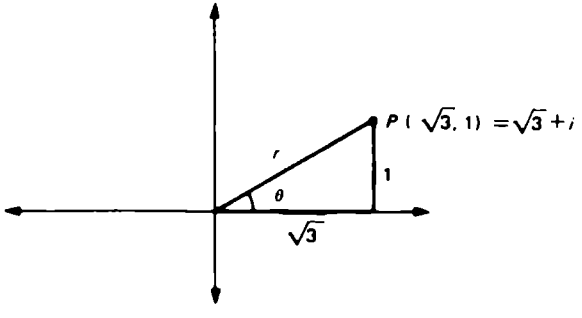
$$0 \leqslant \theta < 360^\circ$$

La relación $\tan \theta = \frac{b}{a}$ da dos valores para θ y el ángulo que se eligirá será el que se determine por los signos de a y b.

Ejemplos.

1. Escribir el número $\sqrt{3} + i$ en forma polar.

   Primero situaremos este número complejo en el plano y se construirá el triángulo rectángulo, como se muestra a continuación:



Resolviendo este triángulo tenemos que:

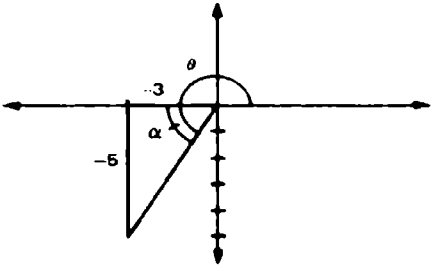
$$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{y así } \theta = 30°$$

ya que el ángulo θ está en el primer cuadrante, entonces:

$$\sqrt{3} + i = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$$
$$= 2 \operatorname{cis} 30°$$

2. Escribir $-3 - 5i$ en la forma polar.



$$r = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$r = \sqrt{34}$$

$$\tan\alpha = \frac{-3}{-5} = 1.66, \qquad \alpha = 59°$$

pero θ está en el tercer cuadrante, así que:

$$\theta = 180° + 59° = 239°$$
$$\theta = 239°$$

entonces:

$$-3 - 5i = \sqrt{34}\,(\cos 239° + i \operatorname{sen} 239°)$$
$$= \sqrt{34} \operatorname{cis} 239°$$

3. Escribir el número complejo 2 cis 45 en la forma rectangular.

$$2 \operatorname{cis} 45° = 2(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\,i$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Operaciones de números complejos en forma polar

Tomando en cuenta la relación de igualdad de números complejos en la forma de parejas de números o en la forma rectangular, tenemos que dos números complejos en la forma polar son iguales si sus módulos son iguales y sus argumentos también lo son o difieren entre sí un múltiplo entero de 360°.

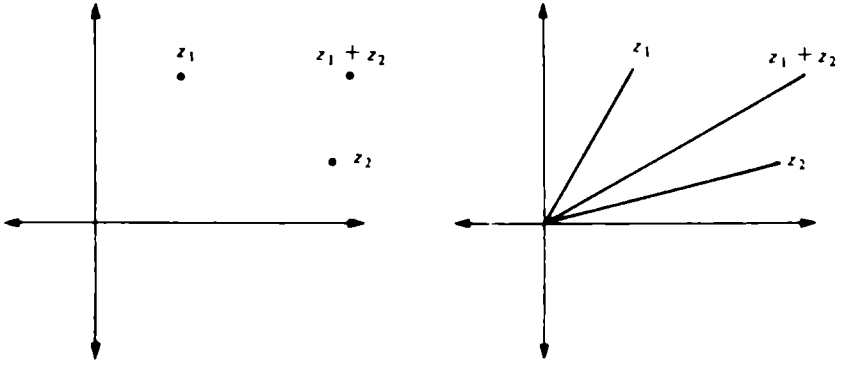
Si $z_1 = R_1 \operatorname{cis} \theta_1$ y $z_2 = R_2 \operatorname{cis} \theta_2$

entonces:

$z^1 = z^2$ si y sólo si:

$$R_1 = R_2 \quad \text{y} \quad \theta_1 = \theta_2$$

Si recordamos las operaciones de suma y producto de números complejos dadas en forma rectangular, nos daremos cuenta que una interpretación de la suma de números complejos es aquella que nos dice que si consideramos los dos sumandos como vectores en R_2, la suma de estos complejos coinciden con la suma de vectores, esto es, la suma es la resultante.



Sin embargo, la forma rectangular de números complejos no nos permite una fácil interpretación del producto de ellos. Los siguientes resultados es-

tablecen una interpretación intuitiva del producto y cociente de números complejos cuando éstos se dan en forma polar:

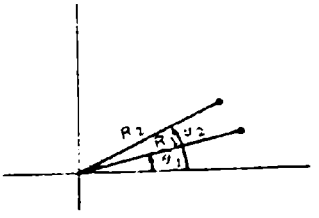
> El producto de dos números complejos en forma polar es otro número complejo en forma polar, cuyo módulo es el producto de los módulos de los factores y cuya amplitud es la suma de sus amplitudes, o sea:
>
> $$(R_1 \operatorname{cis} \theta_1)\ (R_2 \operatorname{cis} \theta_2) = R_1\ R_2 \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2)$$

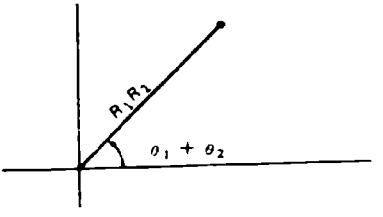
Demostración.

$$\begin{aligned}
&(R_1 \operatorname{cis} \theta_1)\,(R_2 \operatorname{cis} \theta_2) = R_1\ R_2 \operatorname{cis} \theta_1 \operatorname{cis} \theta_2 \\
&= R_1\ R_2\ (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)\,(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\
&= R_1\ R_2\ [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \\
&\qquad - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2\ ] \\
&= R_1\ R_2\ [\,(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i\,(\operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 \\
&\qquad + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2\ ] \\
&= R_1\ R_2\ [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i\,(\operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2))\ ] \\
&= R_1\ R_2 \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

Así tenemos que:

$$(R_1 \operatorname{cis} \theta_1)\,(R_2 \operatorname{cis} \theta_2) = R_1\ R_2 \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2)$$





Ejemplo.

4. Si $z_1 = 3 \text{ cis } 30°$ y $z_2 = 2 \text{ cis } 45°$, entonces:

$$z_1 z_2 = (3 \text{ cis } 30°)(2 \text{ cis } 45°)$$
$$= 6 \text{ cis } (30° + 45°)$$
$$= 6 \text{ cis } (75°)$$
$$z_1 z_2 = 6 (\cos 75° + i \text{ sen } 75°)$$

Observación. El producto para dos números complejos puede extenderse para tres o más factores.

Si $z_1 = R_1 \text{ cis } \theta_1$, $z_2 = R_2 \text{ cis } \theta_2$,

$z_3 = R_3 \text{ cis } \theta_3$, . . ., $z_n = R_n \text{ cis } \theta_n$.

entonces:

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_n = R_1 R_2 R_3 \ldots R_n \text{ cis } (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)$$

Ejemplo.

5. Si $z_1 = 2 \text{ cis } 35°$, $z_2 = 3 \text{ cis } 30°$, $z_3 = 2 \text{ cis } 40°$

$$z_1 z_2 z_3 = (2 \text{ cis } 35°)(3 \text{ cis } 30°)(2 \text{ cis } 40°)$$
$$= (2)(3)(2) \text{ csi } (35° + 30° + 40°)$$
$$= 12 \text{ cis } (105°)$$

El siguiente teorema, nos dice cómo efectuar la potencia entera de un número complejo. La demostración se dejará como ejercicio.

Teorema de De Moivre.

Si $z = R \text{ cis } \theta$, entonces:

$$z^n = (R \text{ cis } \theta)^n = R^n \text{ cis } n\theta$$

donde n es entero mayor que cero.

Ejemplo.

6. Si $z = 2 \text{ cis } 65°$

$$z^3 = (2 \text{ cis } 65°)^3 = (2)^3 \text{ cis } 3(65°)$$
$$= 8 \text{ cis } 195°$$
$$z^3 = 8 (\cos 195° + i \text{ sen } 195°)$$

El cociente de dos números complejos, dados en su forma polar, es otro número complejo, también en forma polar, cuyo módulo es el módulo del numerador entre el módulo del denominador y cuya amplitud es la amplitud del numerador menos la amplitud del denominador. O sea:

$$\text{Si } z_1 = R_1 \operatorname{cis} \theta_1 \quad \text{y} \quad z_2 = R_2 \operatorname{cis} \theta_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \operatorname{cis} \theta_1}{R_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{R_1}{R_2} \operatorname{cis} (\theta_1 - \theta_2)$$

Demostración.

$$\frac{R_1 \operatorname{cis} \theta_1}{R_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{R_1 \operatorname{cis} \theta_1}{R_2 \operatorname{cis} \theta_2} \cdot \frac{\operatorname{cis} (-\theta_2)}{\operatorname{cis} (-\theta_2)}$$

$$= \frac{R_1 \operatorname{cis} (\theta_1 - \theta_2)}{R_2 \operatorname{cis} (\theta_2 - \theta_2)}$$

$$= \frac{R_1 \operatorname{cis} (\theta_1 - \theta_2)}{R_2 \operatorname{cis} 0^\circ}$$

$$\begin{aligned} \text{Pero cis } 0^\circ &= \cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ \\ &= 1 + i\,(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

entonces:

$$\frac{R_1 \operatorname{cis} \theta_1}{R_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{R_1 \operatorname{cis} (\theta_1 - \theta_2)}{R_2}$$

$$= \frac{R_1}{R_2} \operatorname{cis} (\theta_1 - \theta_2)$$

Ejemplo.

7. Si $z_1 = 8 \operatorname{cis} 90^\circ$ y $z_2 = 4 \operatorname{cis} 45^\circ$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8 \operatorname{cis} 90^\circ}{4 \operatorname{cis} 45^\circ} = \frac{8}{4} \operatorname{cis} (90^\circ - 45^\circ) = 2 \operatorname{cis} 45^\circ$$

Consideremos la raíz enésima de un número complejo, o sea:

$$\sqrt[n]{a + bi} = [\, R \operatorname{cis} (\theta + 2k\pi) \,]^{1/n} \qquad k \in \text{Enteros}$$

por definición de raíz enésima se tiene que:

$$z = \sqrt[n]{R \operatorname{cis} (\theta + 2k\pi)} \qquad \text{si y sólo si } z^n = R \operatorname{cis} (\theta + 2k\pi).$$

Si $z = r \operatorname{cis} \phi$, tenemos que:

$$z^n = R \operatorname{cis} (\theta + 2k\pi)$$
$$(r \operatorname{cis} \phi)^n = R \operatorname{cis} (\theta + 2k\pi)$$
$$r^n \operatorname{cis} n\phi = R \operatorname{cis} (\theta + 2k\pi)$$

y estos dos números complejos son iguales si y sólo si sus módulos y sus argumentos son iguales. Por tanto:

$$r^n = R \quad , \qquad n\phi = \theta + 2k\pi$$
$$r = \sqrt[n]{R} \quad , \qquad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k}{n}\pi$$

Sabemos que k es un número entero, o sea:

$$k = 0 \pm 1 \pm 2, \ldots$$

y se puede demostrar que las diferentes raíces del número complejo se encuentran si se limita k a los valores $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, ya que para valores de k mayores o iguales a n se producirían argumentos cuyos lados terminales coincidirían con alguno de los valores de k ya dados.

$$k = 0, \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2(0)}{n}\pi = \frac{\theta}{n}$$
$$k = 1, \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2}{n}\pi$$
$$k = 2, \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{4}{n}\pi$$
$$k = 3, \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{8}{n}\pi$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$k = n-2, \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2(n-2)}{n}\pi$$
$$k = n-1, \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)}{n}\pi$$
$$k = n, \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2n}{n}\pi = \frac{\theta}{n} + 2\pi = \frac{\theta}{n}$$

Con esto se puede concluir que la raíz n-ésima de un número complejo z tiene exactamente n raíces.

Ejemplo.

8. Encontrar las raíces cuadradas de $z = 5 - 12\,i$.

$$\sqrt{z} = \sqrt{5 - 12\,i} = \sqrt{13 \text{ cis } 292°37'}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{13 \text{ cis } (292°37' + k\,360°)}$$

$$\sqrt{13 \text{ cis } (292°37' + k\,360°)} = r \text{ cis } \phi$$

Elevando al cuadrado ambos términos:

$$13 \text{ cis } (292°37' + k\,360°) = r^2 \text{ cis } 2\phi$$

Así:

$$r^2 = 13 \qquad 2\phi = 292°37' + k\,360°$$

$$r = \sqrt{13} \qquad \phi = \frac{292°37'}{2} + \frac{k}{2}\,360°$$

Si $k = 0$ $\quad \phi = 146°18' + \frac{0}{2}\,(360°) = 146°18'$

Si $k = 1$ $\quad \phi = 146°18' + \frac{(1)\,(360°)}{2} = 326°18'$

Observamos que si k toma el valor de 2 volvemos al valor $\phi = 146°18'$

Así:

$$\sqrt{5 - 12i} = \begin{cases} \sqrt{13} \text{ cis } 146°18' \\ \\ \sqrt{13} \text{ cis } 326°18' \end{cases}$$

Ejercicios.

1. Expresar cada uno de los siguientes números complejos en la forma polar:

   a) 4
   b) $2 - 3i$

c) $-1-\sqrt{3}i$

d) i

e) $(\sqrt{3}\ ,\sqrt{3})$

f) -3

g) $(-5,-10)$

h) $2+7i$

i) 9i

j) -5i

Expresar cada uno de los siguientes números complejos en la forma rectangular $(a + bi)$.

a) 2 cis 30°

b) 5 cis 135°

c) cis 240°

d) 3 cis 350°

e) 2 cis 80°

f) 4 cis 45°

g) 6 cis 160°

h) 5 cis 135° 33′

i) 3 cis 18° 27′

j) cis 365° 18′

Efectuar las operaciones indicadas:

a) 2 cis 20° · 3 cis 10°

b) 3 cis 15° · 2 cis 85°

c) 5 cis 125° · 7 cis 225°

d) 2 cis 25° · 3 cis 340°

e) 10 cis 100° · cis 40° · 3 cis (−1000°)

f) $(3 \text{ cis } 300°)^3$

g) $(2 \text{ cis } 122°18')^2$

h) $(8 \text{ cis } 80°)^4$

i) $(2 \text{ cis } \pi/2)^3$

j) $(4\sqrt{2}\ \text{cis}\ 7\pi/4)^2$

k) $(5\ \text{cis}\ 0)^5$

l) $(6\ \text{cis}\ 165^\circ) \div (9\ \text{cis}\ 90^\circ)$

m) $(4\ \text{cis}\ 20^\circ) \div (8\ \text{cis}\ 50^\circ)$

n) $(6\ \text{cis}\ 180^\circ) \div (2\ \text{cis}\ (-90^\circ))$

ñ) $(21\ \text{cis}\ 495^\circ) \div (7\ \text{cis}\ 220^\circ)$

o) $(2\ \text{cis}\ (-20^\circ)) \div (3\ \text{cis}\ (-30^\circ))$

4. Si $z_1 = 2\ \text{cis}\ 45^\circ$ y $z_2 = \text{cis}\ 30^\circ$, encontrar $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 z_2, z_1 / z_2, (z_1)^2$ y en un plano complejo graficar: $z_1, z_2, z_1 z_2, z_1 / z_2, (z_1)^2, z_1 + z_2, z_1 - z_2$.

5. Obtener las raíces que se indican en cada inciso y expresar el resultado en la forma rectangular y polar.

a) Las raíces cúbicas de $27i$

b) Las raíces cuadradas de $-4i$

c) Las raíces cuartas de $81\ \text{cis}\ 90^\circ$

d) Las raíces cuadradas de $3 + 4i$

e) Las raíces quintas de $32\ \text{cis}\ 0^\circ$

f) Las raíces cúbicas de $-4\sqrt{3} - 4i$

g) Las raíces cúbicas de $64\ \text{cis}\ 227^\circ 16'$

h) Las raíces cuartas de $\sqrt{3} + i$

i) Las raíces cúbicas de $-2 + 2i$

j) Las raíces cuadradas de $18\ \text{cis}\ 18^\circ$

6. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 + 1 = 0$

b) $x^5 + 1 = 0$

c) $x^3 + i = 0$

d) $x^5 + 3 + 3i = 0$

e) $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$

f) $x^3 - 27 = 0$

7. Si $z_1 = R_1\ \text{cis}\ \theta_1$ y $z_2 = R_2\ \text{cis}\ \theta_2$ interpretar geométricamente $z_1, z_2, z_1 \cdot z_2, z_1 / z_2$.

CAPÍTULO 10

Geometría analítica

INTRODUCCIÓN

El presente capítulo se dedica al estudio de una rama de las matemáticas que es empleada como auxiliar en casi todos los temas: la geometría analítica.

Hasta el siglo XVII, el álgebra y la geometría habían tenido un desarrollo independiente. Fue René Descartes (1596-1650), matemático y filósofo francés, quien en 1637 publicó su obra *La geometría,* donde unificó ambas ramas, dando origen a lo que hoy conocemos como geometría analítica. Este proceso se inició al obtener una correspondencia biunívoca entre puntos y números reales, definiendo un sistema de coordenadas, que permite aplicar los métodos algebraicos al estudio de la geometría. De la misma manera, el álgebra se auxilia de este sistema para representar geométricamente las ecuaciones y las funciones.

Sección 10.1

PENDIENTE DE UNA RECTA

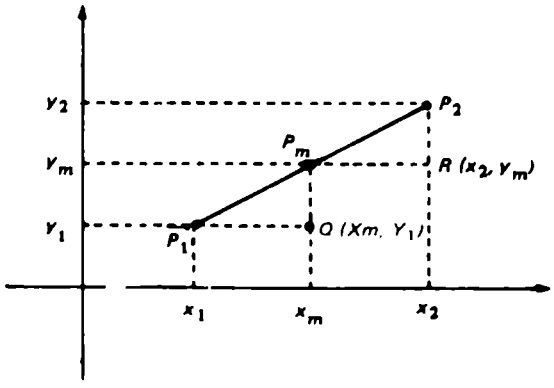
Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento de una recta.
2. Definir inclinación, pendiente e interceptos de una recta.
3. Dadas dos rectas, determinar si son perpendiculares o paralelas.

Punto medio de un segmento de recta

Con frecuencia es necesario determinar las coordenadas del punto medio del segmento que une dos puntos dados.



Sean $P_1\ (x_1, y_1)$, $P_2\ (x_2, y_2)$ las coordenadas de los puntos extremos de un segmento, llamemos $P_m\ (x_m, y_m)$ al punto medio del segmento, tracemos perpendiculares al eje x por los puntos P_1, P_m, P_2, respectivamente. Ahora por P_1 y P_m tracemos perpendiculares al eje y.

Si observamos los triángulos rectángulos $P_1\ Q\ P_m$ y $P_m\ R\ P_2$ indicados en la figura, es fácil ver que estos triángulos rectángulos son congruentes. Además, puesto que:

$$|\overline{P_1\ P_m}| = |\overline{P_m\ P_2}| \text{ se tiene que:}$$

$$|\overline{P_1\ Q}| = |\overline{P_m\ R}|$$

y $$|\overline{P_1\ Q}| = \sqrt{(x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_m)^2}$$

$$= |x_1 - x_m|$$

o sea $$|\overline{P_1\ Q}| = |x_1 - x_m|$$

También se tiene que $|\overline{P_m\ R}| = \sqrt{(x_m - x_2)^2 + (y_m - y_m)^2}$

$$= |x_m - x_2|$$

puesto que $|\overline{P_1\ Q}| = |\overline{P_m\ R}|$

entonces $x_1 - x_m = x_m - x_2$

$$x_1 + x_2 = x_m + x_m = 2\,x_m$$

de donde: $$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Similarmente tenemos que: $|\overline{Q\ P_m}| = |\overline{R\ P_2}|$ y puesto que $|\overline{Q\ P_m}| = |y_m - y_1|$; $|\overline{R\ P_2}| = |y_2 - y_m|$, concluimos que:

$$y_m - y_1 = y_2 - y_m$$

de donde obtenemos:

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Resumiendo lo anterior, concluimos lo siguiente:

Teorema 1.

Si $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera en el plano y si

$P_m\ (x_m, y_m)$ es el punto medio del segmento $P_1\ P_2$, entonces las coordenadas del punto medio están dadas por:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{y} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Es decir,

> Si $P_1\ (x_1\ y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$ son los extremos de un segmento de recta entonces las coordenadas del PUNTO MEDIO son
>
> $$Pm\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplos.

1. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos $P_1\ (-3, 4), P_2\ (-2, -5)$

$$x_m = \frac{(-3) + (-2)}{2} = \frac{-5}{2} \text{ y } y_m = \frac{4 + (-5)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$x_m = -5/2 \qquad y_m = -1/2 \qquad P_m = (-5/2, -1/2).$$

2. $P_1\ (-1, 2)$ es un extremo de un segmento y $P_m\ (-2, -1)$ es el punto medio de dicho segmento. Encontrar las coordenadas del otro extremo del segmento.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$(-2) = \frac{(-1) + x_2}{2} \qquad (-1) = \frac{2 + y_2}{2}$$

$$-4 = -1 + x_2 \qquad -2 = 2 + y_2$$

$$x_2 = -4 + 1 = -3 \qquad y_2 = -2 - 2 = -4$$

$$x_2 = -3 \qquad y_2 = -4$$

Así tenemos que: $P_2\ (x_2, y_2) = P_2\ (-3, -4)$

3. Probar que el segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, mide la mitad de la longitud del tercer lado.

Sean $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$, $C\ (x_3, y_3)$ las coordenadas de los vértices de un triángulo, entonces el punto medio del segmento AC es $P_1\ (\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2})$ y si P_2 es el punto medio del segmento BC, entonces $P_2\ (\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2})$. Entonces:

$$|\overline{P_1 P_2}| = \left[\left(\frac{x_1 + x_3}{2} - \frac{x_2 + x_3}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_3}{2} - \frac{y_2 + y_3}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_3 - x_2 - x_3}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_3 - y_2 - y_3}{2} \right)^2}$$

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2}{4} + \frac{(y_1 - y_2)^2}{4}}$$

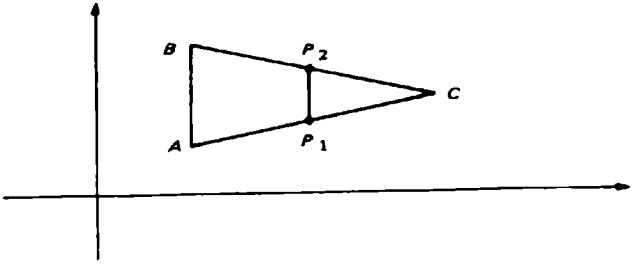
$$= \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{2}$$

Por otro lado, la longitud del tercer lado AB está dada por:

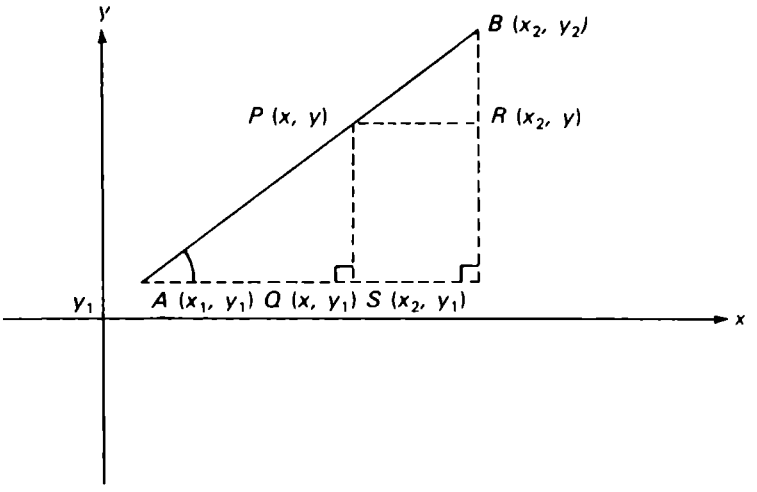
$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

de donde concluimos que:

$$|\overline{P_1 P_2}| = \frac{|\overline{AB}|}{2}$$



Obtención de un punto que divide a un segmento de recta en dos partes que tengan una relación específica.



Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del segmento de recta AB. En la figura anterior se observan dos triángulos semejantes el ΔAQP y el ΔASB ya que los ángulos son iguales. Ahora por propiedades de los triángulos semejantes se tiene que sus lados deben ser proporcionales, es decir

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BS}}$$

y si R es la razón o cociente anterior entonces se tiene que

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AS}} = R \text{ y } \frac{\overline{PQ}}{\overline{BS}} = \text{R}$$

y como $\overline{AQ} = x - x_1$, $\overline{AS} = x_2 - x_1$, $\overline{PQ} = y - y_1$ y $BS = y_2 - y_1$ entonces

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = R \text{ y } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = R$$

y si despejamos x y y en las ecuaciones se tiene que

$$x = x_1 + R(x_2 - x_1);\ y = y_1 + P(y_2 - y_1)$$

que son las coordenadas del punto elegido en el segmento de recta AB, que cumple con la condición: la razón de $\overline{AP}$ a $\overline{AB}$ es R.

Las coordenadas del punto P que está en el segmento AB que cumple con la condición de que la razón de $\overline{AP}$ a $\overline{AB}$ es R son

$$x = x_1 + R(x_2 - x_1);\ y = y_1 + R(y_2 - y_1)$$

Observación.

Si $R = 1/2$ en las coordenadas anteriores se obtendrán las coordenadas del punto medio del segmento de recta AB es decir

$$x = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \quad ; y = y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1)$$

$$x = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 ; y = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1$$

$$x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \quad ; y = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplos.

4. Encuentre el punto $P(x, y)$ del segmento de recta que une los puntos $A(3,5)$ y $B(6, 2)$ tal que la razón de $\overline{AP}$ a $\overline{AB}$ es de 1/3.

$$x = x_1 + R(x_2 - x_1) ; y = y_1 + R(y_2 - y_1)$$

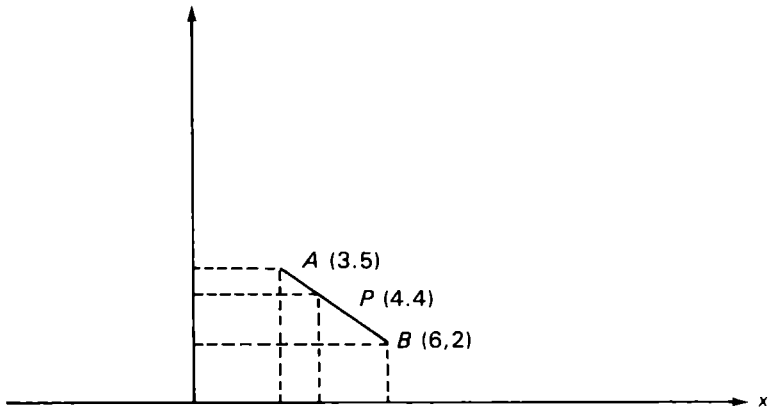
$$x = 3 + \frac{1}{3}(6 - 3) ; y = 5 + \frac{1}{3}(2 - 5)$$

$$x = 3 + \frac{1}{3}(3) \quad ; y = 5 + \frac{1}{3}(-3)$$

$$x = 3 + 1 \quad ; y = 5 - 1$$

$$x = 4 \quad ; y = 4$$

Por lo que el punto P tiene coordenadas P (4,4)



y así

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{(5-4)^2 + (3-4)^2}}{\sqrt{(3-6)^2 + (5-2)^2}} = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{9+9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

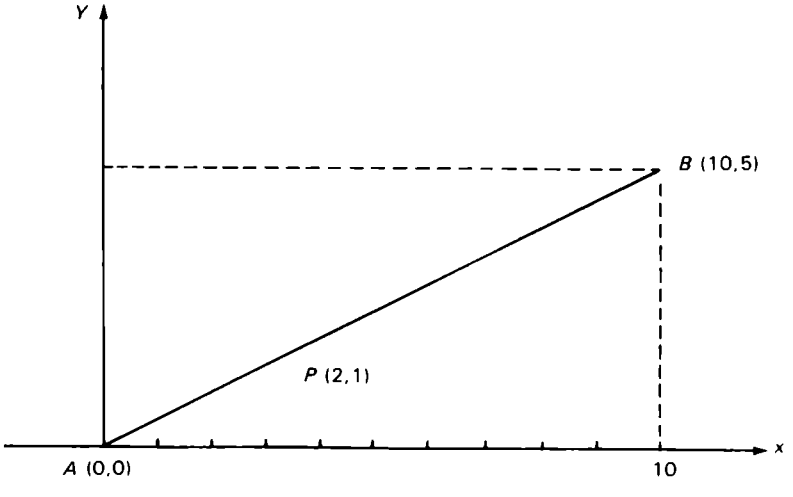
5. Encuentre el punto $P(x, y)$ del segmento de recta que une los puntos A (0,0) y B (10,5) de tal forma que la razón de $\overline{AP}$ a $\overline{AB}$ sea de $R = 1/5$.

$$x = x_1 + R(x_2 - x_1) \; ; \; y = y_1 + R(y_2 - y_1)$$

$$x = 0 + \frac{1}{5}(10 - 0) \; ; \; y = 0 + \frac{1}{5}(5 - 0)$$

$$x = 2 \qquad ; \; y = 1$$

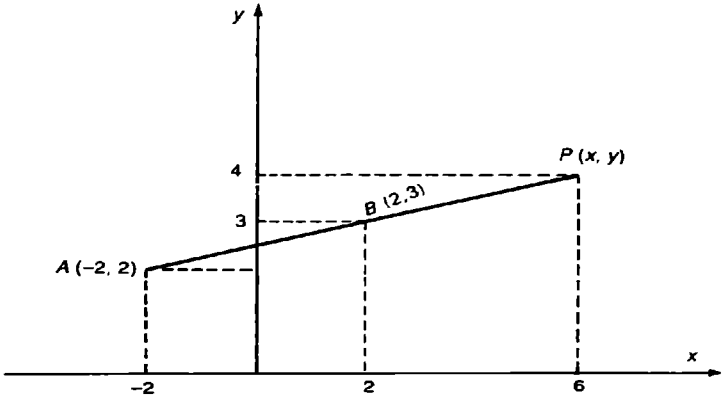
Por lo que el punto P tiene coordenadas P (2, 1).



y así $$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2}}{\sqrt{(10-0)^2 + (5-0)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}} = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$$

6. Un punto $P(x, y)$ está sobre la recta que pasa por los puntos $A(-2, 2)$; $B(2, 3)$. Obtener las coordenadas de P si el segmento AB se extiende de B a P, de tal forma que este punto P está alejado de A el doble que de B.

La distancia de A de B es el doble de la de B a P es decir $\overline{AP} = 2\,\overline{BP}$



$$\overline{AP} = 2\,\overline{BP} \text{ y } \overline{AB} = \overline{BP}$$

así
$$\overline{AP} = 2\,\overline{BP}$$
$$\overline{AP} = 2\,\overline{AB}$$
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = 2$$

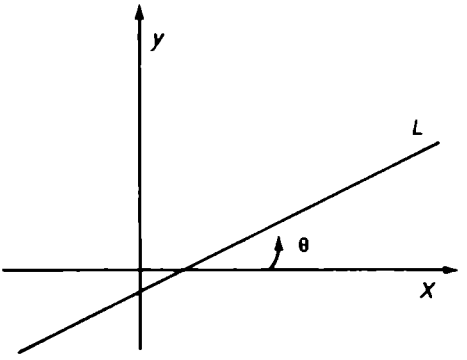
Es decir, la razón de $\overline{AP}$ a $\overline{AB}$ es de 2 y el valor de R es de 2, o sea $R = 2$

$$x = x_1 + R(x_2 - x_1) \quad ; \quad y = y_1 + R(y_2 - y_1)$$
$$x = -2 + 2(2 + 2) \quad ; \quad y = 2 + 2(3 - 2)$$
$$x = -2 + 8 \quad ; \quad y = 4$$
$$x = 6$$

y así el punto es $P(6, 4)$.

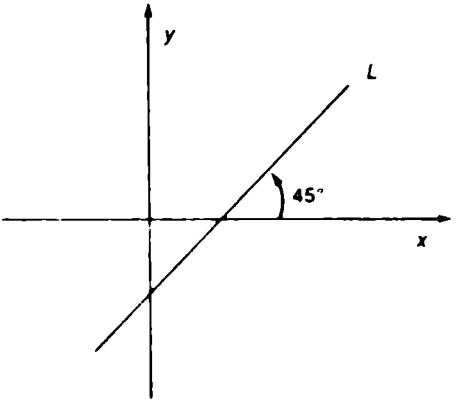
Pendiente de una recta

Sea L una recta que intersecta al eje x.

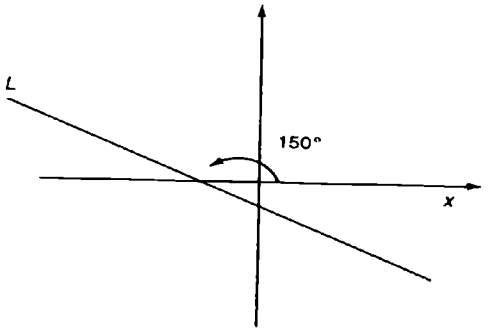


Definición. El ángulo positivo menor de 180° comprendido entre la parte positiva del eje x y una recta L se le llama INCLINACIÓN DE LA RECTA L.

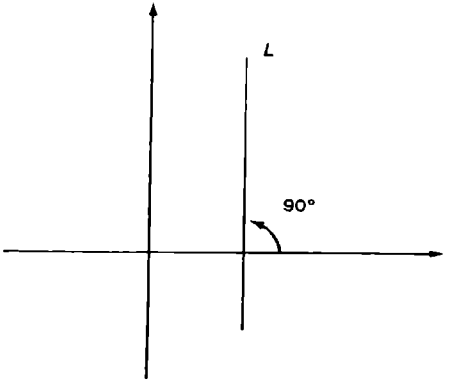
Ejemplo 7.



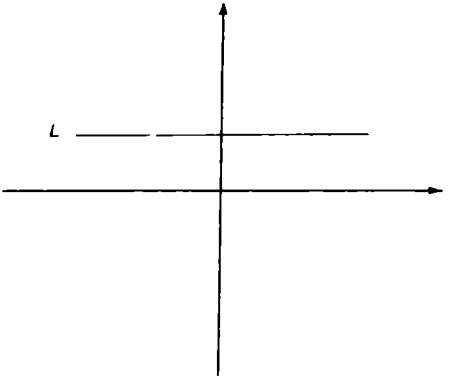
Inclinación de la recta es $\theta = 45°$



Inclinación de la recta es $\theta = 150°$



Inclinación de la recta es $\theta = 90°$



Inclinación de la recta es $\theta = 0°$

Observación. Si una recta es paralela al eje x, el ángulo de inclinación es $\theta = 0°$

Definición. La pendiente de una recta la definimos como la tangente de su ángulo de inclinación y ladenotaremos por m. Es decir:

$$m = \tan \theta$$

Observaciones.

a) Si la recta es tal que su inclinación es un ángulo agudo, su pendiente es positiva, puesto que la tangente de un ángulo agudo es positiva. En este caso, la recta está inclinada hacia la derecha.
b) Si una recta es tal que su inclinación está hacia la izquierda, se tendrá que el ángulo de inclinación es obtuso y su tangente será negativa.
c) Si una recta es horizontal, su pendiente es cero, puesto que $\tan 0^\circ = 0$.
d) Si una recta es vertical, su pendiente no existe, puesto que su ángulo de inclinación es de 90°.

Ejemplo 8.

a) Si $\theta = 30^\circ$ es la inclinación de una recta L, entonces

$$m = \tan 30^\circ$$
$$m = 1/\sqrt{3}$$

b) Si $\theta = 120^\circ$ es la inclinación de una recta, entonces

$$m = \tan 120^\circ$$
$$m = -\sqrt{3}$$

c) Si $\theta = 90^\circ$ es la inclinación de una recta, entonces

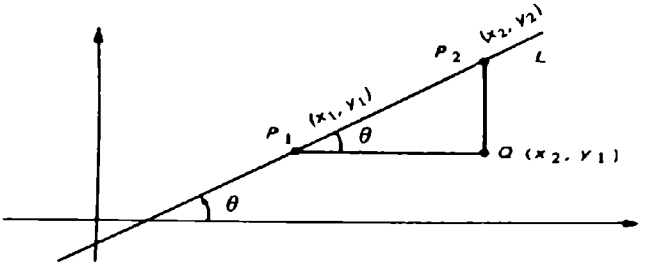
$$m = \tan 90^\circ$$
$$m = \text{no existe}$$

d) Si $\theta = 157^\circ\ 30'$ es la inclinación de una recta, entonces

$$m = \tan 157^\circ\ 30'$$
$$m = -\ 0.4142$$

Deduciremos ahora una fórmula para la pendiente de una recta:

Sean $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera sobre una recta, tracemos por P_1 una paralela al eje x. El ángulo que forman esta paralela y L coincide con la inclinación θ de L como se observa en la figura.



Tracemos ahora por P_2 una paralela al eje y y llamemos Q a la intersección de las dos rectas trazadas. Es claro que las coordenadas de Q son $Q\ (x_2, y_1)$, entonces en el $\triangle P_1\ Q\ P_2$ tenemos que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{|\overline{Q\,P_2}|}{|\overline{P_1\,Q}|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces podemos resumir diciendo que $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

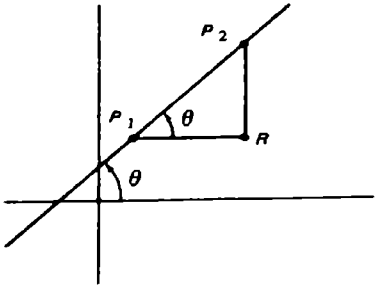
Es decir, hemos probado el siguiente resultado:

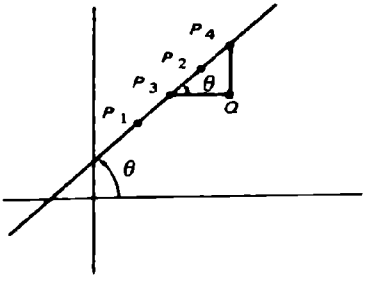
Teorema 2.

Si $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera de una recta L entonces la pendiente de L está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Observación. Si seleccionamos dos parejas distintas de puntos sobre una misma recta, como se observa en las siguientes figuras:





tenemos que los triángulos P_1RP_2 y P_3QP_4 son semejantes y la razón de sus lados son iguales, es decir:

$$\frac{|\overline{P_2R}|}{|\overline{P_1R}|} = \frac{|\overline{P_4Q}|}{|\overline{P_3Q}|}$$

o

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

Ejemplos.

9. Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos P_1 (1, 6), P_2 (5, − 2).

$$m = \frac{(-2) - 6}{5 - 1} = \frac{-8}{4} = -2$$

10. Pruebe que los puntos P_1 (− 3, 4), P_2 (3, 2) y P_3 (6, 1) son colineales

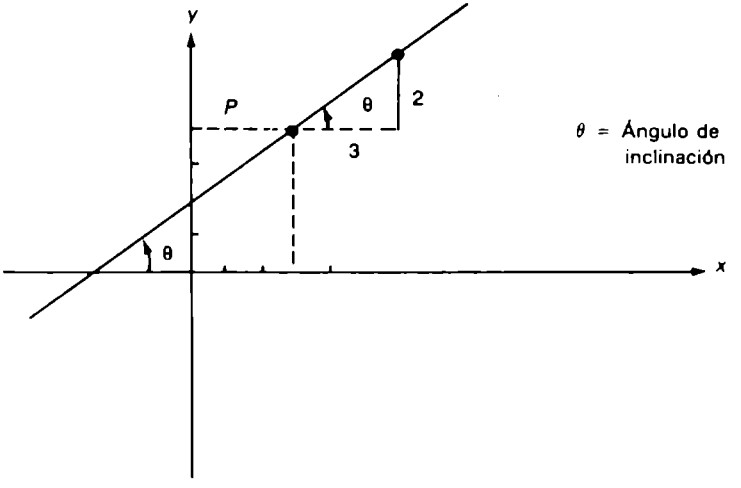
Pendiente de $\overleftrightarrow{P_1P_2} = \frac{2-4}{3+3} = \frac{-2}{6} = -1/3$

Pendiente de $\overleftrightarrow{P_1P_3} = -\frac{1-4}{6+3} = -\frac{-3}{9} = -1/3$

Entonces: P_1, P_2 y P_3 son colineales.

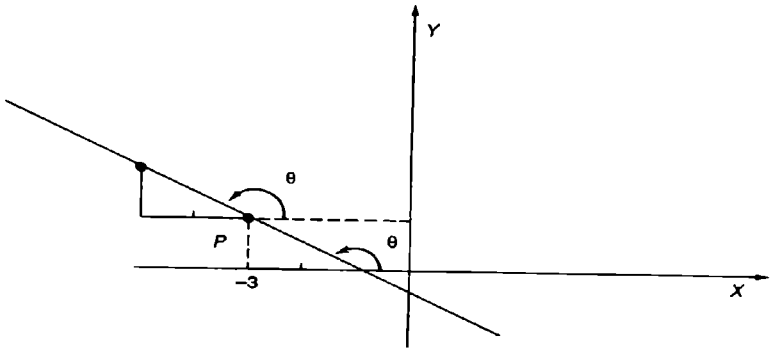
11. Graficar la recta que pasa por el punto (3, 4) y su pendiente es 2/3.

$$m = \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{2}{3}$$



Es decir, a partir del punto P se traza un segmento paralelo al eje x de 3 unidades y del punto de llegada se traza un segmento paralelo al eje y de dos unidades ya que $\tan\theta = -\frac{2}{3}$

12. Graficar la recta que pasa por el punto $(-3, 1)$ y la pendiente es $m = -1/2$.



$$m = \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{-1}{2}$$

De la definición de pendiente, deducimos los siguientes dos teoremas.

Teorema 3.

Dos rectas no verticales son paralelas si sólo si sus pendientes son iguales.

Demostración.

Sean L_1 y L_2 dos rectas no verticales y sean m_1 y m_2 las pendientes respectivas de L_1 y L_2. Supongamos primero que L_1 es paralela a L_2 $(L_1 \parallel L_2)$, entonces L_1 y L_2 tienen la misma inclinación $\theta_1 = \theta_2$ y en consecuencia $m_1 = tg\,\theta_1 = tg\,\theta_2 = m_2$, es decir: $m_1 = m_2$.

Ahora, si $m_1 = m_2$, entonces $\text{tg}\,\theta_1 = \text{tg}\,\theta_2$ y puesto que la inclinación es un ángulo $0 \leqslant \theta < 180°$, se tiene que $\theta_1 = \theta_2$, es decir, tienen la misma inclinación y por lo tanto $L_1 \parallel L_2$.

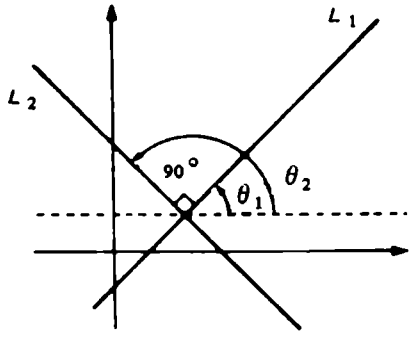
Teorema 4.

> Dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario.

Demostración.

Sean m_1 y m_2 las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente. Supongamos que $L_1 \perp L_2$ (L_1 perpendicular a L_2). Además, supongamos que $m_1 = \text{tg}\theta_1$ y $m_2 = \text{tg}\,\theta_2$, y que $\theta_1 < \theta_2$.

Tracemos una recta paralela al eje x a través del punto de intersección de L_1 y L_2. Entonces $\theta_2 = 90° + \theta_1$ y tenemos que:



$$m_2 = \text{tg}\,\theta_2 = \text{tg}\,(90° + \theta_1)$$

$$= -\cot\theta_1$$

$$= -\frac{1}{\text{tg}\ \theta_1}$$

$$= -\frac{1}{m_1}$$

es decir, tenemos $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

Ahora supongamos que $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ o equivalentemente $m_1\, m_2 = -1$.

Esto nos dice que $m_1 = tg\,\theta_1$ y $m_2 = tg\,\theta_2$ son de signos opuestos. Supongamos que $m_1 = tg\,\theta_1 > 0$ y que $m_2 = tg\,\theta_2 < 0$. Esto implica que

$$0° < \theta_1 < 90° \text{ y } 90° < \theta_2 < 180°.$$

Ahora $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

$$\text{tg}\,\theta_2 = -\frac{1}{\text{tg}\ \theta_1} = -\cot\theta_1 = \text{tg}\,(\theta_1 + 90°)$$

de donde:

$$\text{tg}\,\theta_2 = \text{tg}\,(\theta_1 + 90°)$$

y se deduce que: $\theta_2 = \theta_1 + 90°$ o que $\theta_1 - \theta_2 = 90°$

es decir, $L_1 \perp L_2$.

Ejemplos.

13. Demostrar que la recta L_1 que pasa por los puntos A (0, 2) y B (1, 5) es paralela a la recta L_2 que pasa por los puntos C (2, 1) y D (−1, −8). Si L_1 es paralela a L_2 entonces m_1 debe ser igual a m_2.

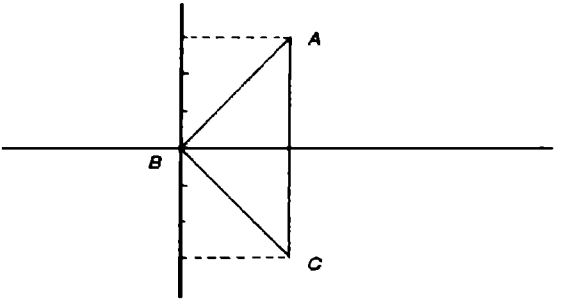
$$m_1 = \frac{5 - 2}{1 - 0} \; ; \; m_2 = \frac{-8 - 1}{-1 - 2}$$

$$m_1 = \frac{3}{1} \qquad ; \; m_2 = \frac{-9}{-3}$$

$$m_1 = 3 \qquad ; \; m_2 = 3$$

y como $m_1 = m_2$ entonces $L_1 \parallel L_2$

14. Demostrar que los puntos con coordenadas A (3, 3), B (0, 0) y C (3, −3) son los vértices de un triángulo rectángulo



Si el triángulo es rectángulo entonces la recta que pasa por los puntos AB debe ser perpendicular a la recta que pasa por los puntos BC, es decir,

$$m_{AB} = \frac{-1}{m_{BC}}$$

$$\frac{0 - 3}{0 - 3} = \frac{-1}{\dfrac{-3 - 0}{3 - 0}}$$

$$1 = \frac{-1}{-1}$$

$$1 = 1$$

Por lo que si son perpendiculares y el triángulo es rectángulo

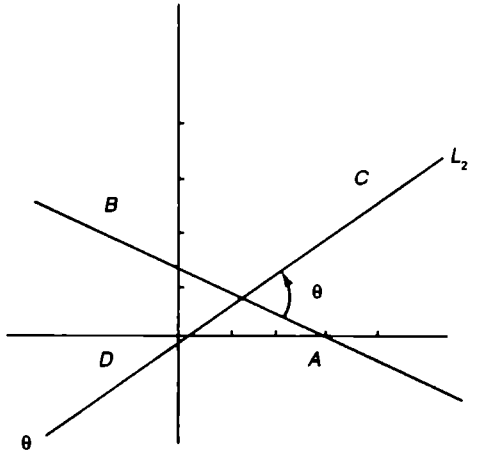
Si θ es el ángulo, medido en dirección contraria a las manecillas del reloj entre dos rectas, entonces

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1, m_2} \text{ ó } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 - m_1 m_2}\right)$$

donde m_2 es la pendiente de la recta terminal y m_1 la de la recta inicial.

Ejemplo.

15. Obtener el ángulo entre las rectas L_1 y L_2 si L_1 pasa por los puntos A (3, 0) B (−1, 2) y L_2 por los puntos c (4, 3) y D (0, 0)



$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$m_1 = \frac{2 - 0}{-1 - 3} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

$$m_2 = \frac{0 - 3}{0 - 4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{así } \tan\theta = \frac{\frac{3}{4} - \left(\frac{-1}{2}\right)}{1 + \frac{3}{4}\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{8}}$$

$$\tan\theta = \frac{40}{20} = 2$$

$$\text{y } \theta = \tan^{-1}(2)$$

$$\theta = 63.434949$$

$$\theta \approx 63^\circ\ 26'$$

Ejercicio.

1. Hallar el punto medio del segmento AB.

   a) $A\ (6, -2)$ y $B\ (-6, 4)$
   b) $A\ (0, 0)$ y $B\ (3, 4)$
   c) $A\ (-1, -2)$ y $B\ (4, -1)$
   d) $A\ (3, 10)$ y $B\ (0, -7)$
   e) $A\ (0, -5)$ y $B\ (5, 0)$
   f) $A\ (3, 2)$ y $B\ (-1, -1)$

2. Encuentre el perímetro de:

   a) Triángulo cuyos vértices son $A\ (5, -1)$, $B\ (3, 1)$ y $C\ (-1, 8)$.
   b) Cuadrilátero cuyos vértices son $A\ (-3, 2)$, $B\ (5, 3)$, $C\ (3, -3)$ y $D\ (-2, 3)$

3. Los puntos $A\ (-4, -1)$, $B\ (2, 7)$, $C\ (6, 5)$ y $D\ (8, -5)$ son los vértices del cuadrilátero $ABCD$. Hallar las coordenadas del punto medio de cada segmento de recta que une los puntos medios de los lados opuestos y determine la distancia de los segmentos.

4. Tres vértices de un rectángulo son los puntos $(2, -1)$, $(7, -1)$ y $(7, 3)$. Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.

5. Los vértices de un cuadrilátero son los puntos $(1, 3)$, $(7, 3)$, $(9, 8)$ y $(3, 8)$. Demostrar que el cuadrilátero es un paralelogramo.

6. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 1)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice.

7. Demostrar que los puntos $(-5, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, -2)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

8. El punto medio del segmento AB es $P(-4, -3)$, si las coordenadas de A son $(8, -5)$ encuentre B.

9. Encontrar las longitudes de las medias del triángulo cuyos vértices son $A(4, 1)$, $B(-5, 2)$ y $C(3, -7)$.

10. Decir si la recta $P_1 Q_1$ es paralela o perpendicular a la recta $P_2 Q_2$.

    a) $P_1(-5, 1), Q(3, -2); P_2(3, 2), Q_2(1, -1)$
    b) $P_1(3, -1), Q_1(-2, 5); P_2(5, 0), Q_2(-1, -5)$
    c) $P_1(4, 2), Q_1(7, 2); P_2(8, 5), Q_2(8, -3)$
    d) $P_1(-6, 3), Q_1(12, 0); P_2(4, -2), Q_2(-1, -5)$
    e) $P_1(12, 8), Q_1(4, 8); P_2(3, 1), Q_2(-6, 1)$
    f) $P_1(3, -5), Q_1(6, -2); P_2(5, 1), Q_2(6, 0)$

11. Trazar por $P(5, -2)$ una recta cuya pendiente sea $\frac{3}{4}$.

12. Los puntos $A(3, -2)$, $B(4, 1)$ y $C(-3, 5)$ son los vértices de un triángulo. Demostrar que la recta que pasa por los puntos medios de AB y AC es paralela a BC.

13. Probar que el triángulo ABC es isósceles, si $A(0, 0)$, $B(0, 2b)$ y $C(\frac{a}{2}, b)$.

14. Los puntos $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a + b, c)$ y $D(b, c)$ son los vértices de un paralelogramo. Demostrar que:

    a) La suma de los cuadrados de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.
    b) Las diagonales se bisectan recíprocamente.

15. Dados los siguientes pares de puntos, encontrar la pendiente de la recta que pasa por dichos puntos y encontrar el ángulo de inclinación.

    a) $P(3, 2)$ y $Q(5, -1)$
    b) $P(1/2, 1/3)$ y $Q(3, 5)$
    c) $P(4, 7)$ y $Q(1/5, -5)$
    d) $P(-1, -9)$ y $Q(1/7, -7)$
    e) $P(-6, -12)$ y $Q(1, 1)$
    f) $P(0, 0)$ y $Q(3, 11)$

16. Graficar la recta que pasa por el punto indicado y la pendiente dada.

a) $P(3, 5)$ y $m = 2/3$
b) $P(-1, 4)$ y $m = \text{tg } 90°$
c) $P(2, -3)$ y $m = \text{tg } 45°$
d) $P(-1/2, -1/2)$ y $m = 5/4$
e) $P(8, 9)$ y $m = -3/5$
f) $P(-3, 6)$ y $m = \text{tg } 120°$

17. Demostrar, analíticamente, los resultados enunciados en los problemas siguientes.

a) La suma de las distancias de un punto cualesquiera $P(x, y)$ a dos vértices opuestos de un rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las distancias a los otros dos vértices.
b) Las diagonales de un rombo son mediatrices la una de la otra y perpendiculares.
c) El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices.
d) Los segmentos que unen los puntos medios de los lados adyacentes de un cuadrilátero cualquiera, forman un paralelogramo.
e) Las diagonales de un trapecio isósceles son iguales.
f) Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre sí.
g) Las rectas trazadas desde un vértice de un paralelogramo a los puntos medios de los lados opuestos trisectan una diagonal.
h) Los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero se bisectan recíprocamente.
i) El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a la mitad de ese tercer lado.
j) La distancia entre los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es igual a la semisuma de la base.

18. Obtener el punto $P(x, y)$ de tal forma que la razón de $\overline{AP}$ a $\overline{AB}$ sea R.

a) $A(3, 2)$, $B(4, 0)$; $R = 1/2$
b) $A(0, -2)$, $B(4, 3)$; $R = 2/5$
c) $A(5, -1)$, $B(-1, 6)$; $R = 2/3$
d) $A(2, 2)$, $B(1, -2)$; $R = 4/3$
e) $A(0, 0)$; $B(-5, -3)$; $R = 2$
f) $A(1, 4)$; $B(2, -1)$; $R = 4/5$
g) $A(-2, -2)$; $B(0, 0)$; $R = 3$

19. Obtener el ángulo entre las rectas L_1 y L_2, donde L_1 pasa por los puntos A y B, y L_2 pasa por los puntos C y D

a) $A\ (-4, 5)$, $B\ (3, -2)$, $C\ (3, 2)$, $D\ (1, 1)$
b) $A\ (3, -1)$, $B\ (-2, 5)$, $C\ (0, 5)$, $D\ (1, 0)$
c) $A\ (3, 3)$, $B\ (0, 3)$, $C\ (2, 6)$, $D\ (-1, 2)$
d) $A\ (2, 4)$, $B\ (2, 5)$, $C\ (1, 3)$, $D\ (3, 3)$

Sección 10.2

ECUACIÓN DE LA RECTA

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Encontrar la ecuación de una recta donde:
   a) Se conocen dos de sus puntos.
   b) Se conocen la pendiente y un punto.
2. Identificar la ecuación general de una recta.
3. Dada una recta en su forma general, pasarla a la forma $y = mx + b$ y viceversa.
4. Encontrar y graficar el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales con dos incógnitas.
5. Identificar la fórmula que determina la distancia de un punto a una recta.
6. Dados un punto y una recta, encontrar su distancia.

La línea recta es la curva geométrica más simple; sin embargo, sus aplicaciones son variadas. En esta sección estableceremos la ecuación de una línea recta en sus distintas formas y, también, estudiaremos los sistemas de desigualdades lineales con dos variables. Finalmente, llegaremos a una fórmula para determinar la distancia de un punto a una recta.

Sean $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$ dos puntos de una línea recta y consideremos un punto cualquiera $P\ (x, y)$ (no le ponemos índice a las coordenadas de P para indicar que esta variable puede estar colocada en cualquier parte de la recta). El valor de la pendiente m lo podemos determinar tomando los puntos P y P_1 o tomando los puntos P_1 y P_2:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \qquad \text{o} \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

entonces:

$$m = m$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Frecuentemente, el valor de la pendiente es un dato conocido, entonces con la pendiente m y un punto $P_1 (x_1, y_1)$ de la recta, determinamos su ecuación, puesto que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

entonces tenemos que:

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

De lo anterior se puede afirmar lo siguiente:

La ecuación de la recta que pasa por el punto P de coordenadas (x_1, y_1) y pendiente m es

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

Ejemplos.

1. Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 5) y tiene pendiente $m = 2$.

   La ecuación de la recta es

   $y - y_1 = m (x - x_1)$
   como $(x_1, y_1) = (3, 5)$ y $m = 2$, entonces
   $y - 5 = 2 (x - 3)$
   $y - 5 = 2x - 6$
   $y - 5 - 2x + 6 = 0$

   $$\boxed{y - 2x + 1 = 0}$$

   Para graficar la recta cuya ecuación es $y - 2x + 1 = 0$ le daremos los valores al origen

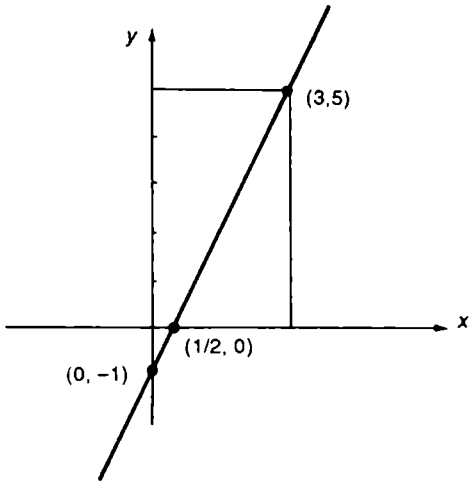
x	y
0	-1
1/2	0

   Si $x = 0$, $y - 2 (0) + 1 = 0$
   $y + 1 = 0$
   $y = -1$

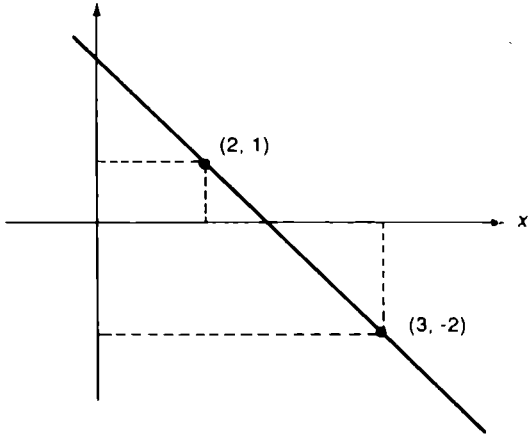
Si $y = 0$, $\quad 0 - 2x + 1 = 0$

$$-2x = -1$$

$$x = 1/2$$



2. Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 1) y (5, −2)



La ecuación de la recta es $y - y_1 = m(x - x_1)$ y el punto $P_1(x_1, y_1)$ puede ser cualquiera de los dos puntos dados.

sea $\qquad P_1(x_1, y_1) = P_1(5_1 - 2)$

y sabemos que $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-2-1}{5-2} = \dfrac{-3}{3} = -1$

y sustituyendo $m = -1$ y el punto $P_1\ (5_1 - 2)$ en la ecuación de la recta, tenemos

$$\begin{aligned} y - (-2) &= -2\ (x - 5) \\ y + 2 &= -x + 5 \\ y + 2x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{y + x - 3 = 0}$$

3. Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, -1)$ y su ángulo de inclinación es de 300.
   La ecuación de la recta es de la forma

$$y - y_1 = m = (x - x_1)$$

el punto $P\ (x_1, y_1) = P\ (-2_1 - 1)$ y sabemos que

$$\begin{aligned} m &= \tan \theta\ (\theta \text{ es el ángulo de inclinación}) \\ m &= \tan 30^\circ \\ m &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

así la ecuación de la recta es

$$y - (-1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(x - (-2)\right)$$

$$y + 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (x + 2)$$

$$\sqrt{3}\,(y + 1) = x + 2$$

$$\sqrt{3}\,y + \sqrt{3} - x - 2 = 0$$

$$\boxed{\sqrt{3}\,y - x + \sqrt{3} - 2 = 0}$$

Consideremos una recta que cruza al eje y en el punto $B(0,b)$ y tiene pendiente m, entonces la ecuación de esta recta es

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\ (x - x_1) \\ y - b &= m\ (x - 0) \\ y - b &= mx \\ y &= mx + b \end{aligned}$$

Es decir

La ecuación de la recta que intersecta al eje y_1 en b y tiene pendiente m es

$$y = mx + b$$

Ejemplos.

4. Dar la ecuación de la recta cuya pendiente es $m = -2$ y que intersecta al eje y en el punto de coordenadas (0, 5). En este ejemplo $m = -2$ y $b = 5$ por lo que la ecuación de la recta es

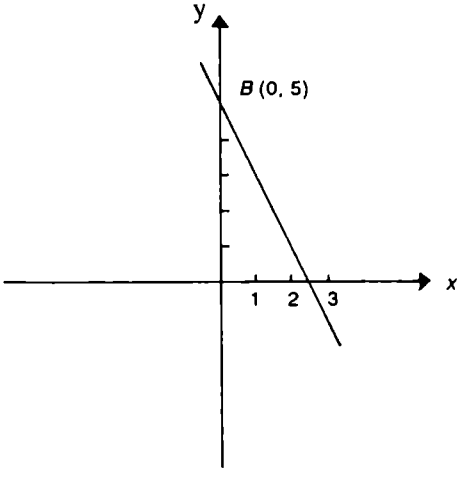
$$y = -2x + 5$$

o también

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 5 &= -2\,(x - 0) \\ y - 5 &= -2x \end{aligned}$$

$$\boxed{y = -2x + 5}$$

y la gráfica es



El punto (0, 5) es uno de los valores al origen, obtendremos el otro para graficar la recta.
Si $y = 0$ entonces

$$0 = -2x + 5$$
$$2x = 5$$
$$x = 5/2$$

x	y
0	5
5/2	0

5. Obtener la ecuación de la recta que intersecta a los ejes de coordenadas en $A(a, o)$ y $B(o,b)$.

La pendiente es $m = \dfrac{b - o}{o - a} = \dfrac{-b}{a}$

y si tomamos el punto $P_1 (x_1, y_1) = A (a,o)$ se tiene que la ecuación es

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

$$y - O = \frac{-b}{a} (x - a)$$

$$y = \frac{-b}{a} x + b$$

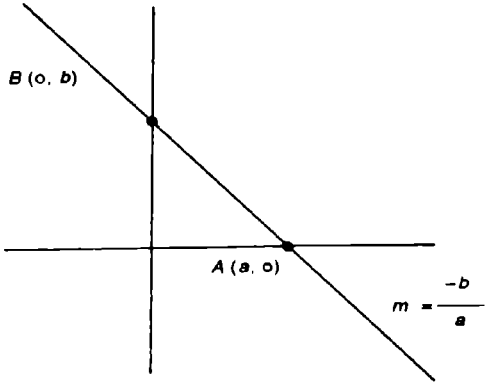
$$y + \frac{b}{a} x = b$$

$$y + \frac{b}{a} x = b$$

y si se divide toda la ecuación entre b se tiene que la ecuación de la recta es

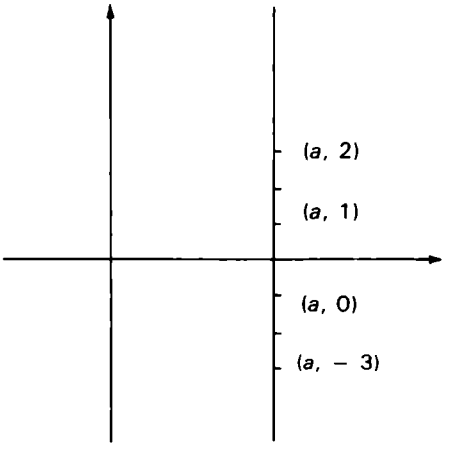
$$\boxed{\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1}$$

donde a es el punto donde la recta intersecta al eje x y b donde cruza al eje y



Rectas paralelas a los ejes

Consideremos una recta L paralela al eje y. Para esta recta todos los puntos tendrán la misma abscisa.



Sea a esta abscisa, entonces para todo $P(x_1, y)$ de la recta, se tiene que $x = a$ y "y" toma cualquier valor de los números reales.

La ecuación de la recta paralela al eje y que intersecta al eje x en el valor de a es

$$x = a$$

Observaciones

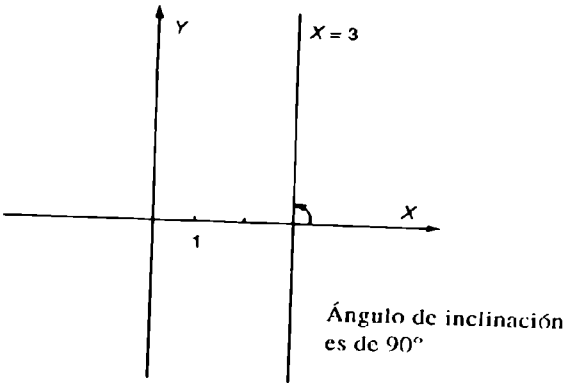
a) La recta paralela al eje y, que intersecta al eje x en el valor de a es el conjunto formado por $\{ (x, y) \mid x = a \}$

b) En el conjunto de puntos que forman la recta paralela al eje y, nos damos cuenta que mientras la variable x toma un solo valor, la variable y no tiene restricciones y toman todos los valores reales.

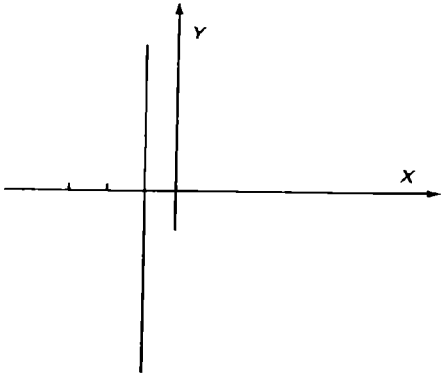
c) La pendiente de una recta paralela al eje y, *NO EXISTE* ya que el ángulo de inclinación es $\theta = 90°$ y como $m = \tan 90°$ y $\tan 90°$ no existe.

Ejemplos.

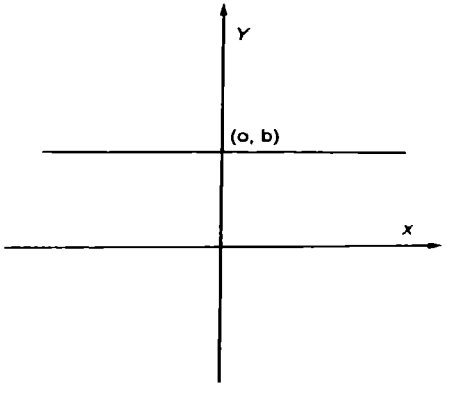
6. Graficar la recta de ecuación $x = 3$



7. Graficar la recta de ecuaciones $x = -1/2$



Consideremos una recta L que sea paralela al eje x



La pendiente de esta recta es $m = 0$ ya que el ángulo de inclinación es $\theta = 0^\circ$ y $m = \tan \theta = 0$.

Si $P(0, b)$ está en la recta, cuya pendiente es $m = 0$, entonces la ecuación es

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - b &= 0(x - 0) \\ y - b &= 0 \\ y &= b \end{aligned}$$

Con esto podemos afirmar que:

> La ecuación de la recta paralela al eje x que intersecta al eje y en b es
>
> $$y = b$$

Observaciones

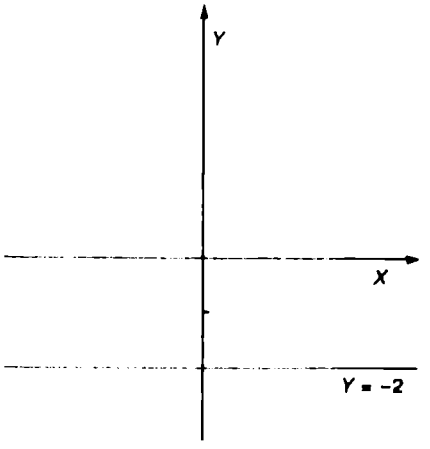
a) La recta paralela al eje x, que intersecta al eje y en el valor de b es el conjunto formado por $\{(x, y) \mid y = b\}$

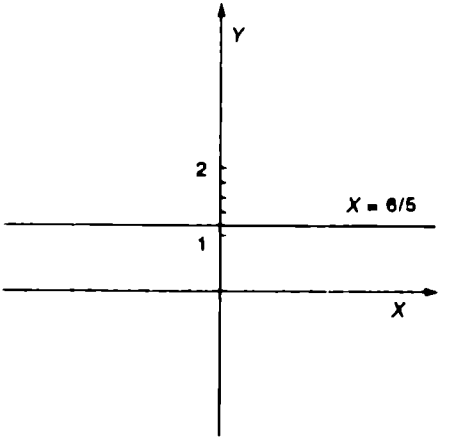
b) En el conjunto de puntos que forman la recta paralela al eje x, la variable y toma un solo valor, mientras que la variable x puede tomar cualquier número real.

c) El ángulo de inclinación de una recta paralela al eje x es 0° y la pendiente es $m = 0^\circ$

Ejemplos.

8. Graficar las rectas cuyas ecuaciones son $y = -2$ y $y = +6/5$





Observando cualquiera de las formas que tiene la ecuación de una línea recta, nos damos cuenta que toda recta en el plano es la gráfica de una ecuación de primer grado. Además, podemos probar el siguiente teorema:

Teorema 1.

$\{ (x, y) \mid Ax + By + C = 0 \}$ es una recta, que es conocida como la forma general de una recta.

Demostración.

Si $B \neq 0$, tenemos que: $Ax + By + C = 0$ se convierte en

$$\frac{A}{B} x + y + \frac{C}{B} = 0$$

$$y = \frac{-A}{B} x + \frac{-C}{B}$$

Esta última ecuación es del tipo $y = mx + b$, donde

$$m = \frac{-A}{B} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{-C}{B}$$

Es decir, es la ecuación de una recta con pendiente $m = \frac{-A}{B}$ y que corta el eje y en el punto $(0, \frac{-C}{B})$.

Si $B = 0$, entonces $A \neq 0$, y $Ax + By + C = 0$ se convierte en:

$$Ax + C = 0$$

$$x + \frac{C}{A} = 0$$

$$x = -\frac{C}{A}$$

que es la ecuación de una recta paralela al eje y.

Del teorema anterior podemos afirmar lo siguiente:

La ecuación general de una recta es de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

Observaciones

a) La ecuación $Ax + B\,y + C = 0$ donde el exponente de x y y es "1" representa gráficamente una recta.

b) Dada la ecuación de la recta $Ax + B\,y + C = 0$, podemos darle la forma $y = m\,x + b$, es decir

$$Ax + By + C = 0$$
$$By = -Ax - C$$
$$y = \frac{A\,x - C}{B}$$
$$y = \frac{-A}{B}\,x - \frac{C}{B}$$

y se observa, que ya despejada la variable y, el coeficiente de la variable x es la pendiente de la recta.

Ejemplos.

9. Graficar la recta de ecuación $2x - 3y - 1 = 0$ y dar la pendiente.

Despejaremos y de la ecuación

$$-3y = 1 - 2x$$
$$y = \frac{1 - 2x}{-3}$$
$$y = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,x$$
$$\boxed{y = \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}}$$

La pendiente es el coeficiente de la variable x ya despejada la variable y, por lo que

$$m = 2/3$$

Para graficarla le daremos los valores al origen.

x	y
0	$-1/3$
$1/2$	0

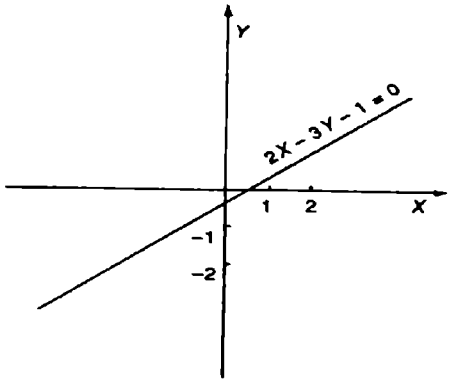
Si $x = 0$ entonces $y = \frac{2}{3}(0) - \frac{1}{3}$

$$y = -\frac{1}{3}$$

Si $y = 0$ entonces $0 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3}x \qquad \frac{3(1)}{3(2)} = x \qquad 1/2 = x$$

y así la gráfica es



pendiente $m = 2/3$

10. Graficar la recta cuya ecuación es $4x + y - 8 = 0$ y dar la pendiente de la recta.

valores al origen

Si $x = 0$ entonces $4(0) + y - 8 = 0$

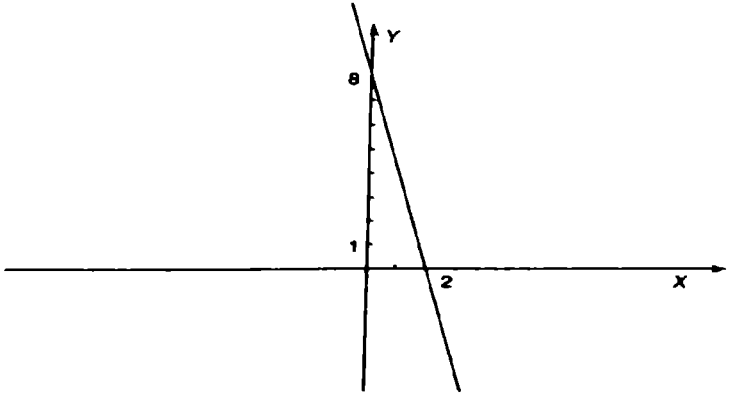
$y = 8$

Si $y = 0$ entonces $4x + 0 - 8 = 0$

$4x = 8$

$x = 2$

x	y
0	8
2	0



La pendiente la podemos obtener de dos formas, una de ellas es despejar y de la ecuación dada y el coeficiente de x es la pendiente

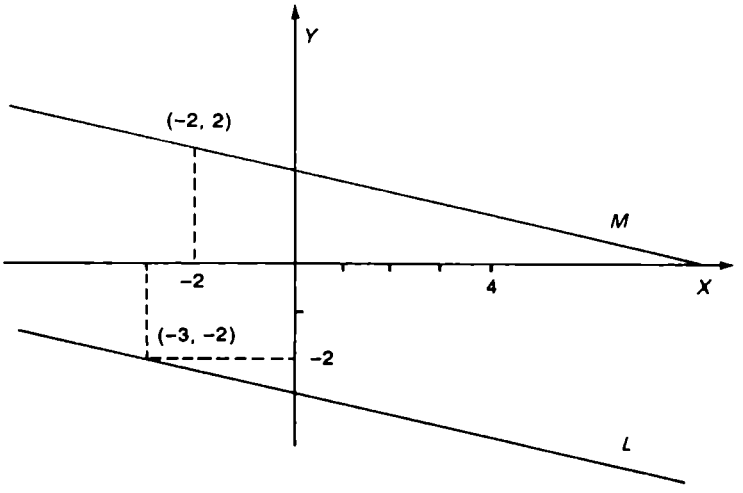
$$4x + y - 8 = 0$$
$$y = -4x - 8$$

por lo que la pendiente es $m = -4$ y la otra forma es utilizar los puntos de la recta que se obtuvieron para graficarla y utilizar la fórmula dependiente, es decir,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 0}{0 - 2} = \frac{8}{-2} = -4$$

por lo que $\boxed{m = -4}$

11. Obtener ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3, -2)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 2)$



L es la recta cuya ecuación nos piden que pase por el punto $(-3, -2)$ y debe ser paralela a la recta M.
La pendiente (m_M) de la recta M debe ser igual a la pendiente de la recta L (m_L).

y $m_M = \frac{1 - 2}{4 - (-2)} = \frac{-1}{6}$, o sea $m_M = -1/6$

entonces $m_L = m_M = -1/6$, es decir $\boxed{m_L = -1/6}$

y como la recta L pasa por el punto $(-3, -2)$ entonces la ecuación de L es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-2) = -\frac{1}{6}(x - (-3))$$

$$y + 2 = -\frac{1}{6}(x + 3)$$

$$6(y + 2) = -x - 3$$
$$6y + 12 + x + 3 = 0$$

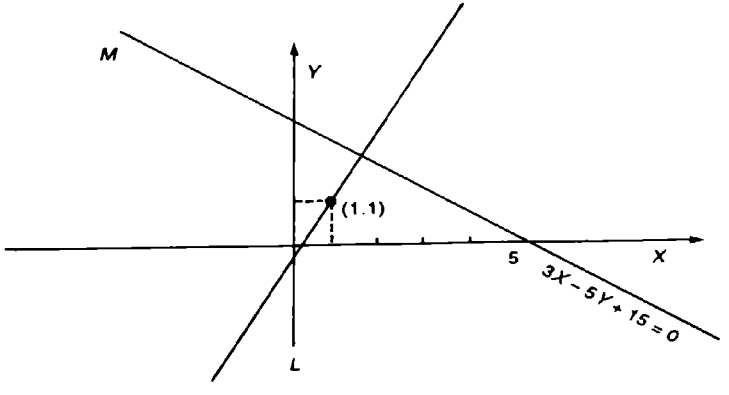
$$\boxed{6y + x + 15 = 0}$$

12. Encontrar la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta de ecuación $3x - 5y + 15 = 0$ y que pasa por el punto de coordenadas $(1, 1)$.
Antes de resolver el problema, graficaremos la información que nos proporcionan.
Graficaremos la recta de ecuación $3x - 5y + 15 = 0$

Si $x = 0$, entonces $3(0) - 5y + 15 = 0$
$$-5y = -15$$
$$y = 3$$

Si $y = 0$, entonces $3x - 5(0) + 15 = 0$
$$3x = -15$$
$$x = 5$$

x	y
0	3
5	0



La ecuación que nos piden es la de la recta L que pasa por (1, 1) y es perpendicular a M (se forma un ángulo de 90° entre las dos rectas).

Si la recta L es perpendicular a M entonces $m_1 = \dfrac{-1}{m_M}$.

Para obtener la pendiente de la recta M, despejaremos "y" de la ecuación

$$3x - 5y + 15 = 0$$
$$-5y = -15 - 3x$$
$$y = \frac{-15 - 3x}{-5}$$
$$y = 3 + \frac{3}{5}x$$

y el coeficiente de x es la pendiente, es decir, $m_M = 3/5$.

así
$$m_L = \frac{-1}{m_M} = \frac{-1}{\frac{3}{5}} = \frac{-5}{3}$$

$$\boxed{M_L = -5/3}$$

y como la recta L pasa por el punto (1, 1) entonces su ecuación es:

$$y - y_1 = m_L (x - x_1)$$
$$y - 1 = -\frac{5}{3}(x - 1)$$
$$3(y - 1) = -5(x - 1)$$
$$3y - 3 = -5x + 5$$
$$3y + 5x - 3 - 5 = 0$$
$$\boxed{3y + 5x - 8 = 0}$$

13. Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son

$3x - 5y + 1 = 0$ y $2x + 4y - 2 = 0$,

y tiene un ángulo de inclinación de 45°.

Se graficarán las dos rectas cuyas ecuaciones se dan

En $3x - 5y + 1 = 0$.

Si $x = 0$

$$3(0) - 5y + 1 = 0$$
$$-5y = -1$$
$$y = 1/5$$

Si $y = 0$

$$3x - 5(0) + 1 = 0$$
$$3x + 1 = 0$$
$$3x = -1$$
$$x = -1/3$$

x	y
0	1/5
$-1/3$	0

En $2x + 4y - 2 = 0$

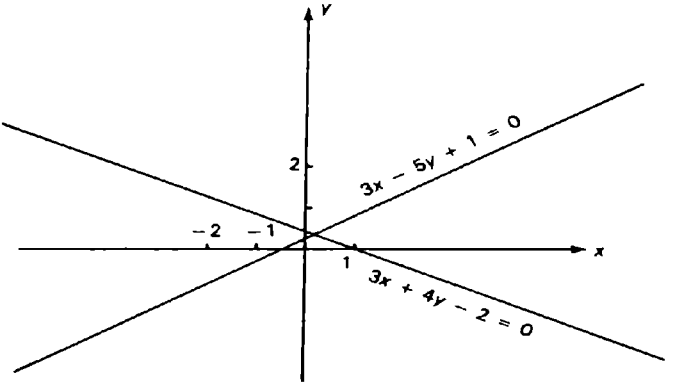
Si $x = 0$

$$2(0) + 4y - 2 = 0$$
$$4y = 2$$
$$y = 2/4$$
$$y = 1/2$$

Si $y = 0$

$$2x + 4(0) - 2 = 0$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

x	y
0	1/2
1	0



La recta L, cuya ecuación se pide, pasa por el punto de intersección de las rectas dadas y para obtener ese punto de intersección, formaremos un sistema con las ecuaciones y se resolverá, ya que la solución del sistema es el punto de intersección de ambas rectas.

$$\begin{array}{r} 3x - 5y + 1 = 0 \\ 2x + 4y - 2 = 0 \\ \hline (-2)\,(3x - 5y + 1) = 0\,(-2) \\ (3)\,(2x + 4y - 2) = 0\,(3) \\ \hline -6x + 10y - 2 = 0 \\ +6x + 12y - 6 = 0 \\ \hline 22y - 8 = 0 \end{array}$$

$$y = \frac{8}{22}$$

$$\boxed{y = \frac{4}{11}}$$ y como $3x - 5y + 1 = 0$

$$3x - 5\left(\frac{4}{11}\right) + 1 = 0$$

$$3x - \frac{20}{11} + 1 = 0$$

$$3x - \frac{20}{11} + \frac{11}{11} = 0$$

$$3x - \frac{9}{11} = 0$$

$$3x = \frac{9}{11}$$

$$x = \frac{9}{11(3)}$$

$$\boxed{x = \frac{3}{11}}$$

Entonces el punto de intersección es (3/11, 4/11). Se dio como dato que el ángulo de inclinación es de 45°, por lo tanto $m_L = \tan 45°$

$$\boxed{m_L = 1}$$

y así la ecuación de la recta que se busca es

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - \frac{4}{11} = 1\left(x - \frac{3}{11}\right)$$

$$y - \frac{4}{11} = x - \frac{3}{11}$$

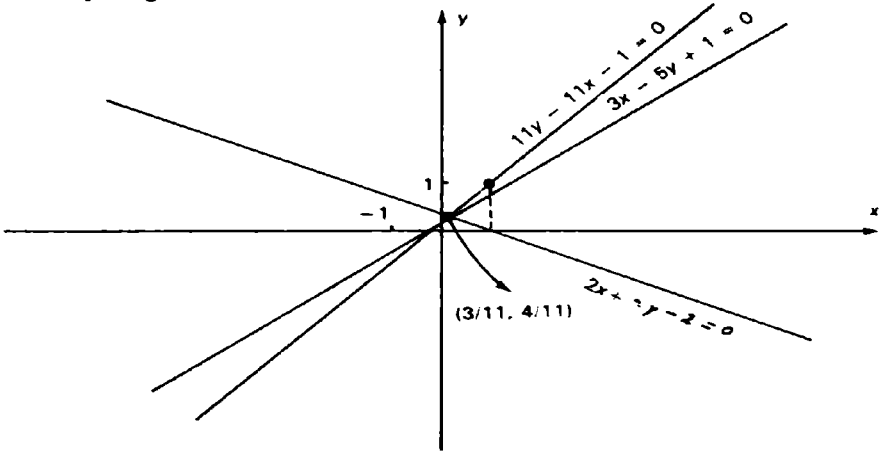
$$y - x - \frac{4}{11} + \frac{3}{11} = 0$$

$$y - x - \frac{1}{11} = 0$$

$$\boxed{11y - 11x - 1 = 0}$$

x	y
1	12/11
3/11	4/11

y su gráfica es



14. Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta de ecuación $2x - y + 4 = 0$ y que pasa por el punto donde la recta de ecuación $x - 2y + 1 = 0$ intersecta al eje y.

Gráficaremos las dos rectas que nos proporcionan.

$2x - y + 4 = 0$

Si $x = 0$ entonces $2(0) - y + 4 = 0$
$-y = -4$
$y = 4$

Si $y = 0$ entonces $2x - 0 + 4 = 0$
$2x = -4$
$x = -2$

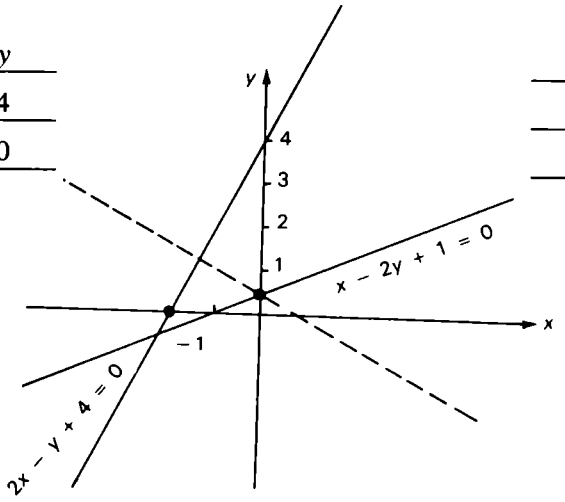
$x - 2y + 1 = 0$

Si $x = 0$ entonces $0 - 2y + 1 = 0$
$-2y = -1$
$y = 1/2$

Si $y = 0$ entonces $x - 2(0) + 1 = 0$
$x = -1$

x	y
0	4
−2	0

x	y
0	1/2
−1	0



La ecuación de la recta punteada en la gráfica es la que se pide, ya que ésta pasa por el punto donde la recta de Ec. $x - 2y + 1 = 0$ intersecta al eje y en el punto $(0, 1/2)$ y es perpendicular a la recta de Ec. $2x - y + 4 = 0$. Despejaremos la variable y de la ecuación $2x - y + 4 = 0$ para obtener su pendiente.

$$\begin{aligned} 2x - y + 4 &= 0 \\ -y &= -4 - 2x \\ -y &= 4 + 2x, \text{ entonces } m = 2 \end{aligned}$$

La pendiente de la recta que se busca es el inverso y de signo contrario a $m = 2$, es decir $m_1 = -1/2$ y la ecuación de la recta es

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 1/2 &= -1/2\,(x - 0) \\ y - 1/2 &= -1/2\,x \\ 2y - 1 &= -x \end{aligned}$$

y con la ecuación de la recta buscada es $2y + 1x - 1 = 0$

15. Hallar la ecuación de la recta que es paralela a la recta de ecuación $3x + 2y - 2 = 0$ y que pasa por el punto donde la recta de ecuación $x - 3y + 2 = 0$ intersecta al eje x.

Se graficarán las dos rectas que nos dan

$3x + 2y - 2 = 0$ $\qquad$ $x - 3y + 2 = 0$

Si $x = 0$ entonces $3(0) + 2y - 2 = 0$

$$2y - 2 = 0$$
$$2y = 2$$
$$y = 1$$

Si $x = 0$ entonces $0 - 3y + 2 = 0$

$$-3y = -2$$
$$y = 2/3$$

Si $y = 0$ entonces $3x + 2(0) - 2 = 0$

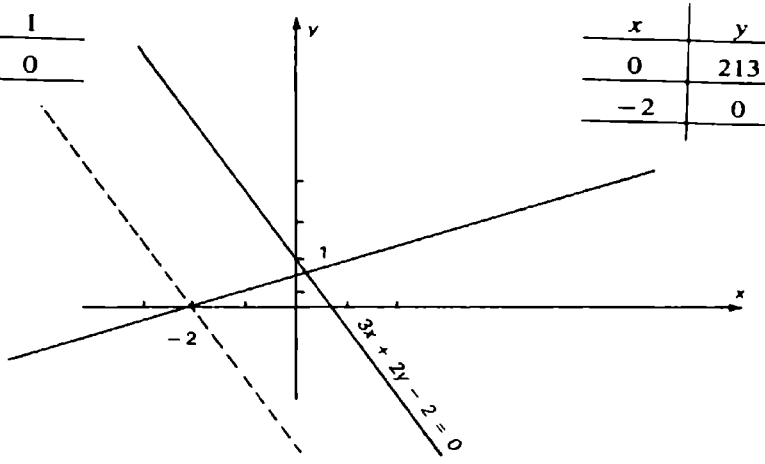
$$3x = 2$$
$$x = 2/3$$

x	y
0	1
213	0

Si $y = 0$ entonces $x - 3(0) + 2 = 0$

$$x = -2$$

x	y
0	213
-2	0



La ecuación de la recta punteada en la gráfica anterior es la que se nos pide obtener, ya que ésta pasa por el punto $(-2, 0)$ que es la intersección de la recta de ecuación $x - 3y + 2 = 0$ con el eje x y es paralela a la recta de ecuación $3x + 2y - 2 = 0$.

La pendiente de la recta buscada es igual a la de la recta de ecuación

$$3x + 2y - 2 = 0$$
$$2y = 2 - 3x$$
$$y = \frac{2 - 3x}{2}$$

$y = 1 - 3/2x$ y la pendiente es $m = -3/2$

y así la recta que se nos pide pasa por el punto $(-2, 0)$ y su pendiente es $m = -3/2$ y su ecuación es

$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 2)$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$y + \frac{3}{2}x - 3 = 0$$

$$\boxed{2y + 3x - 6 = 0}$$

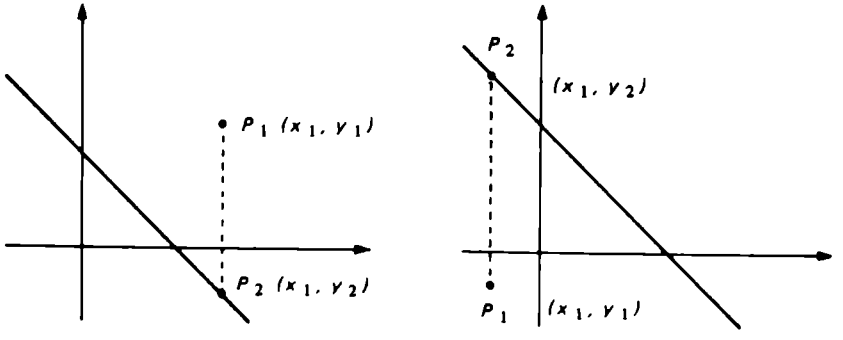
16. Hallar el valor de k para que la recta cuya ecuación es: $3kx + 5y + k - 2 = 0$ pase por el punto $(-1, 4)$.

Sustituyendo en la ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} 3k(-1) + 5(4) + k - 2 &= 0 \\ -3k + 20 + k - 2 &= 0 \\ -2k + 18 &= 0 \\ k &= 9 \end{aligned}$$

Desigualdades lineales en dos variables

Sabemos que toda recta no vertical es la gráfica de una ecuación $y = mx + b$. Consideremos dos puntos con igual abscisa $P_1\ (x_1, y_1)$ $P_2\ (x_1, y_2)$ donde P_2 esté sobre la recta. Veamos que P_1 está arriba de la recta L si y sólo si $y_1 > y_2$ y sustituyendo tenemos $y_1 > mx_1 + b$. De la misma manera P_1 está abajo de la recta L si y sólo si $y_1 < y_2$, esto es: $y_1 < mx_1 + b$.



Teorema 2

El punto $P_1\ (x_1, y_1)$ está arriba de la gráfica de $y = mx + b$ si y sólo si $y_1 > mx_1 + b$ y está abajo de ella si y sólo si $y_1 < mx_1 + b$.

Ejemplos.

17. Construir la gráfica de la relación: $R = \{ (x, y) \mid 3x + 2y < 6 \}$

$3x + 2y < 6$ es equivalente a $y < -\frac{3}{2}x + 3$, entonces:

$$R = \{ (x, y) \mid 3x + 2y < 6 \} = \{ (x, y) \mid y < \frac{3}{2}x + 3 \}$$

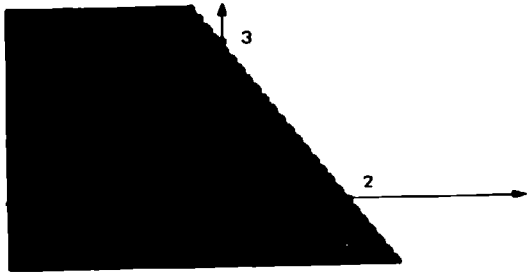
Entonces gráficamente los puntos que están abajo de:

$$y = -3/2\ x + 3$$

constituyen la gráfica de $\{ (x,y) \mid 3x + 2y < 6 \}$. Si tomamos el punto P (1, −2) y sustituimos en R, resulta:

$$3(1) + 2(-2) = 3 - 4 = -1 < 6$$

es decir, los puntos del semiplano que está abajo de L satisfacen la desigualdad.



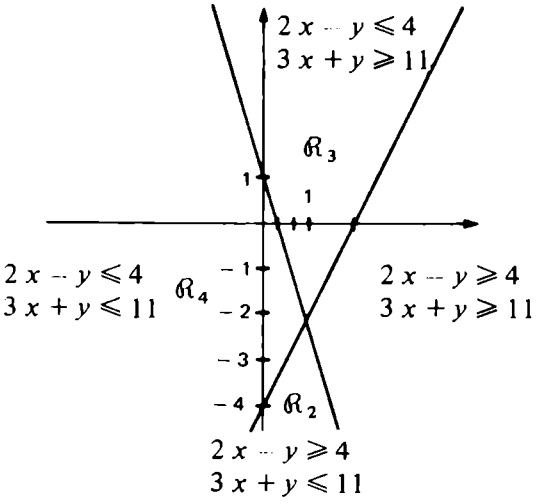
18. Construya la gráfica de la relación: $R = \{ (x, y) \mid 2x - y \leq 3 \}$

$$2x - y \leq 3$$
$$2x - 3 \leq y$$
$$y \geq 2x - 3$$
$$R = \{ (x, y) \mid 2x - y \leq 3 \} = \{ (x, y) \mid y \geq 2x - 3 \}$$

Entonces, la gráfica de esta relación está formada por los puntos de la recta $y = 2x - 3$ y todos los puntos del semiplano que está arriba de la recta.

Dos rectas que se cortan dividen al plano en cuatro regiones

Consideremos dos rectas cuyas ecuaciones son $2x - y = 4$ y $3x + y = 11$. Si trazamos las gráficas de estas rectas, tenemos dividido el plano en cuatro regiones: $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ y $\mathcal{R}_4$



y cada una de estas regiones queda descrita por un par de desigualdades. Así, por ejemplo, todos los puntos de la región $\mathcal{R}_1$ satisfacen simultáneamente $2x - y - 4 \geqslant 0$ y $3x + y - 11 \geqslant 0$.

Ejemplo.

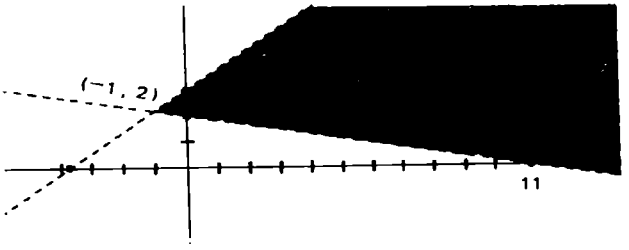
19. Construya la gráfica de la región que consta de los puntos que satisfacen el siguiente sistema de desigualdades lineales en dos variables.

$$\begin{aligned} x + 6y - 11 &> 0 \\ 3x - 4y + 11 &> 0 \\ -2x - y + 11 &> 0 \end{aligned}$$

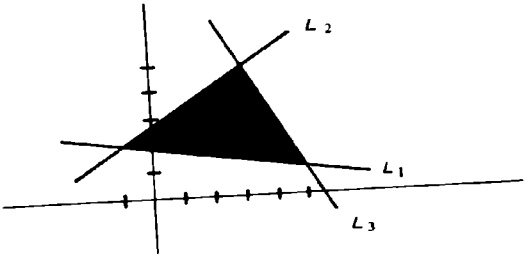
Grafiquemos la recta $x + 6y - 11 = 0$; si tomamos un punto en alguno de los semiplanos, por ejemplo, (0, 0), tenemos que al sustituir en la desigualdad, $0 + 6(0) - 11 = 0 - 11 = -11 > 0$, lo que es falso. El punto (0, 0) no satisface la desigualdad, por lo que con-

cluimos que la gráfica de la desigualdad está constituida por el semiplano que no contiene al punto (0, 0).

Procediendo de manera similar con la segunda desigualdad, encontramos que las dos primeras desigualdades se satisfacen simultáneamente por todos los puntos sombreados en la figura siguiente:

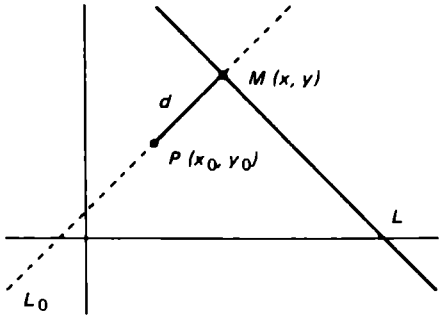


Intersectando esta región sombreada con la región de todos los puntos que satisfacen la tercera desigualdad, se obtiene la región interna del triángulo cuyos vértices son: (3,5), (5, 1) y (−1, 2).



Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto a una recta es la distancia del segmento perpendicular trazado desde el punto hasta la recta.



Para determinar esta distancia, debemos seguir los siguientes pasos:

1o. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $P(x_0, y_0)$ y es perpendicular a L, que llamaremos L_0.
2o. Encontrar el punto de intersección de esta recta con la recta L, que llamamos $M(x, y)$.
3o. Encontrar la distancia de $P(x_0, y_0)$ a $M(x_1, y_1)$. Para esto tenemos

$$d = |\overline{PM}| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

De acuerdo a los pasos indicados anteriormente, estableceremos una fórmula para determinar la distancia de un punto a una recta.

Sea $Ax + By + C = 0$ la ecuación de la recta L dada y su pendiente es $m = -A/B$, entonces la pendiente de L_0 es $m_0 = B/A$ y como $P_0(x_0, y_0)$ pertenece a L_0, la ecuación de L_0 es:

$$y - y_0 = B/A\,(x - x_0)$$
$$Ay - Ay_0 = Bx - Bx_0 \text{, o sea:}$$
$$Bx - Ay + Ay_0 - Bx_0 = 0$$

Para encontrar las coordenadas del punto de intersección de las rectas L y L_0, resolveremos el sistema de ecuaciones lineales en x, y.

$$\begin{array}{r} Ax + By + C = 0 \\ \underline{Bx - Ay + (Ay_0 - Bx_0) = 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ABx + B^2 y + BC = 0 \\ \underline{-ABx + A^2 y + (ABx_0 - A^2 y_0) = 0} \end{array}$$

$$(A^2 + B^2)\,y = -ABx_0 + A^2 y_0 - BC$$

$$y = \frac{-ABx_0 + A^2 y_0 - BC}{A^2 + B^2}$$

$$\begin{array}{r} A^2 x + ABy + AC = 0 \\ B^2 x - ABy + ABy_0 - B^2 x_0 = 0 \\ \hline (A^2 + B^2) x + AC + AB y_0 - B^2 x_0 = 0 \\ (A^2 + B^2) x = B^2 x_0 - ABy_0 - AC \\ x = \frac{B^2 x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2} \end{array}$$

sí, el punto de intersección de L y L_0 es:

$$M(x, y) = M\left(\frac{B^2 x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2}, \frac{-ABx_0 + A^2 y_0 - BC}{A^2 + B^2}\right)$$

Encontramos ahora la distancia de $P(x_0, y_0)$ al punto:

$$M\left(\frac{B^2 x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2}, \frac{-ABx_0 + A^2 y_0 - BC}{A^2 + B^2}\right)$$

$$d = |\overline{PM}| = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{A^2 x_0 + B^2 x_0 - B^2 x_0 + ABy_0 + AC}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{A^2 y_0 + B^2 y_0 + ABx_0 - A^2 y_0 + BC}{A^2 + B^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{A^2 (Ax_0 + By_0 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2} + \frac{B^2 (Ax_0 + By_0 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}}$$

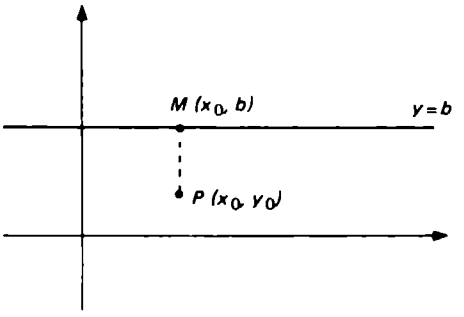
$$= \sqrt{\frac{(A^2 + B^2)(Ax_0 + By_0 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Resumiendo, tenemos que la distancia de la recta cuya ecuación es $Ax + By + C = 0$, al punto $P(x_0, y_0)$ está dada por:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Si la recta es paralela al eje x, es decir, si la ecuación es $y = b$, tenemos que la ecuación toma la forma $y - b = 0$, o equivalentemente:
$0\,x + (1)\,y - b = 0$, es decir, $A = 0$, $B = 1$ y $C = (-b)$.



Sustituyendo en la fórmula, concluimos:

$$d = \frac{|\,0\,x_0 + (1)\,y_0 + (-b)\,|}{\sqrt{0^2 + (1)^2}} = |\,y_0 - b\,|$$

o sea:

$$d = |\,y_0 - b|$$

Esta fórmula se pudo haber obtenido al determinar la distancia de P a M, es decir:

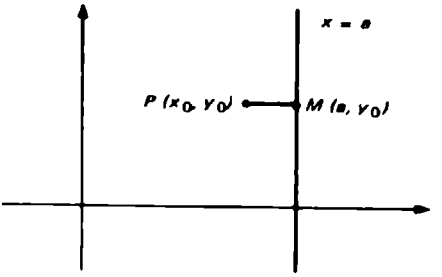
$$d = |\,\overline{PM}\,| = \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + (y_0 - b)^2}$$
$$= \sqrt{(y_0 - b)^2}$$
$$= |\,y_0 - b\,|$$

Si la recta es paralela al eje y, la ecuación será $x = a$.

$$x - a = 0$$
$$(1)\,x + 0\,y + (-a) = 0$$

y la distancia de esta recta al punto $P\,(x_0, y_0)$ es:

$$d = \frac{|\,(1)\,x_0 + 0\,y_0 + (-a)\,|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |\,x_0 - a\,|$$
$$d = |\,x_0 - a\,|$$



De lo anterior podemos resumir que:

La DISTANCIA del punto $P_o\ (x_o, y_o)$ a la recta de la ecuación $A\,x + B\,y + C = 0$ es

$$d = \frac{|\,A\,x_o + B\,y_o + C\,|}{A^2 + B^2}$$

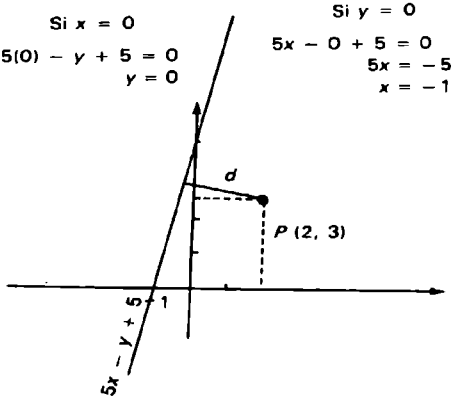
Ejemplo.

20. Encontrar la distancia del punto con coordenadas (2, 3) a la recta de ecuación $5\,x - y + 5 = 0$

x	y
0	5
−1	0

Si $x = 0$
$5(0) - y + 5 = 0$
$y = 0$

Si $y = 0$
$5x - 0 + 5 = 0$
$5x = -5$
$x = -1$



$$d = \frac{|\,A\,x_1 + B\,y_1 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|\,5\,(2) - 1\,(3) + 5\,|}{\sqrt{(5)^2 + (-1)^2}} = \frac{|\,10 - 3 + 5\,|}{\sqrt{26}} = \frac{12}{\sqrt{26}}$$

$$d = \frac{12}{\sqrt{26}} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}} = \frac{12\sqrt{26}}{26} = \frac{6}{13}\sqrt{26}$$

Ejercicios.

1. En cada uno de los ejercicios siguientes usar los datos que se proporcionan para hallar la ecuación de la recta.

   a) Pasa por el punto $(-1, 3)$ y tiene pendiente $-1/2$
   b) Pasa por el punto $(6, -1)$ y tiene un ángulo de inclinación de 30°
   c) Pasa por el punto $(2, 5)$ e intersecta al eje y en -5
   d) Pasa por los puntos $(3, -5)$ y $(-2, 3)$
   e) Intersecta en los ejes x y y respectivamente, en -3 y 5
   f) Pasa por el punto $(-2, -5)$ y tiene un ángulo de inclinación de 60°
   g) Pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(-5, -7)$
   h) Pasa por el punto $(8, -5)$ y tiene pendiente $5/7$
   i) Pasa por el punto $(-1/2, -1/3)$ e intersecta al eje x en -2.
   j) Intersecta a los ejes x y y, respectivamente en $-1/4$ y $-1/3$.

2. Hallar la pendiente y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación se da y graficarla.

   a) $2x + y - 9 = 0$
   b) $5y + 2x = 13$
   c) $24y + 7x - 150 = 0$
   d) $-8x + 15y = 85$
   e) $x + 9y = 0$
   f) $x + 2y - 21 = 0$
   g) $3y - 12 = 0$
   h) $y + 5 = 0$
   i) $x - 1/2 = 0$
   j) $3x + 5 = 0$

3. Los vértices de un cuadrilátero son $A\ (0, 0)$, $B\ (2, 4)$, $C\ (6, 7)$ y $D\ (8, 0)$. Hallar las ecuaciones de sus lados.

4. Una recta de pendiente $m = -2$ pasa por el punto $A\ (-1, 4)$. Hallar su ecuación y darle la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (que es llamada forma simétrica).

5. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-5, -2)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(3, 7)$ y $B(-1, 2)$.

6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es perpendicular a la recta que une los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 2)$.

7. Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta de ecuación $2x = 3y - 6$ y pasa por el punto $(2, 3)$.

8. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $(-1, -2)$ y $(3, 7)$.

9. Las ecuaciones de los lados de un cuadrilátero son:

$$3x - 8y + 36 = 0, x + y - 10 = 0, 3x - 8y - 10 = 0$$
$$x + y + 1 = 0.$$

Demostrar que la figura es un paralelogramo.

10. Hallar el área del triángulo rectángulo formado por los ejes coordenados y la recta con ecuación $5x + 4y + 20 = 0$.

11. Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a la recta $4x + y + 7 = 0$ y que pasa por el punto $(4, 7)$.

12. Demostrar que los puntos $P(-5, 2)$, $Q(1, 4)$ y $H(4, 5)$ son colineales.

13. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas:

$$x - 3y + 2 = 0 \qquad \text{y} \qquad 5x + 6y - 4 = 0$$

y que es paralela a la recta con ecuación $4x + y + 7 = 0$.

14. Hallar la ecuación de la recta de pendiente $-3/4$ y que forma con los ejes un triángulo de 24 unidades.

15. Hallar el valor de k para que satisfaga la condición indicada.

a) $2kx + y + 2 - k = 0$	pasa por el punto $(-1, 2)$.
b) $4kx + ky + 7 = 0$	tiene pendiente -3.
c) $kx - y - 3k = -6$	tiene ordenada al origen 5.
d) $x - kx = 3k + 6$	tiene abscisa al origen 2.

16. Determinar si las rectas se intersectan y si es así, encontrar las coordenadas del punto de intersección. Graficar las rectas.

a) $x + y = 10$
$x - y = 1$

b) $2x + y = 5$
$x + y = 2$

c) $3x - 10y - 4 = 0$
$4x + 6y - 15 = 0$

d) $6x - 3y - 2 = 0$
$2x - y = -1$

e) $x - 2y = 4$
$-2x + 4y = -8$

f) $5x - 2y = 10$
$3x + y - 7 = 0$

17. Encontrar el conjunto solución de la relación dada:

a) $R_1 = \{ (x, y) \mid x + 3y - 6 > 0 \text{ y } 2x - y + 5 > 0 \}$
b) $R_2 = \{ (x, y) \mid 2x + y - 3 \geqslant 0 \text{ y } x - y + 2 > 0 \}$
c) $R_3 = \{ (x, y) \mid x + 4y - 6 \leqslant 0 \text{ y } 2x - 6y + 7 \geqslant 0 \}$
d) $R_4 = \{ (x, y) \mid 2x - y \leqslant 5 \text{ ó } y - 3x + 6 \leqslant 3 \}$
e) $R_5 = \{ (x, y) \mid x - (1/2)y + 4 < 0 \text{ ó } y - x + 1/4 \geqslant 0 \}$
f) $R_6 = \{ (x, y) \mid 3x + y - 17 \geqslant 0 \text{ y } 5x - 2y - 10 > 0 \}$
g) $R_7 = \{ (x, y) \mid 2x - y \geqslant -1 \text{ y } 6x - 3y - 2 < 0 \}$
h) $R_8 = \{ (x, y) \mid 3x - 10y - 4 < 0 \text{ ó } 4x + 6y - 15 < 0 \}$

18. Encontrar la distancia del punto indicado a la recta cuya ecuación es dada.

a) $3x - 2y + 9 = 0$ y $P(3, 1)$
b) $5x - y + 3 = 0$ y $P(-1, 5)$
c) $2x + 9y - 4 = 0$ y $P(0, 8)$
d) $15x - 8y - 51 = 0$ y $P(-5, 0)$
e) $5x - 12y - 26 = 0$ y $P(0, 0)$

19. Encontrar la distancia entre las siguientes rectas paralelas:

a) $3x - 5y + 12 = 0$ y $3x - 5y + 9 = 0$

b) $8y - x/2 + 3 = 0$ y $8y - x/2 - 1/3 = 0$

20. La recta de ecuación $3x - 2y + 1 = 0$ está a la mitad entre dos rectas paralelas que distan 8 unidades. Hallar la ecuación de las dos rectas.

Sección 10.3

CIRCUNFERENCIA

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir circunferencia.
2. A partir de la definición de circunferencia, deducir la ecuación reducida y graficarla.
3. A partir de datos suficientes, encontrar la ecuación reducida de la circunferencia, su dominio y su imagen.
4. A partir de la ecuación reducida de la circunferencia, deducir su ecuación general.
5. Dada la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, decir cuándo es:

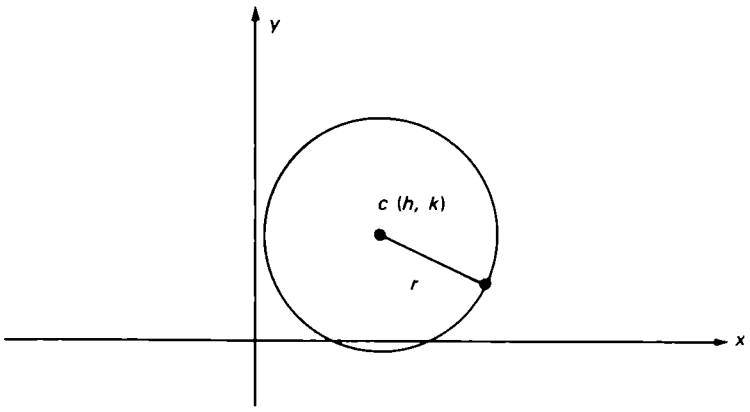
   a) una circunferencia
   b) un punto.
   c) el conjunto vacío.

6. Encontrar el conjunto solución de desigualdades que involucren rectas y/o circunferencias.

Ecuación reducida de la circunferencia

Definición. Una circunferencia es un conjunto de puntos en el plano $\mathbb{R}^2$ que equidistan de un punto fijo.

Al punto fijo se denotará por $C(h, k)$ y se llamará el CENTRO de la circunferencia. Como cualquier punto de la circunferencia equidistan (que están a la misma distancia) del centro, a la distancia de cualquier punto al centro se denotará por L y se llamará el RADIO de la circunferencia



Sea $P(x, y)$ un punto de una circunferencia de centro $C(h, k)$ y radio r. La distancia de P a C es igual a r, o sea, $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$, elevando al cuadrado ambos términos tenemos: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. Puesto que h, k, y r son cantidades constantes y x y y son variables, tenemos una ecuación que será llamada la ecuación reducida de la circunferencia.

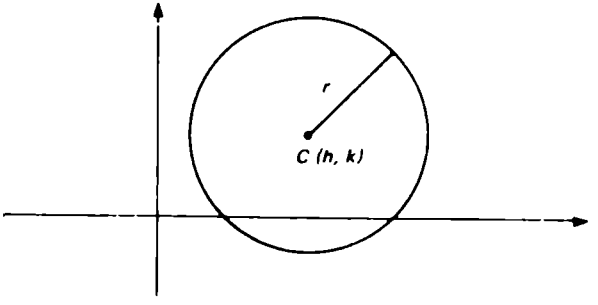
La ecuación reducida de la circunferencia de centro $C(h, k)$ y radio r está dada por la expresión:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Observación

Para dar la ecuación de una circunferencia se tienen que tener las coordenadas del centro $C(h, k)$ y el valor del radio R.

Si el centro está en el origen, la ecuación toma la forma $x^2 + y^2 = r^2$, pues $C(0, 0)$.



Ejemplos.

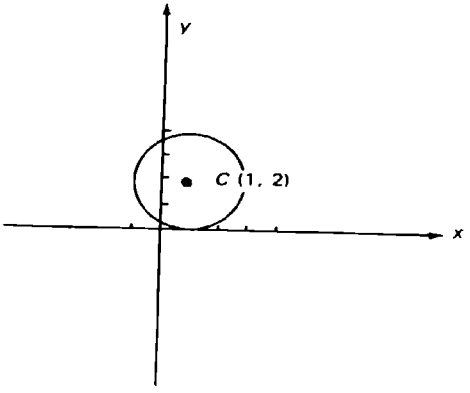
1. Dar centro y radio de la circunferencia de ecuación.

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Comparando con la ecuación reducida de una circunferencia

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

tenemos que $h = 1$, $k = 2$ y $R^2 = 4$ así $C\,(1, 2)$ y $R = 2$



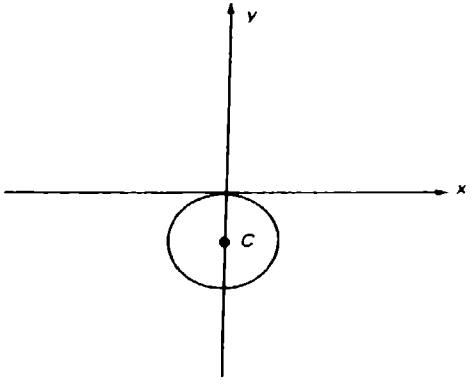
2. Dar centro y radio de la circunferencia de ecuación:

$$x^2 + (y + 1)^2 = 1$$

Comparando con la ecuación de la circunferencia se tiene

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$
$$(x - 0)^2 + (y-(-1))^2 + 1$$

por lo que $h = 0$, $k = -1$ y $R^2 = 1$ y centro es $C\,(0, -1)$ y $R = 1$



3. Obtener ecuación de la circunferencia con centro en $C(-1,-1)$ y Radio $R = 3$

   Como el centro es $C(-1,-1)$ entonces $h = -1$, $R = -1$ y se da la información del valor del radio $R = 3$, entonces sustituyendo en la ecuación

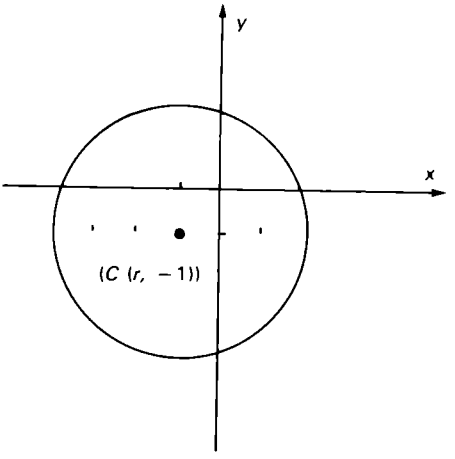
   $$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$

   tenemos

   $$(x - (-1))^2 + (y - (-1))^2 = (3)^2$$

   y la ecuación de la circunferencia es

   $$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$$



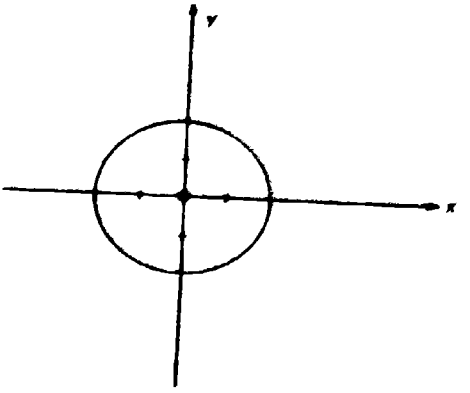
4. Graficar la circunferencia de ecuación

   $x^2 + y^2 = 4$ y dar centro y radio

   Comparando con la ecuación reducida se tiene

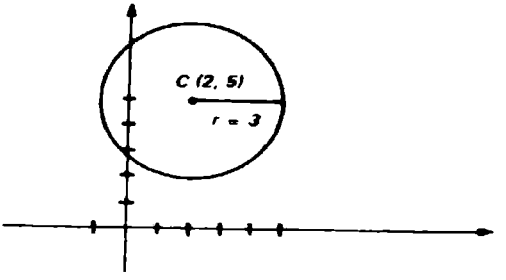
   $$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$
   $$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 4$$

   por lo que $h = 0$, $k = 0$, $R^2 = 4$ y así $C(0, 0)$ y $R = 2$

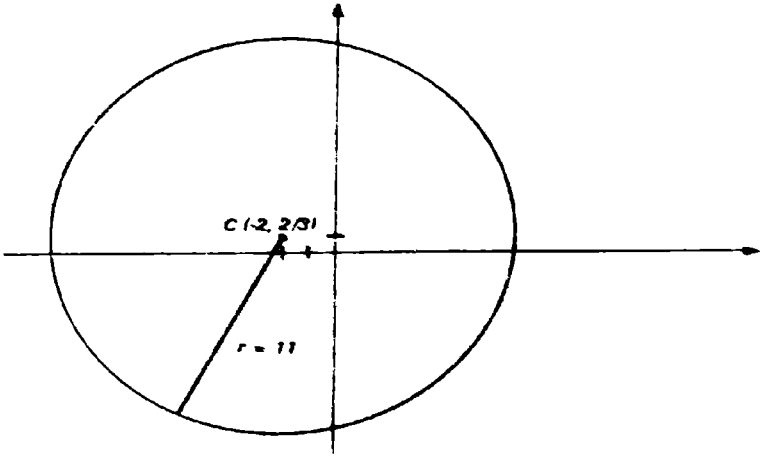


5. Si el punto $C\,(2,\,5)$ es el centro de una circunferencia de radio $r = 3$, tenemos que su ecuación está dada por:

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$$



6. La ecuación $(x + 2)^2 + (y - 2/3)^2 = 121$ representa una circunferencia de centro $C\,(-2,\,2/3)$ y radio $r = 11$.

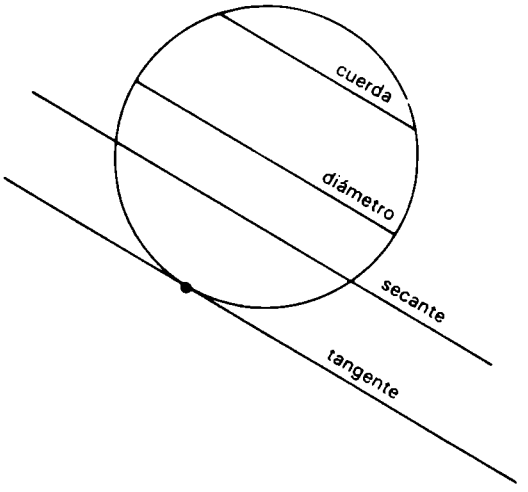


Definición. Una recta que pasa por dos puntos de una circunferencia será llamada *secante* de la circunferencia.

Definición. Si una recta intersecta a una circunferencia en un solo punto, diremos que dicha recta es *tangente* a la circunferencia.

Definición. Una CUERDA de una circunferencia es un segmento de línea que une dos puntos de la circunferencia.

Definición. Una DIÁMETRO de una circunferencia es una cuerda que pasa a través de su centro.



Ejemplos.

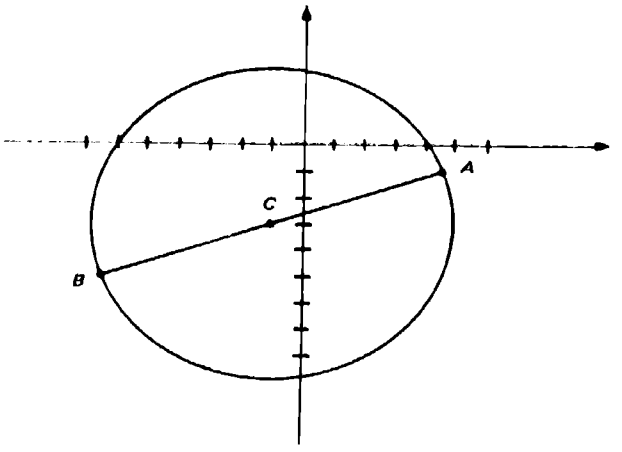
7. El segmento de recta que une a los puntos $A(5, -1)$ y $B(-7, -5)$ es un diámetro de una circunferencia. Encuentre la ecuación de ella y establezca las coordenadas de su centro, así como la longitud del radio.

El centro $C(h, k)$ de la circunferencia se encuentra en el punto medio del segmento AB, entonces, sus coordenadas son:

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + (-7)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$k = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{(-1) + (-5)}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$C(-1, -3)$.



La longitud del radio queda determinada por la distancia del centro a cualquiera de los dos puntos A o B, puesto que ellos pertenecen a la circunferencia.

$$r = \sqrt{(-1 - 5)^2 + (-3 + 1)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

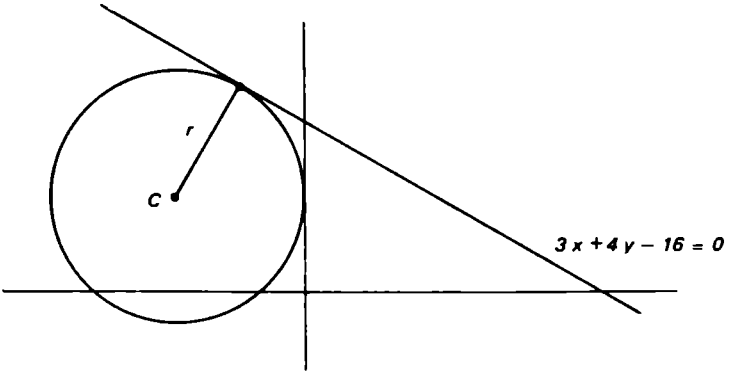
$$r = \sqrt{40}$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es:

$$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 40.$$

8. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C\ (-4,\ 2)$ y que sea tangente a la recta de ecuación $3\ x\ +\ 4\ y\ -\ 16\ =\ 0$.

La longitud del radio r se determina obteniendo la distancia del punto $C\ (-\ 4,\ 2)$ a la recta tangente L de ecuación $3\ x\ +\ 4\ y\ -\ 16\ =\ 0$.



$$r = \left| \frac{3\ (-\ 4) + 4\ (2) - 16}{5} \right| = \left| \frac{-\ 20}{5} \right| = |\ -\ 4\ | = 4$$

$$r = 4$$

y la ecuación queda como $(x\ +\ 4)^2\ +\ (y\ -\ 2)^2\ =\ 16$.

9. Una circunferencia es tangente a la recta de ecuación $2x\ -\ y\ +\ 1\ =\ 0$ en el punto $(2, 5)$ y el centro está sobre la recta de ecuación $x\ +\ y\ =\ 9$. Encuentre la ecuación de esta circunferencia.

La recta que pasa por $(2,\ 5)$ y es perpendicular a la tangente $2\ x\ -\ y\ +\ 1\ =\ 0$, es una recta que pasa por el centro de la circunferencia. Si encontramos la ecuación de esta recta y la simultaneizamos con la recta $x\ +\ y\ =\ 9$, obtendremos el centro.

La pendiente de la recta $2\ x\ -\ y\ +\ 1\ =\ 0$, es:

$$m_1 = \frac{-\ A}{B} = \frac{-\ 2}{-\ 1} = 2$$

entonces, la pendiente de la recta buscada es:

$$m_2 = -\ \frac{1}{m_1} = -\ \frac{1}{2}$$

y puesto que la recta pasa por el punto (2, 5) tenemos que su ecuación es $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2)$, es decir:

$$2y - 10 = -x + 2$$

de donde concluimos que la ecuación buscada es:

$$x + 2y - 12 = 0$$

y simultaneizándola con la ecuación

$$x + y - 9 = 0$$

obtenemos que (6, 3) es el centro de la circunferencia. Además, la distancia entre los puntos (6, 3) y (2, 5) nos determina el radio, es decir, $r = \sqrt{20}$. Por lo tanto, la ecuación buscada es:

$$(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 20.$$

Ecuación general de la circunferencia

Sabemos que $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es la ecuación reducida de la circunferencia. Elevando al cuadrado ambos binomios, obtenemos:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0.$$

Si hacemos $D = -2h$; $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$, la ecuación toma la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Definición. La ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ es llamada la *ecuación general de la circunferencia.*

Es claro que una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ puede tomar la forma reducida $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, pues basta completar cuadrados en x y y.

Ejemplos.

10. Encontrar la forma reducida de la circunferencia cuya ecuación está

dada por: $x^2 + y^2 - 4x - 12y + 36 = 0$.

$$x^2 + y^2 - 4x - 12y + 36 = 0$$
$$(x^2 - 4x + \quad) + (y^2 - 12y + \quad) = -36$$
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 12y + 36) = -36 + 4 + 36$$
$$(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 4$$

11. Encontrar la forma reducida de la circunferencia cuya ecuación es: $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$.

$$2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 5x + 3y - \frac{15}{2} = 0$$
$$(x^2 - 5x) + (y^2 + 3y) = \frac{15}{2}$$
$$(x^2 - 5x + \frac{25}{4}) + (y^2 + 3y + \frac{9}{4}) = \frac{15}{2} + \frac{25}{4} + \frac{9}{4}$$
$$(x - \frac{5}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = 16$$

En general, a partir de la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, completando cuadrados tenemos:

$$(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}) + (y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}) = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$
$$(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$
$$(x - (-\frac{D}{2}))^2 + (y - (-\frac{E}{2}))^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F.$$

El lado derecho de esta igualdad puede tener alguna de las siguientes tres características:

1. Si $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F > 0$, la ecuación representa una circunferencia con centro $C(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ y radio $r = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$.

2. Si $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F = 0$, la ecuación representa el punto $C(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2})$, y éste es el único punto que satisface la ecuación:

$$(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 = 0.$$

3. Si $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F < 0$, la ecuación no tiene solución en los números reales, es decir:

$$\{ (x, y) \mid (x - \frac{-D}{2})^2 + (y - \frac{-E}{2})^2 < 0 \} = \phi$$

Puesto que la suma de dos cantidades elevadas al cuadrado nunca es negativa.

Resumiendo, tenemos que

La ecuación de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$$

donde $A = B$. Dicha ecuación puede representar:

a) una circunferencia
b) un punto
c) el conjunto vacío

Ejemplos.

Determinar si la ecuación dada representa una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.

12. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 14 = 0$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = -14 + 4 + 9$$
$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = -1$$

Es decir, la ecuación representa el conjunto vacío:

$$\{ (x, y) \mid (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = -1 \} = \phi$$

13. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0.$

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$
$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16.$$

La ecuación representa una circunferencia $C(-2, 3)$ y $r = 4$.

14. $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 = 0.$

$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 10y + 25) = -26 + 1 + 25$

$(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 0$

La ecuación representa el punto $C(-1, -5)$.

15. $36x^2 + 36y^2 + 48x - 108y + 97 = 0.$

$$x^2 + y^2 + \frac{48}{36}y + \frac{97}{36} - \frac{108y}{36} = 0$$

$$(x^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}) + (y^2 - 3y + \frac{9}{4}) = -\frac{97}{36} + \frac{4}{9} + \frac{9}{4}$$

$$(x + \frac{2}{3})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 0$$

La ecuación representa el punto $C(-2/3, 3/2)$.

16. $2x^2 + 2y^2 - 12x + 2y + 1 = 0$

$$x^2 + y^2 - 6x + y + \frac{1}{2} = 0$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + y + \frac{1}{4}) = \frac{-1}{2} + 9 + \frac{1}{4}$$

$$(x - 3)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{35}{4}$$

La ecuación representa la circunferencia con centro $C(3, -1/2)$ y $r = \frac{\sqrt{35}}{2}$

17. $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0.$

$$x^2 + y^2 - \frac{64}{16}x + \frac{8}{16}y + \frac{177}{16} = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{16}) = -\frac{177}{16} + 4 + \frac{1}{16}$$

$$(x - 2)^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = -122$$

La ecuación representa el conjunto vacío:

$$\{ (x, y) \mid (x - 2)^2 + (y + \tfrac{1}{4})^2 = -112 \} = \phi$$

Tenemos dos formas de ecuaciones para la circunferencia, la reducida:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

y la general.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

En ambas ecuaciones aparecen 3 constantes independientes que son: h, k y r o D, E y F respectivamente. Si deseamos obtener la ecuación de una circunferencia, tenemos que determinar los valores de estas 3 constantes.

Ejemplos.

18. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(1, -2)$, $Q(5, 4)$ y $R(10, 5)$.

Supongamos que deseamos darle la forma general:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

como P, Q y R son puntos de la circunferencia, ellos deben satisfacer la ecuación.

$$\begin{aligned} 1 + 4 + D - 2E + F &= 0, \quad \text{ó} \quad D - 2E + F + 5 = 0 \\ 25 + 16 + 5D + 4E + F &= 0, \quad \text{ó} \quad 5D + 4E + F + 41 = 0 \\ 100 + 25 + 10D + 5E + F &= 0, \quad \text{ó} \quad 10D + 5E + F + 125 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, encontramos los valores $D = -18$, $E = 6$ y $F = 25$. Por tanto, $x^2 + y^2 - 18x + 6y + 25 = 0$ es la ecuación de la circunferencia que pasa por P, Q y R.

19. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(6, 2)$, $(8, 0)$ y cuyo centro está sobre la recta $3x + 7y + 2 = 0$.

Supongamos que deseamos darle la forma reducida:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Puesto que el centro $C(h, k)$ está sobre la recta:

$$3x + 7y + 2 = 0$$

las coordenadas del centro deben satisfacer esta ecuación. Es decir: $3h + 7k + 2 = 0$. Por otro lado, puesto que (6, 2) y (8, 0) son puntos de la circunferencia, ellos deben satisfacer la ecuación.

$$(6 - h)^2 + (2 - k)^2 = r^2$$

y

$$(8 - h)^2 + k^2 = r^2$$

Por lo tanto, la solución del sistema:

$$\begin{aligned} 3h + 7k + 2 &= 0 \\ (6 - h)^2 + (2 - k)^2 &= r^2 \\ (8 - h)^2 + k^2 &= r^2 \end{aligned}$$

nos determina las tres constantes y sus valores son: $h = 4$, $k = -2$ y $r = 2\sqrt{5}$.

Así, $C(4, -2)$ y $r = 2\sqrt{5}$ son el centro y el radio de la circunferencia. Su ecuación es:

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 20.$$

20. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ y es tangente a la recta $3x + y - 3 = 0$.

Sea $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$; A y B satisfacen esta ecuación:

$$(1 - h)^2 + (2 - k)^2 = r^2 \qquad (1)$$
$$(3 - h)^2 + (4 - k)^2 = r^2 \qquad (2)$$

Además, el radio queda determinado por la distancia de $C(h, k)$ a la tangente, cuya ecuación es: $3x + y - 3 = 0$, entonces:

$$r = \frac{|3h + k - 3|}{\sqrt{10}} \qquad (3)$$

$$r^2 = \frac{(3h + k - 3)^2}{10}$$

Puesto que hemos establecido las 3 ecuaciones independientes, podemos resolver el sistema para encontrar los valores de h, k y r. Igualando 1 y 2 tenemos:

$$r^2 = r^2$$

$$(1 - h)^2 + (2 - k)^2 = (3 - h)^2 + (4 - k)^2 \qquad \text{ó}$$
$$1 - 2h + h^2 + 4 - 4k + k^2 = 9 - 6h + h^2 + 16 - 8k + k^2$$
$$1 - 2h + 4 - 4k - 9 + 6h - 16 + 8k = 4h + 4k - 20 = 0$$

de donde:

$$h + k = 5 \tag{4}$$

Igualando las ecuaciones 1 y 3 tenemos:

$$(1 - h)^2 + (2 - k)^2 = \frac{(3h + k - 3)^2}{10}$$

desarrollando y simplificando obtenemos:

$$h^2 + 9k^2 - 6kh - 2h - 34k + 41 = 0. \tag{5}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones 4 y 5 encontramos los siguientes valores:

$$(h = 4, k = 1) \qquad (h = 3/2, k = 7/2)$$

sustituyendo en 3 encontramos el valor de r para cada caso:

$$(r = \frac{|12 + 1 - 3|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}\ );$$

$$(r = \frac{\left|\frac{9}{2} + \frac{7}{2} - 3\right|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Es decir, hay dos circunferencias que satisfacen las ecuaciones dadas y sus ecuaciones son:

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10 \quad \text{y} \quad (x - \tfrac{3}{2})^2 + (y - \tfrac{7}{2})^2 = \frac{5}{2}$$

Además de conocer el centro y el radio de una circunferencia, es conveniente poder determinar el dominio y su imagen. También es útil localizar las intersecciones con los ejes.

La circunferencia es una relación que no es función, puesto que al despejar y de la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, se obtiene $y = (\pm\sqrt{r^2 - (x - h)^2}) + k$. Para cada valor de x encontramos 2 de y (excepto cuando $x = h \pm r$). Puesto que y debe ser un número real, debemos restringir

los valores de x de tal manera que $r^2 - (x-h)^2 \geqslant 0$. Al resolver la desigualdad tenemos:

$$-r+h \leqslant x \leqslant r+h$$

y el dominio de la circunferencia es:

$$\{\, x \mid -r+h \leqslant x \leqslant r+h \,\}.$$

El dominio de la circunferencia con ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

es:

$$\{\, x \mid -r+h \leqslant x \leqslant r+h \,\}$$

En particular si el centro está en el origen, esto es si su ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$ el dominio es:

$$\{x \mid -r \leqslant x \leqslant r\,\}$$

El dominio de la circunferencia con centro en el origen es:

$$\{\, x \mid -r \leqslant x \leqslant r. \,\}$$

Para determinar la imagen despejamos x de la ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

La imagen de la circunferencia con ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

es:

$$\{\, y \mid -r+k \leqslant y \leqslant r+k \,\}$$

En la forma análoga tenemos:

La imagen de la circunferencia con centro en el origen

$$x^2 + y^2 = r^2$$

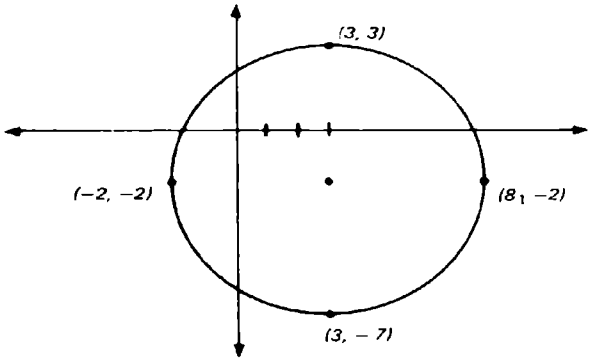
es:

$$\{\, y \mid -r \leqslant y \leqslant r. \,\}$$

Ejemplos.

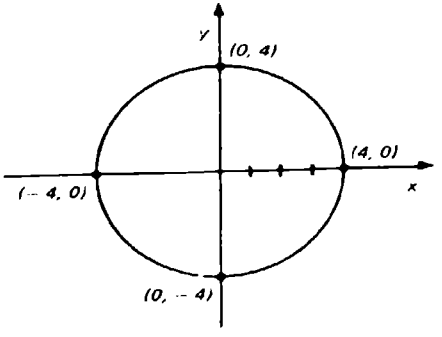
21. Encontrar el dominio y la imagen de la circunferencia cuya ecuación es $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

Tenemos: $h = 3$, $k = -2$ y $r = 5$. Entonces:
Dominio $= \{ x \mid -5 + 3 \leqslant x \leqslant 5 + 3 \} = \{ x \mid -2 \leqslant x \leqslant 8 \}$
Imagen $= \{ y \mid -5 - 2 \leqslant y \leqslant 5 - 2 \}$
$= \{ y \mid -7 \leqslant y \leqslant 3 \}$.



22. Encontrar el dominio y la imagen si la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 16$.

$h = 0$, $k = 0$, $r = 4$.
Dominio $= \{ x \mid -4 \leqslant x \leqslant 4 \}$
Imagen $= \{ y \mid -4 \leqslant y \leqslant 4 \}$



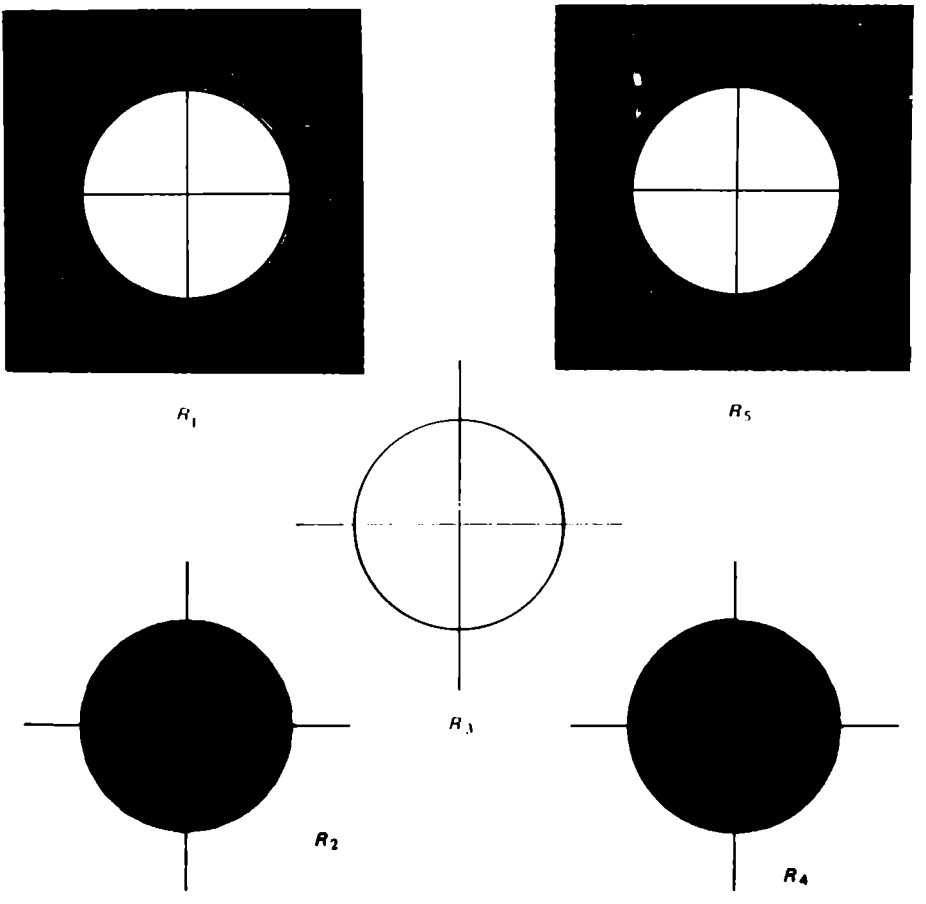
Desigualdades que involucren rectas y/o circunferencias

La gráfica de una circunferencia con centro en (h, k) y radio $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, divide el plano en 3 conjuntos: los puntos que están afuera de la circunferencia, $\{ (x, y) \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 > r^2 \} = R_1$; los puntos que están dentro de la circunferencia $\{ (x, y) \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 < r^2 \} = R_2$ y los puntos que están sobre la circunferencia: $\{ (x, y) \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \} = R_3$

También podemos tener los siguientes conjuntos en el plano:

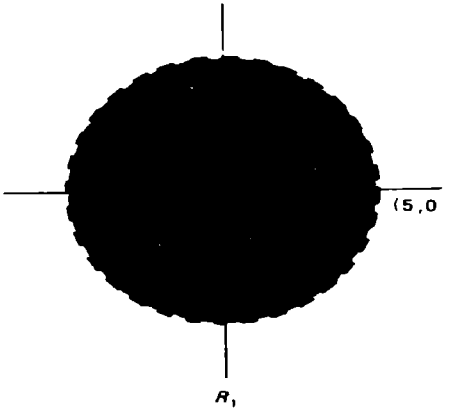
$$R_4 = \{ (x, y) \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 \leqslant r^2 \}$$
$$R_5 = \{ (x, y) \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 \geqslant r^2 \}$$

en donde R_4 es la región formada por todos los puntos interiores de la circunferencia, unidos con los puntos de ésta y R_5 la forman los puntos externos unidos con los puntos de la circunferencia.

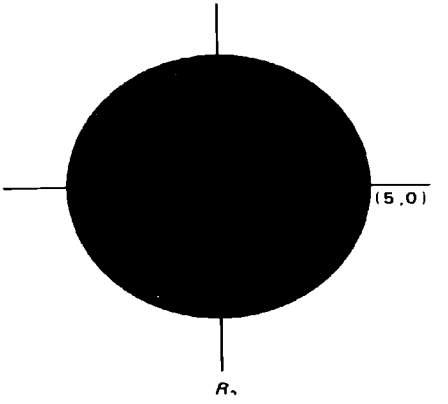


Como ejemplo, construiremos las gráficas de las siguientes relaciones:

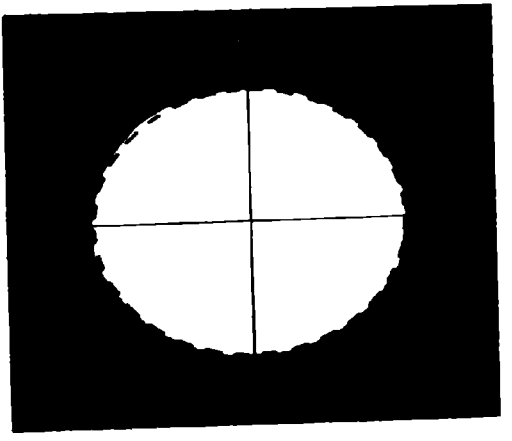
$R_1 = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 < 25 \}$; $R_2 = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 25 \}$;
$R_3 = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 > 25 \}$, $R_4 = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \geq 9 \}$;
$R_5 = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \geq 9 \text{ y } x^2 + y^2 \leq 25 \}$



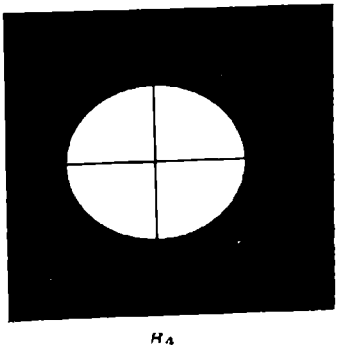
R_1



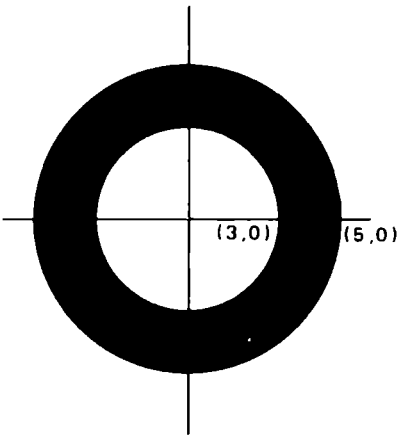
R_2



R_3



R_4



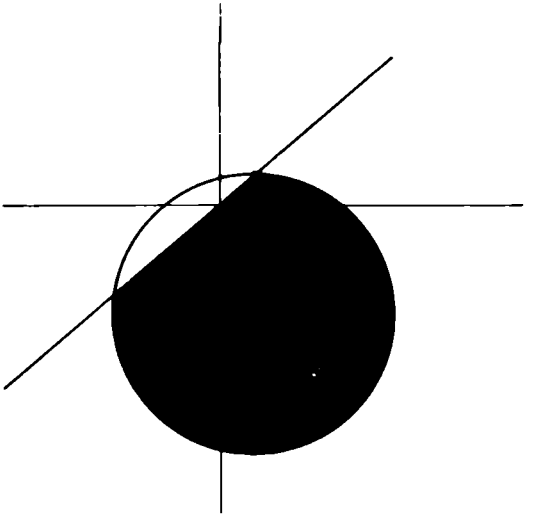
R_5

Hemos estudiado, hasta ahora, la recta y la circunferencia, así que podemos resolver desigualdades que las involucren. Por ejemplo, graficar las siguientes relaciones:

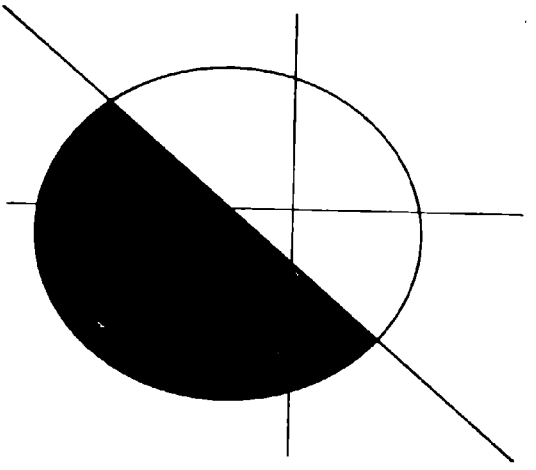
$$R_1 = \{ (x,y) \mid (x-1)^2 + (y+3)^2 \leqslant 16 \text{ y } x - y \geqslant 0 \}$$

$$R_2 = \{ (x,y) \mid (x+2)^2 + (y-1)^2 \leqslant 25 \text{ y } x + y + 2 \leqslant 0 \}$$

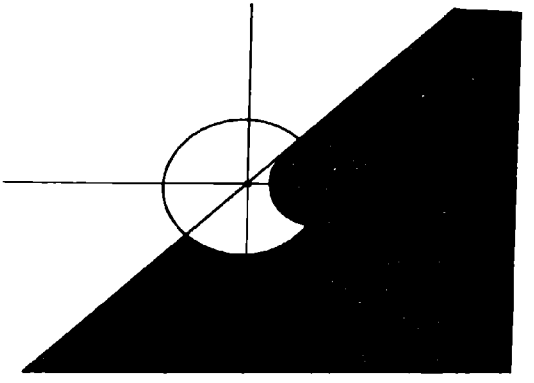
$$R_3 = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \geqslant 4 \} \cup \{ (x,y) \mid (x-2)^2 + y^2 \leqslant 1 \} \cap \{ (x,y) \mid x \geqslant y \}.$$



R_1



R_2



R_3

Ejercicios.

1. En los ejercicios siguientes construir la gráfica de la ecuación dada y dar su dominio e imagen.

   a) $x^2 + y^2 = 16$
   b) $x^2 + y^2 = 25$

c) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$
d) $(x - 2)^2 + y^2 = 3$
e) $x^2 + (y + 1)^2 = 8$
f) $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 64$
g) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 10$.

2. Encontrar la ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas.

a) Centro (2, 3) y radio $\sqrt{3}$
b) Centro (−1, −2) y radio 4
c) Centro (−3, 2) y radio 2
d) Centro (0, 0) y radio 8
e) Centro (3, −2) y radio 5/2
f) Centro (5, 7) y pasa por el punto (10, 9)
g) Centro (−7, −13) y pasa por el origen.
h) Tiene como extremos de uno de sus diámetros a los puntos (−4, 5) y (0, −8).
i) Tiene como extremos de uno de sus diámetros a los puntos (5, −1) y (−3, 7)
j) Con centro en (−2, −4) y es tangente al eje y.
k) Con centro en (4, 1) y es tangente a la recta de ecuación $7x + 6y - 42 = 0$.
l) Con centro en (4, −1) y es tangente a la recta de ecuación $3x - 4y - 1 = 0$.
m) Centro en la intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $3y - 2x + 9 = 0$ y $2y - 3x - 6 = 0$ y tiene radio $\sqrt{10/3}$.
n) Centro en la recta $x + 3y - 10 = 0$ y pasa por los puntos (3, 2) y (1, 1).
ñ) Los extremos de uno de sus diámetros son el punto (1, 1) y el punto de intersección de las rectas $x = -y$ y $y = 6$.
o) El centro está sobre el eje x y pasa por los puntos (2, 7) y (5, 9).
p) Es tangente a los ejes coordenados, su radio es 8 y el centro está en el tercer cuadrante.
q) Pasa por los puntos (−2, 2), (2, 5) y su centro está sobre la recta $5x - 2y + 3 = 0$.
r) Es tangente al eje y y a la recta de ecuación $y = 3x$, y su radio es 3.
s) De radio 4 y que sea tangente a la recta $4x + 5y - 17 = 0$, en el punto (3, 1).
t) Pasa por el origen, tiene radio 12 y la abscisa de su centro es −13.
u) Inscrita al triángulo ABC, donde A (−1, 0), B (2, 9/4), C (5, 0).
v) Circunscrita al triángulo ABC del problema anterior.
w) Pasa por los puntos medios del triángulo ABC del problema *u*.
x) Pasa por los puntos (5, −1), (7, 0), (0, 3).

3. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son:

$$3x + 2y + 6 = 0;\ 2x + 3y - 12 = 0 \text{ y } x - y - 1 = 0.$$

Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita.

4. La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = 25$, el punto medio de una de sus cuerdas es el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la cuerda.

5. Determinar si los puntos (2, 0), (0, 4), (2, 2) y (1, 1) se encuentran o no en una circunferencia.

6. Hallar el valor de K para que la circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y + K = 0.$$

Representar una circunferencia de radio 7.

7. Hallar la longitud del punto de tangencia a la circunferencia de centro (h, k) y radio r, hasta el punto $P(x, y)$ sobre la recta tangente.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia que sea tangente a las rectas cuyas ecuaciones son $x + y + 4 = 0$ y $7x - y + 4 = 0$ y cuyo centro se encuentra sobre la recta de ecuación $4x + 3y - 2 = 0$.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que sea tangente a las rectas de ecuación:

$$x - 2y + 4 = 0,\ 2x - y - 8 = 0$$

y que pase por el punto $(4, -1)$.

10. En cada uno de los ejercicios siguientes, determinar si la ecuación es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío. Y si es una circunferencia, graficarla y dar su centro y su radio.

a) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 20y + 50 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 30 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$
d) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 24y + 29 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 10x + 18y + 111 = 0$
f) $9x^2 + 9y^2 - 6x - 12y + 5 = 0$
g) $x^2 + y^2 + 10x - 18y + 103 = 0$
h) $16x^2 + 16y^2 - 80x + 8y + 133 = 0$

i) $x^2 + y^2 + 18x + 24y + 225 = 0$
j) $4x^2 + 4y^2 - 12x + 4y - 10 = 0$
k) $9x^2 + 9y^2 + 12x - 6y + 68 = 0$
l) $16x^2 + 16y^2 + 24x - 16y + 13 = 0$
m) $9x^2 + 9y^2 - 6x + 12y - 58 = 0$
n) $x^2 + y^2 + 22x - 16y + 288 = 0$
ñ) $x^2 + y^2 + 4x = 0$
o) $x^2 + y^2 + 24x - 14y + 91 = 0$
p) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 12 = 0$
q) $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y + 13 = 0$
r) $x^2 + y^2 - 20x - 26y + 169 = 0$
s) $20x^2 + 20y^2 - 20x + 17 = 0$
t) $9x^2 + 9y^2 - 6x + 36y + 37 = 0$
u) $1225x^2 + 1225y^2 + 980x - 1050y + 6546 = 0$
v) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$
w) $25x^2 + 25y^2 - 20x + 4 = 0$

11. En cada uno de los ejercicios siguientes, graficar las ralaciones dadas:

a) $R = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9/4 \}$
b) $R = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 0 \}$
c) $R = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 9 \text{ y } y > 0 \}$
d) $R = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ y } x^2 + y^2 \geq 16 \}$
e) $R = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4 \text{ ó } x \leq 2 \}$
f) $R = \{ (x, y) \mid (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16 \text{ ó } x^2 + y^2 = 144 \}$
g) $R = \{ (x, y) \mid x^2 + (y - 1/2)^2 \leq 9 \text{ ó } x^2 + y^2 > 4 \}$.

Sección 10.4

PARÁBOLA

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir parábola.
2. A partir de la definición de parábola, deducir y graficar parábolas que tienen por ecuación:

   a) $y^2 = 4px \quad (p > 0, p < 0)$
   b) $x^2 = 4py \quad (p > 0, p < 0)$

3. A partir de datos suficientes, encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen.
4. Dada la ecuación de una parábola con vértice en el origen encontrar sus datos y graficarla.

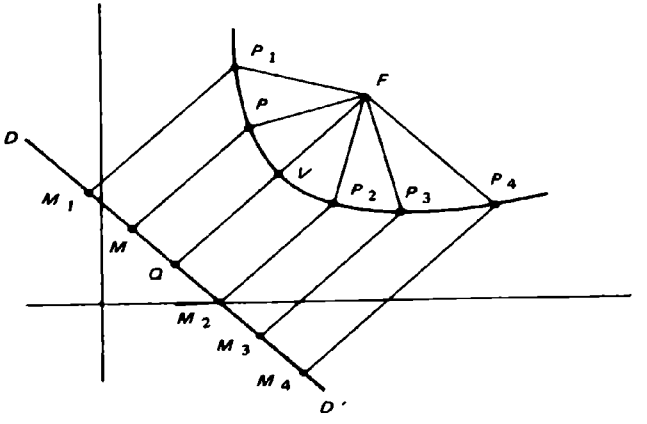
5. Utilizando traslación de ejes, deducir las siguientes ecuaciones:

   a) $(y-k)^2 = 4p\,(x-h) \quad (p>0,\ p<0)$
   b) $(x-h)^2 = 4p\,(y-k) \quad (p>0,\ p<0)$

6. A partir de la ecuación reducida de la parábola, deducir su ecuación general y viceversa.
7. A partir de datos suficientes, encontrar la ecuación de la parábola con vértice en (h, k) y graficarla.
8. Dada la ecuación general de la parábola, encontrar sus datos y graficarla.
9. Encontrar el conjunto solución de desigualdades que involucren rectas y/o circunferencias y/o parábolas.

Definición. Una parábola es un conjunto de puntos en el plano R^2 que equidistan de una recta fija DD' y de un punto fijo F, no situado sobre la recta.

$$\text{Parábola} = \{\, P \in R^2 \mid d(PF) = d\,(P, \overleftrightarrow{DD'}) \,\}$$

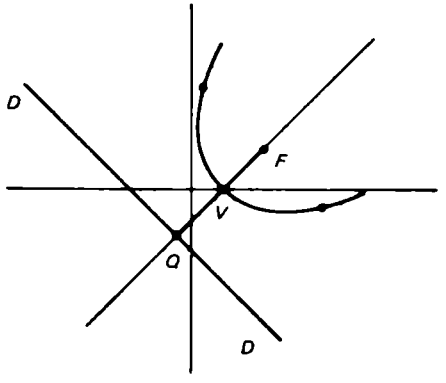


De acuerdo a la definición de parábola, y refiriéndonos a la gráfica anterior, tenemos que:

$P \in$ parábola si y sólo si $|\overline{PF}| = |\overline{PM}|$
$P_1 \in$ parábola si y sólo si $|\overline{P_1F}| = |\overline{P_1M_1}|$
$P_2 \in$ parábola si y sólo si $|\overline{P_2F}| = |\overline{P_2M_2}|$
$P_3 \in$ parábola si y sólo si $|\overline{P_3F}| = |\overline{P_3M_3}|$
$P_4 \in$ parábola si y sólo si $|\overline{P_4F}| = |\overline{P_4M_4}|$
$V \in$ parábola si y sólo si $|\overline{VF}| = |\overline{VQ}|$

La recta fija es llamada *directriz* de la parábola; al punto fijo lo denotaremos por F y lo llamamos *foco*. A la recta perpendicular a la directriz DD' y que pasa por el foco F, denotada por FQ la llamaremos *eje* de la parábola; al punto medio del segmento QF lo llamaremos *vértice*. Es claro que V es un punto de la parábola, puesto que este punto equidista de la directriz DD y del foco F.

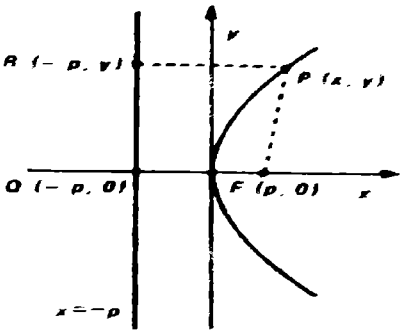
$\overleftrightarrow{DD'}$ = Directriz
F = Foco
$\overleftrightarrow{FQ}$ = Eje
V = Vértice



Para deducir la ecuación de la parábola consideremos que el vértice de la parábola es $V(0, 0)$ y que el eje de la parábola es el eje x ($y = 0$). Además, llamaremos p a la distancia dirigida desde el vértice hasta la directriz o al foco, esto es:

$$|p| = |QV| = |VF|$$

Entonces, las coordenadas de Q y F son $Q(-p, 0)$ y $F(p, 0)$. Además, la ecuación de la directriz será: $x = -p$.



Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, tenemos que la distancia de P a la directriz debe ser la misma distancia que hay de P al foco. La perpendicular trazada por $P(x, y)$ a la directriz RQ corta a ésta en el punto $R(-p, y)$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} |\overline{PR}| &= \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2} \\ &= \sqrt{(x+p)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{(x+p)^2} \\ &= |x+p| \end{aligned}$$

y la distancia de $P(x, y)$ al foco $F(p, 0)$ está dada por:

$$\begin{aligned} |\overline{PF}| &= \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} \\ &= \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Además, puesto que $P(x, y)$ es un punto de la parábola, se tiene que:

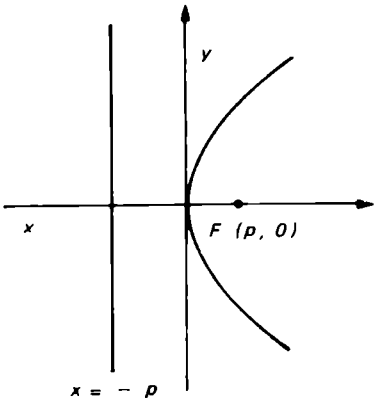
$$|\overline{PR}| = |\overline{PF}|$$

entonces:

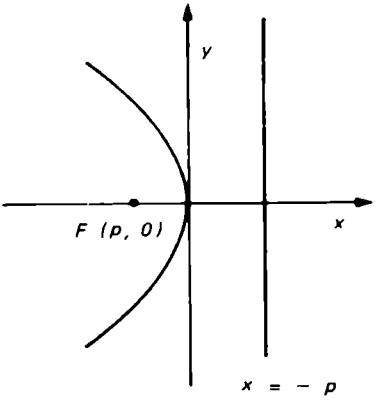
$$\begin{aligned} |x+p| &= \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \\ (x+p)^2 &= (x-p)^2 + y^2 \\ x^2 + 2xp + p^2 &= x^2 - 2xp + p^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$y^2 = 4px$$

p significará la distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz. Si p es positiva, el foco está en la parte positiva del eje x y la concavidad de la gráfica está hacia la derecha. Si p es negativa, el foco está en la parte negativa del eje x y la concavidad de la gráfica está hacia la izquierda.



$y^2 = 4px\ ; p > 0$

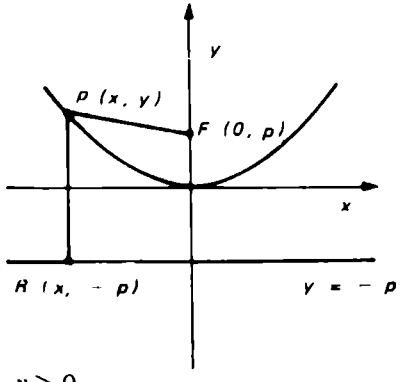


$y^2 = 4px\ ;\ p < 0$

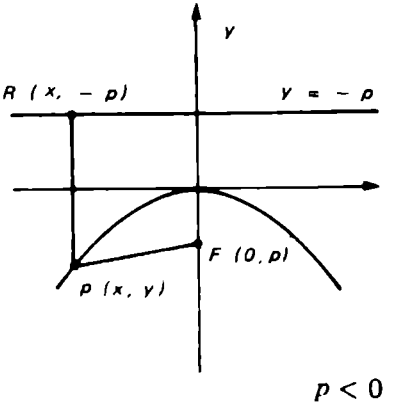
Teorema 1.

La ecuación de la parábola con $F\ (p,\ 0)$, $V\ (0,\ 0)$ eje en el eje de las x, es $y^2 = 4\ p\ x$ y la ecuación de su directriz es $x = -p$. La gráfica se abre hacia la derecha si $p > 0$ y se abre hacia la izquierda si $p < 0$. Nos referiremos a estas parábolas como parábolas horizontales.

Consideremos ahora una parábola con vértice en el origen, tal que el eje focal coincida con el eje y, y sea $p\ (x,y)$ un punto de ella.



$p > 0$



$p < 0$

$$|\overline{PR}| = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (-p))^2} = |y + p|$$
$$|\overline{PF}| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

y como $P(x, y)$ es un punto de la parábola se tiene que:

$$|\overline{PR}| = |\overline{PF}|$$

entonces:

$$|y + p| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$
$$(y + p)^2 = x^2 + y^2 - 2yp + p^2$$

$$x^2 = 4py.$$

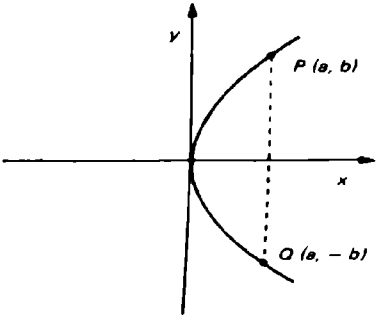
Teorema 2.

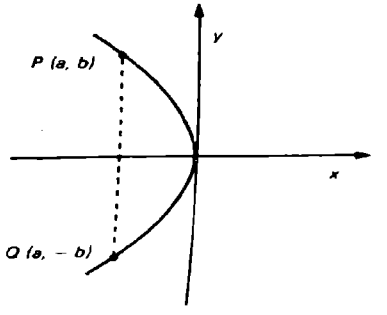
La ecuación de la parábola con $F(0,p)$, $V(0, 0)$ y eje en el eje de las y es: $x^2 = 4py$ y la ecuación de su directiz es $y = -p$. La gráfica se abre hacia arriba si $p > 0$ y se abre hacia abajo si $p < 0$. Nos referimos a estas parábolas como parábolas verticales.

En la ecuación $y^2 = 4px$, podemos sustituir $-y$ por y sin que la ecuación se altere,

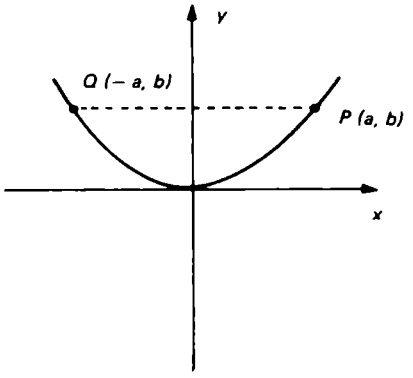
$$(-y)^2 = 4px$$
$$y^2 = 4px.$$

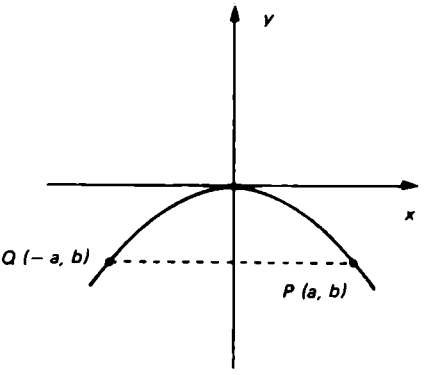
Esta característica de la curva es llamada simetría con respecto al eje x, y geométricamente significa que el eje x es la mediatriz del segmento que une los puntos $P(a, b)$ y $Q(a, -b)$. Basta con conocer la rama de la gráfica que está en la parte positiva del eje de las y para poder determinar la otra rama.





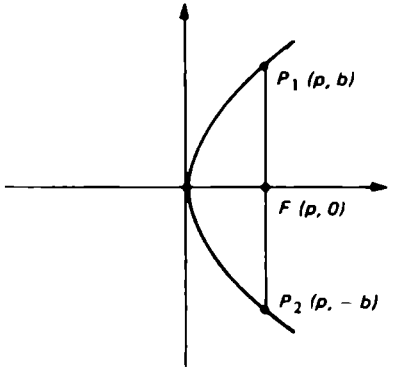
De igual manera $x^2 = 4py$ es simétrica con respecto al eje y.





Al segmento de recta que pasa por el foco de una parábola y cuyos extremos son puntos de la parábola lo llamaremos *cuerda focal*. A la cuerda focal que es perpendicular al eje de la parábola la llamaremos lado recto de la parábola.

Si llamamos P_1 y P_2 a los extremos del lado recto, tenemos que sus coordenadas son $P_1\ (p,\ b)$ y $P_2\ (p,\ -b)$ con lo que podemos determinar el valor de b sustituyendo las coordenadas de P_2 en la ecuación $y^2 = 4\ Px$



$$(-b)^2 = 4p\,(p)$$
$$b^2 = 4p^2$$
$$b = \pm 2p$$

entonces, los extremos del lado recto son $P_1\ (p,\ 2p)$, $P_2\ (p,\ \ 2p)$, y $|P_1\ P_2| = |4p|$ es su longitud.

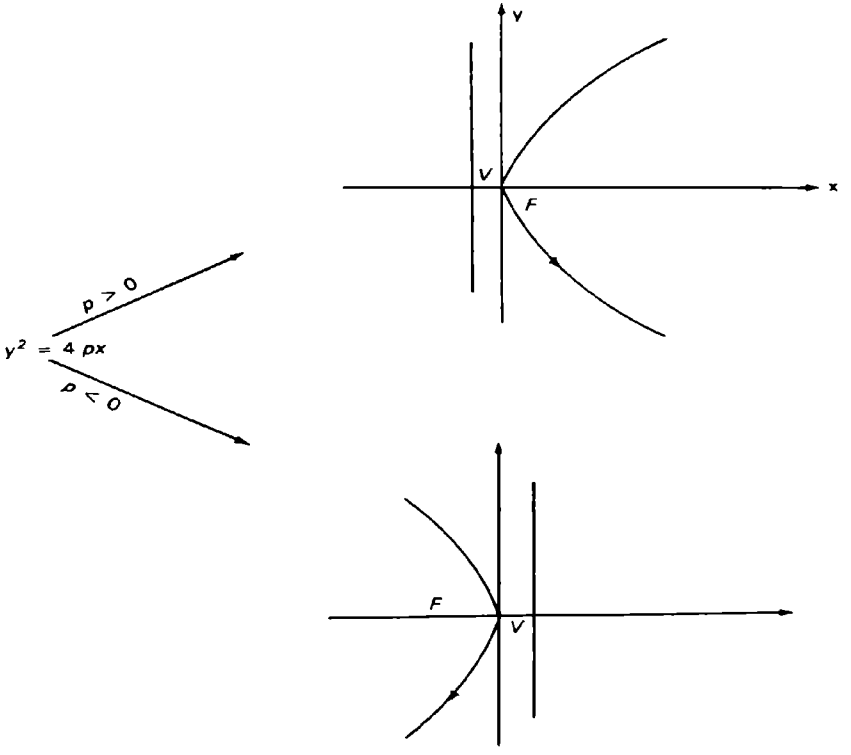
Observación. Podemos tener datos suficientes para determinar que una

parábola es horizontal o vertical; sin embargo, la rama de la parábola puede estar muy abierta o cerrada. Esta apertura se puede conocer si tenemos la longitud y los extremos del lado recto.

Ejemplo.

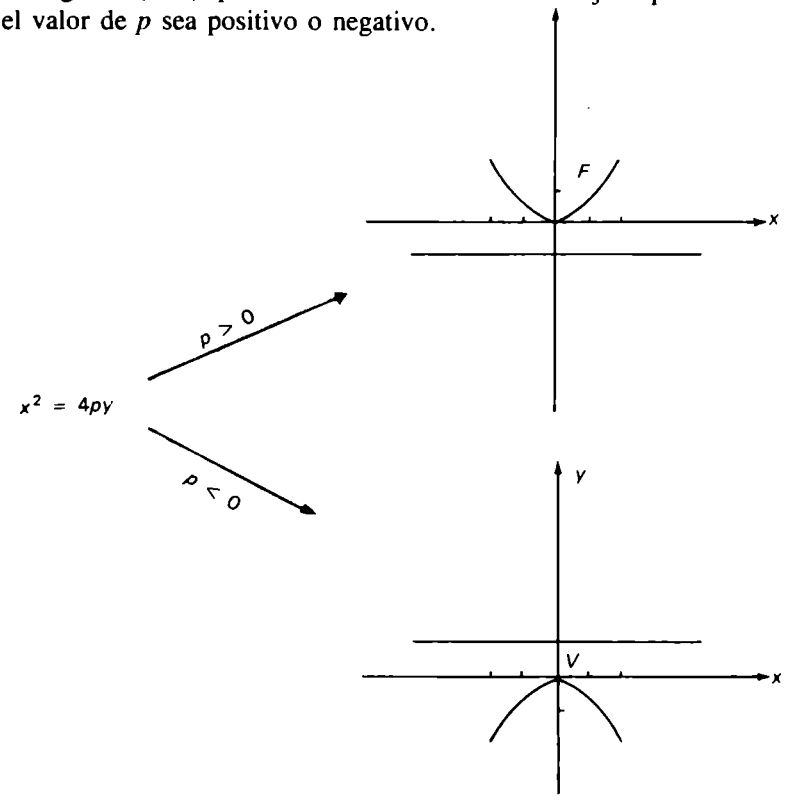
Tomando como base lo expuesto en los teoremas 1 y 2 de esta sección podemos afirmar que:

La ecuación $y^2 = 4\,P\,x$ representa una PARÁBOLA HORIZONTAL con vértice en el origen $V(0, 0)$ que se abre hacia la derecha o hacia la izquierda dependiendo de que el valor de p sea positivo o negativo.



y que

La ecuación $x^2 = 4\,P\,x$ representa una PARÁBOLA VERTICAL con vértice en el origen $V\,(0,\,0)$ que abre hacia arriba o hacia abajo dependiendo de que el valor de p sea positivo o negativo.



Observación. El valor de p representa la distancia del vértice al foco o del vértice a la directriz.

Ejemplos.

Daremos las coordenadas del vértice, del foco, los extremos del lado recto, la longitud del lado recto y ecuación de la directriz de las parábolas cuyas ecuaciones se dan.

1. $y^2 = 4x$ 2. $x^2 = -8y$ 3. $y^2 = -12x$

1. $y^2 = 4x$

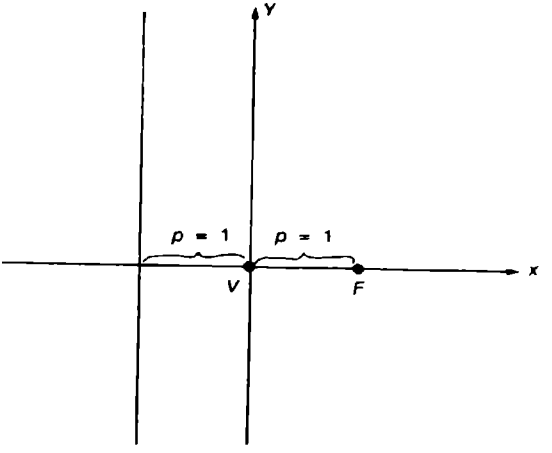
La parábola es horizontal ya que es de la forma $y^2 = 4px$ con vértice en $V\,(0,0)$ y comparando con $y^2 = 4x$

$$y^2 = 4px$$
$$y^2 = 4x$$

se tiene que $4p = 4$

$$p = 1$$

y la parábola se va a abrir hacia la derecha ya que el valor de p es positivo. Como p es la distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz

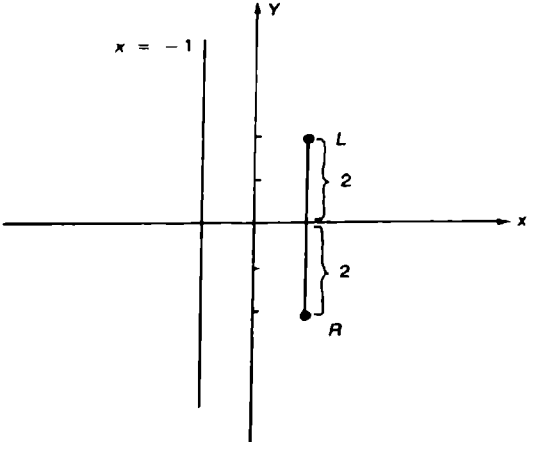


y así las coordenadas del foco son $F(1,0)$ y la ecuación de la directriz es $x = -1$.

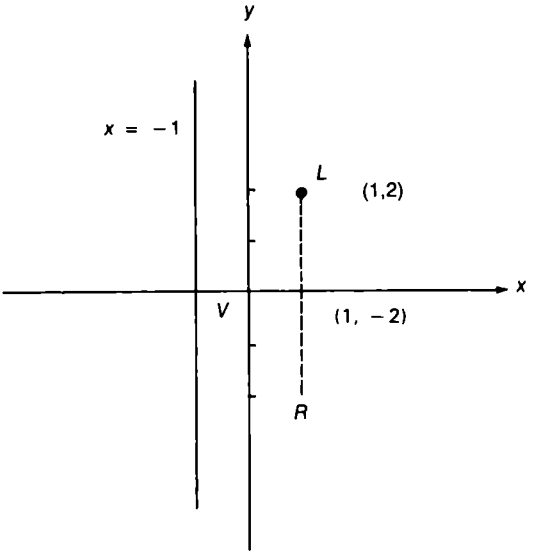
La longitud del lado recto nos ayudará a dar la abertura adecuada de la parábola

$$|LR| = |4p| = |4(1)| = 4$$

quiere decir que la cuerda focal que pasa por el foco perpendicular al eje focal debe medir cuatro, dos unidades hacia arriba y dos hacia abajo.



y las coordenadas de los extremos del lado recto son $L(1,2)$ y $R\ (1,\ -2)$ por lo que la gráfica es



Resumiendo los datos de esta parábola se tiene

$V(0,0)$, $F(1,0)$, $L(1,2)$, $R(1,\ -2)$, $LR = 4$, Ec. directriz $x = -1$

2. $x^2 = -y$

La parábola es vertical ya que es de la forma $x^2 = 4py$ con vértice en $V\ (0,0)$

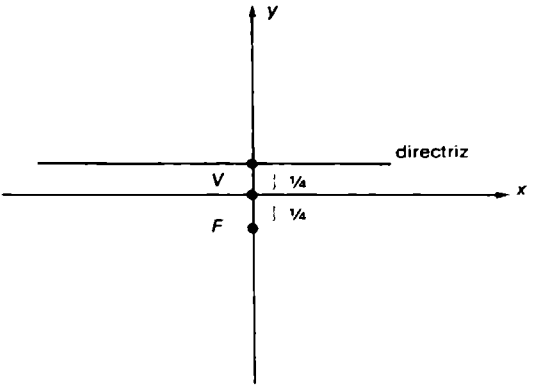
$$x^2 = 4py$$
$$x^2 = -y$$

comparando las dos ecuaciones se tiene que

$$4p = -1$$
$$p = -1/4$$

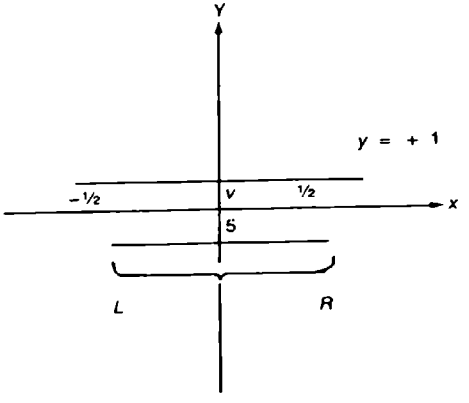
Como p es negativo la parábola se abre hacia abajo.

Ya que p es la distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz se tiene que

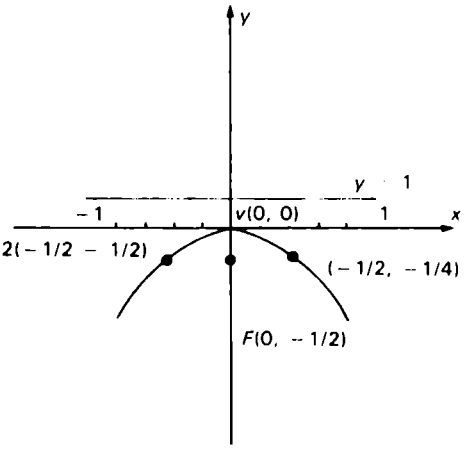


Por lo que las coordenadas del foco son $F(0, -1/4)$ y la ecuación de la directriz es $y = 1/2$

$$LR = |4p| = |4(-1/4)| = 1$$



Siendo las coordenadas de L y R, $L(-1/2, -1/4)$ y $R(1/2, -1/4)$ y la gráfica es



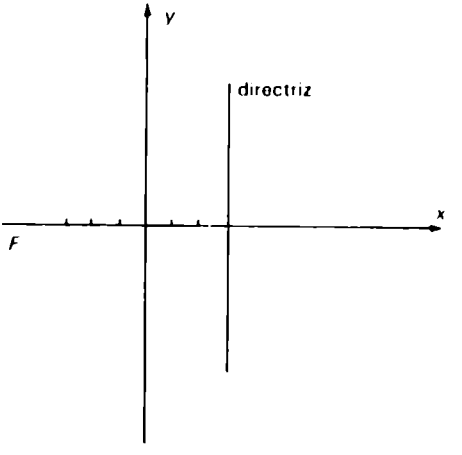
3. $y^2 = -12x$

La parábola es horizontal ya que es de la forma $y^2 = 4px$

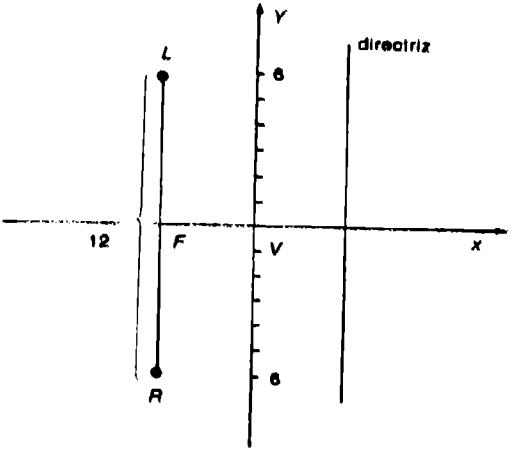
$$y^2 = 4px$$
$$y^2 = -12x$$

entonces
$$4p = -12$$
$$p = -12/4$$
$$p = -3$$

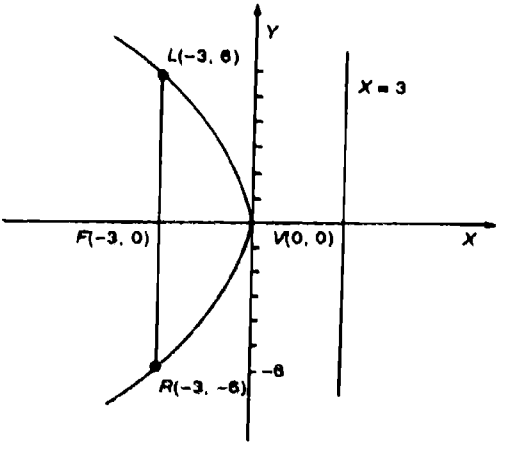
Por lo que la parábola se abre hacia la izquierda. Como p es la distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz se tiene que



y las coordenadas del foco son $F(-3, 0)$ y ecuación de la directriz $x = +3$
$LR = |4p| = |4(-3)| = 12$



las coordenadas de L y R son $L(-3,6)$ y $R(-3, -6)$ y la gráfica es



Como en la circunferencia, también es de interés poder localizar el dominio y la imagen de una parábola.

Consideremos la parábola $y^2 = 4px$ con $p > 0$, entonces, los valores que puede tomar x son los reales no negativos, es decir, el dominio de la parábola $y^2 = 4px$, $p > 0$ es $[0, +\infty)$ y la variable y puede tomar todos los valores, esto es, imagen de $y^2 = 4px$ es $(-\infty, +\infty)$.

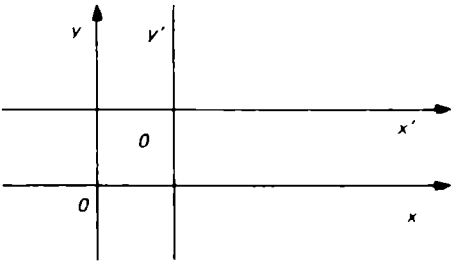
Si $p < 0$ en la ecuación $y^2 = 4px$, tenemos que el dominio es $(-\infty, 0]$ y la imagen $(-\infty, \infty)$.

También tenemos que para:

$x^2 = 4py$, $p > 0$ Dominio $(-\infty, +\infty)$ e Imagen $[0, +\infty)$
$x^2 = 4py$, $p < 0$ Dominio $(-\infty, +\infty)$ e Imagen $(-\infty, 0]$

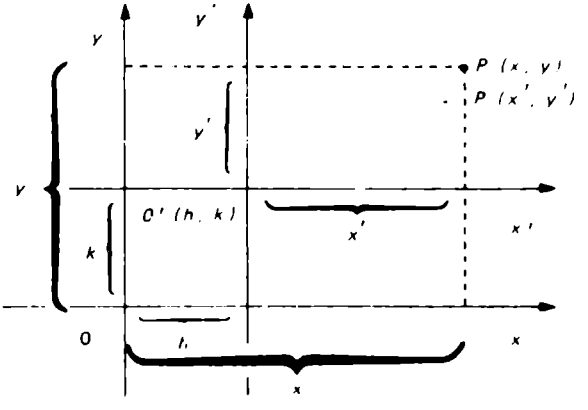
Traslación de ejes

En el sistema de coordenadas xy con frecuencia es necesario considerar un punto del plano como un nuevo origen, de tal manera que a través de este punto se pueden trazar otros ejes coordenados. Una de las maneras más simples es trazarlos de modo que sean paralelos a los ejes xy originales. Es decir, se han trasladado los ejes a un punto determinado del plano.



Al nuevo origen lo denotaremos por $0'$ y a los ejes: x' y'.

Consideremos un punto P en el plano. Es claro que este punto puede ser referido en términos de las coordenadas xy originales o en términos de las coordenadas trasladadas x' y', $P(x, y) = P(x' y')$.



Para establecer una relación entre los dos sistemas, consideraremos que las coordenadas del origen 0′ en el sistema xy son (h, k). Entonces:

$$x = h + x' \qquad \text{y} \qquad y = k + y'$$

o sea:

$$x' = x - h \qquad\qquad y' = y - k$$

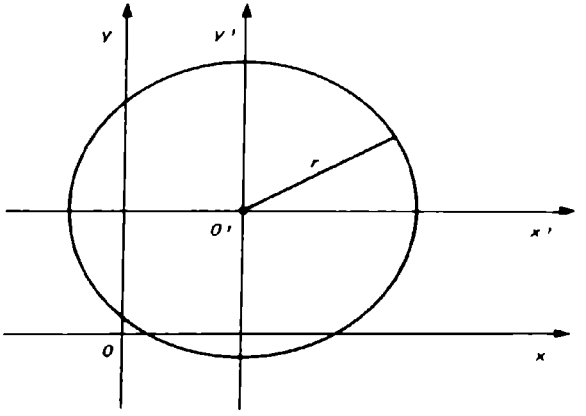
Así, en el sistema $x'\,y'$ tenemos:

$$P(x', y') = P(x - h, y - k)$$

Observaciones.

a) Si consideramos en el sistema x', y' una circunferencia con centro en el origen y radio r, sabemos que su ecuación es:

$$x'^2 + y'^2 = r^2$$



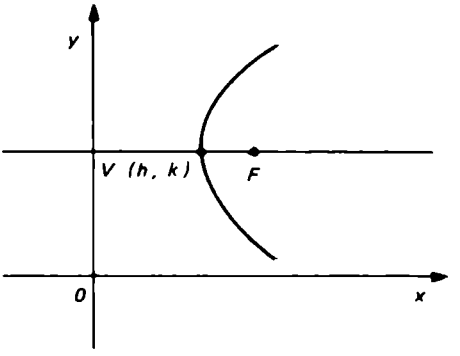
Si el nuevo origen 0′ tiene coordenadas (h, k) y si $x' = x - h$ y $y' = y - k$, obtenemos la ecuación en el sistema original xy:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

lo cual coincide con la ecuación de la circunferencia con centro en (h, k) dada anteriormente.

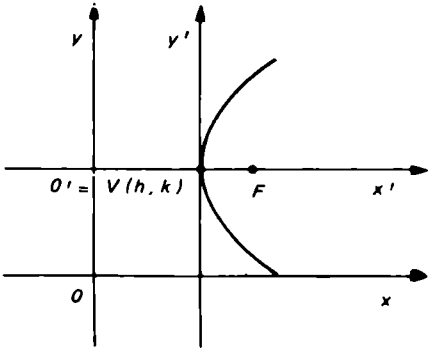
b) En general, la gráfica de cualquier relación $R\ (x, y)$ en el sistema xy coincide con la gráfica $R\ (x', y')$ de la misma relación referida a los ejes $x'\ y'$.

Encontraremos ahora la ecuación de una parábola cuyo eje es paralelo al eje x y su vértice es el punto $V\ (h, k)$.



Si trasladamos el sistema de coordenadas xy al sistema $x'\ y'$ de tal forma que el nuevo origen $0'$ coincida con el punto $V\ (h, k)$ (el eje x' será el eje de la parábola), obtenemos una parábola con centro en $0'$, cuya ecuación es:

$$y'^2 = 4px'$$



Haciendo uso de las relaciones:

$$x' = x - h \qquad \text{y} \qquad y' = y - k$$

Obtenemos en el sistema xy:

$$(y - k)^2 = 4\,p\,(x - h).$$

Teorema 3.

La ecuación de una parábola cuyo eje es paralelo al eje x y el vértice es el punto $V(h, k)$ es:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

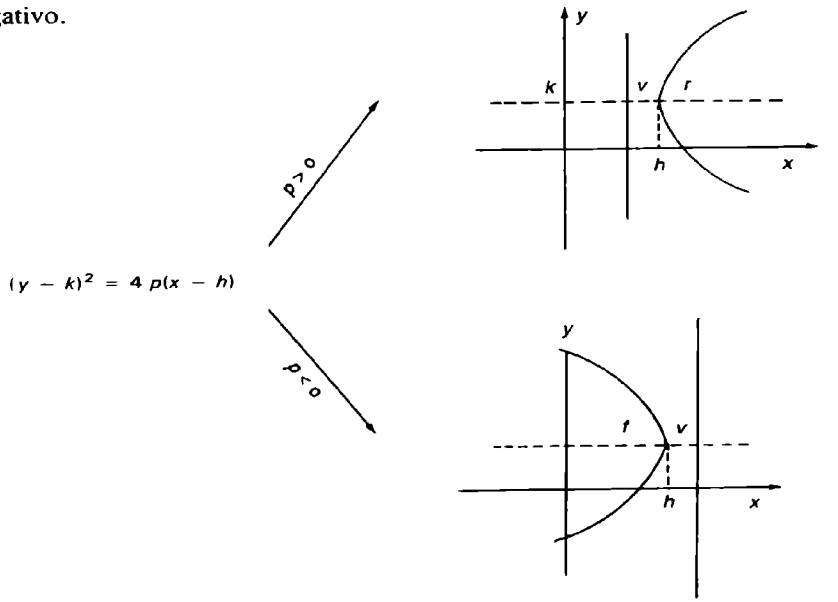
Teorema 4.

La ecuación de una parábola cuyo eje es paralelo al eje y y el vértice es el punto $V(h, k)$ es:

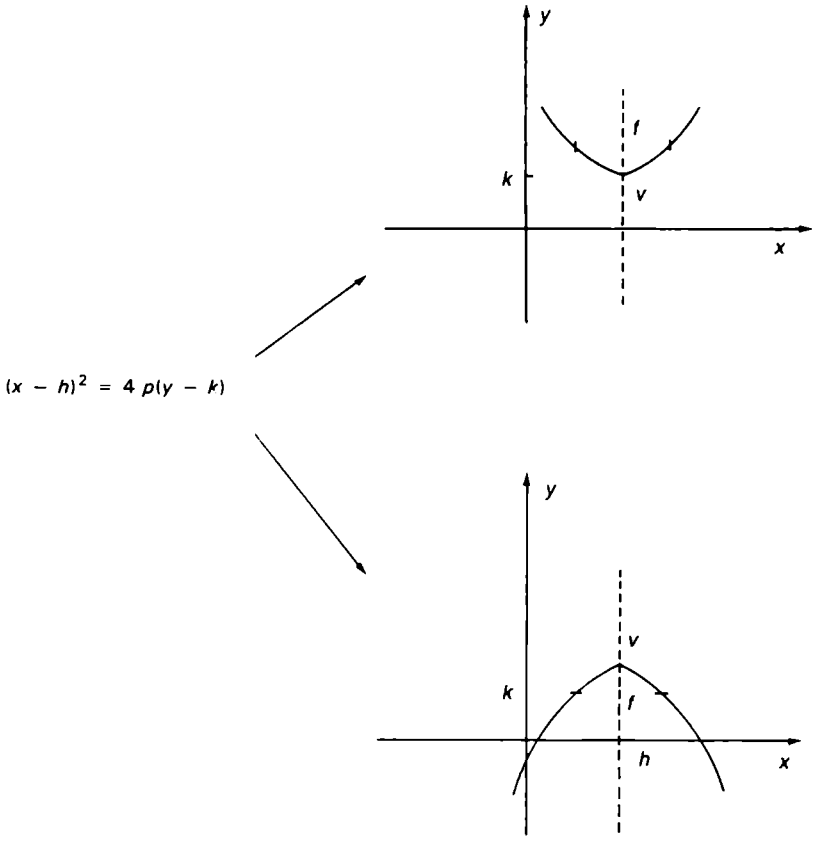
$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

De estos dos teoremas podemos afirmar que:

La ecuación $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ es una parábola cuyo eje focal es paralelo al eje x, y con vértice en $V(h, k)$ que se abre hacia la derecha o hacia la izquierda dependiendo de que el valor de p sea positivo o negativo.



La ecuación $(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$ es una parábola cuyo eje focal es paralelo al eje y, con vértice en $V(h, k)$ que se abre hacia arriba o hacia abajo dependiendo de que el valor de p sea positivo o negativo.



Recordemos que además de la ecuación de la parábola es de interés obtener:

a) Su gráfica.
b) Las coordenadas del foco.
c) Las coordenadas de los extremos del lado recto.
d) La ecuación de la directriz.
e) La longitud del lado recto.

Nos daremos cuenta que para encontrar estos datos es suficiente con saber las coordenadas del vértice y el valor de p. Para la parábola de ecuación:

$$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$$

cuya gráfica es:

$p > 0$

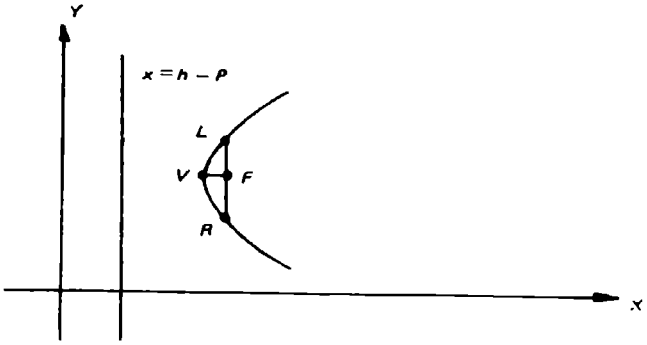
$V(h, k)$

$F(h + p, k)$

$L(h + p, k + 2p)$

$R(h + p, k - 2p)$

directriz $x = h - p$



$p < 0$

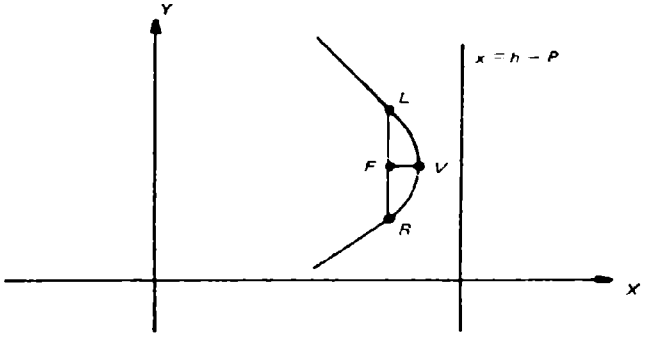
$V(h, k)$

$F(h + p, k)$

$R(h + p, k - 2p)$

$L(h + p, k + 2p)$

directriz $x = h - p$



Tenemos que la distancia del vértice al foco es p, por lo que las coordenadas del foco son $(h + p, k)$, puesto que a partir del vértice $V(h, k)$ la abscisa se incrementa en p unidades, mientras que la ordenada permanece constante. De la misma manera observamos que la ecuación de la directriz es: $x = h - p$. Además, como la longitud del lado recto es $|4p|$ y el foco es el centro de este segmento, para localizar las coordenadas de los extremos del lado recto basta aumentar o disminuir, respectivamente, a la ordenada del foco la magnitud $2p$, de donde las coordenadas de los extremos del lado recto son: $L(h + p, k + 2p)$, $R(h + p, k - 2p)$.

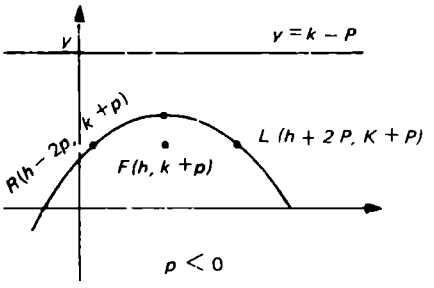
Resumiendo lo anterior concluimos que, para la parábola con ecuación $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ tenemos:

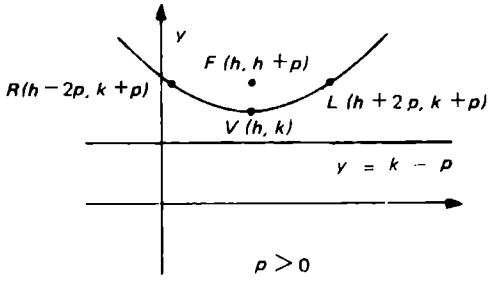
Coordenadas del foco: $F(h + p, k)$
Ecuación de la directriz: $x = h - p$
Coordenadas de los extremos del lado recto: $L(h + p, k + 2p)$ y $R(h + p, k - 2p)$.

Ahora, para la parábola con ecuación:

$$(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$$

cuya gráfica es:





Haciendo un análisis similar al anterior tenemos:

Foco: $F\,(h,\ k + p)$
Directriz: $y = k - p$
Coordenadas de los extremos del lado recto: $L\,(h + 2p,\ k + p)$
$R\,(h - 2p,\ k + p)$.

Observación. Es recomendable, para obtener los datos de la parábola, localizar las coordenadas del vértice, obtener el valor de p y hacer uso de su gráfica.

Ejemplos.

4. Si la ecuación de una parábola es

$$(y + 2)^2 = -4(x - 1)$$

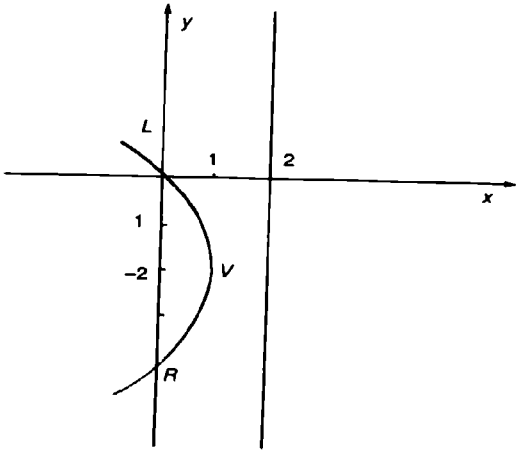
obtener todos sus datos y graficarla comparando esta ecuación con

$$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$$
$$(y + 2)^2 = -4(x - 1)$$

podemos decir que $k = -2$, $h = 1$ y $4p = -4$ o $p = -1$
La ecuación representa una parábola que se abre a la derecha o izquierda ya que la variable y es la que está al cuadrado y de los datos anteriores el vértice está en $V(1, -2)$ y como $p = -1$ y éste es negativo se va a abrir hacia la izquierda.

$$LR = |4P| = |4(-1)| = 4$$

Localizaremos el foco y la directriz a partir del valor de p ya que éste es la distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz



Los datos de esta parábola son

$V(1, -2)$, $F(0, -2)$, $L(0, 0)$, $R(0, -4)$, $LR = 4$, Ec. directriz $x = 2$.

5. Establezca la ecuación de la parábola cuyo vértice está en $(-3, 4)$ y cuyo foco es $(-5, 4)$. Hacer la gráfica.

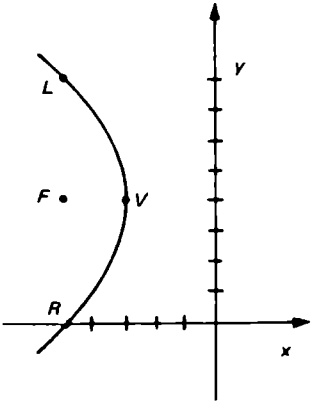
Como el vértice $V(-3, 4)$ y el foco $F(-5, 4)$ tienen la misma ordenada, $y = 4$ y como F y V están sobre el eje de la parábola, concluimos que dicho eje es horizontal. Entonces, esta parábola tiene ecuación del tipo $(y - k)^2 = 4p(x - h)$. Y como F está a la izquierda de V, la parábola se abre hacia la izquierda y p es negativa, o sea que p es la distancia dirigida de V a F, es decir, $p = -2$.

Entonces, la ecuación de la parábola es:

$$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$$
$$(y - 4)^2 = 4\,(-2)\,(x - (-3))$$
$$(y - 4)^2 = -8\,(x + 3)$$

Longitud del lado recto $= |\,4p\,| = |\,4\,(-2)\,| = |\,-8\,| = 8$

Observando la gráfica, tenemos que los extremos del lado recto son: $L\,(-5, 0)$ y $R\,(-5, 8)$



6. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V\,(3, 4)$ y cuyo foco es $(3, 2)$. Hallar también la ecuación de su directriz, las coordenadas de los extremos del lado recto y la longitud del lado recto.

V (3, 4), F (3, 2). Como el vértice y el foco de una parábola están sobre su eje y en este caso V y F tienen la misma abscisa ($x = 3$), se sugiere que el eje de la parábola es paralelo al eje y, entonces la ecuación de esta parábola del tipo:

$$(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$$

y como $V(h, k) = (3, 4)$, tenemos:

$$(x - 3)^2 = 4p\,(y - 4)$$

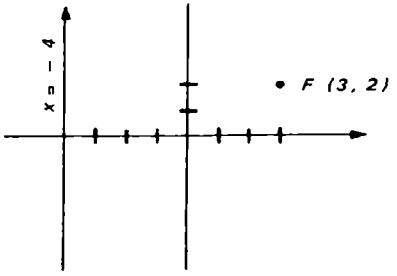
Como el foco F (3, 2) está abajo de V (3, 4), entonces la parábola se abre hacia abajo y la distancia dirigida p del vértice al foco es $p = -2$. Así, obtenemos:

$$(x - 3)^2 = 4(-2)(y - 4)$$
$$(x - 3)^2 = -8(y - 4)$$

Su ecuación es: $(x - 3)^2 = -8(y - 4)$
Longitud del lado recto $= |4p| = |4(-2)| = |-8| = 8$
Ecuación de la directriz: $y = k - p = 4 - (-2) = 4 + 2 = 6$
$y = 6$
Extremos del lado recto:

$$L(h + 2p,\ k + p) = (3 - 4,\ 4 - 2) = (-1, 2)$$
$$R(h - 2p,\ k + p) = (3 + 4,\ 4 - 2) = (7, 2)$$

7. Encontrar la ecuación de la parábola con foco $F(3, 2)$ y con recta $x = -4$ como directriz, haciendo uso de la definición de parábola y graficarla.



Observando la gráfica, tenemos que la parábola es horizontal y se abre hacia la derecha. También tenemos que la distancia del foco a la directriz es $2p$, por lo que:

$$2p = 7$$

o sea: $$p = 7/2$$

Puesto que el vértice equidista de la directriz y el foco, sus coordenadas son:

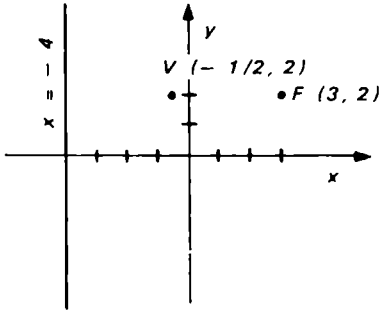
$$V\,(-1/2, 2)$$

Como la ecuación es del tipo:

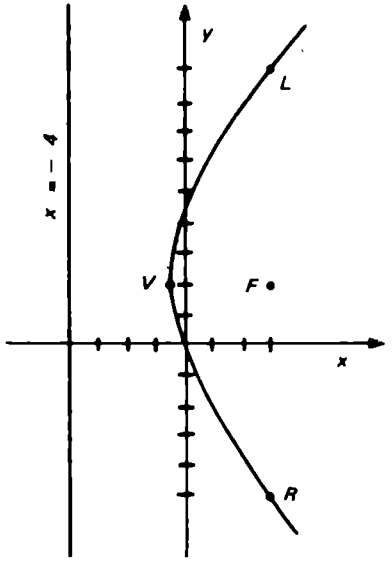
$$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$$

tenemos:

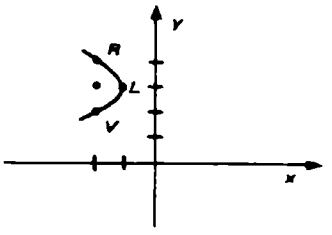
$$(y - 2)^2 = 4\,(7/2)\,(x + 1/2)$$
$$(y - 2)^2 = 14\,(x + 1/2)$$



Además, $LR = |\,4p\,| = |\,4\,(7/2)\,| = 14$, por tanto:



8. Si los extremos del lado recto de una parábola son $L\ (-2, 2)$, $R\ (-2, 4)$ y se abre hacia la izquierda, encontrar su ecuación.



Como $LR = |4p|$ entonces $|4p| = 2$
O sea, que:

$$|4p| = 2$$
$$|p| = 1/2$$

Puesto que la parábola se abre hacia la izquierda, p es negativa:

$$p = -1/2$$

y la ecuación es del tipo:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Para encontrar los valores de h y k, y puesto que los extremos del lado recto pertenecen a la parábola, se sustituyen en la ecuación y se simultaneiza.

$$\begin{array}{r} (2-k)^2 = 4(-1/2)(-2-h) \\ (4-k)^2 = 4(-1/2)(-2-h) \\ \hline k^2 - 4k - 2h = 0 \\ k^2 - 8k - 2h = -12 \\ \hline 4k = 12 \\ k = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} k^2 - 4k - 2h = 0 \\ 9 - 12 = 2h \\ -3 = 2h \\ h = -3/2 \end{array}$$

Y así, la ecuación de la parábola es:

$$(y - 3)^2 = -2(x + 3/2)$$

Hemos visto que $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ es la ecuación de una parábola horizontal, desarrollando la expresión:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

tenemos:

$$y^2 - 2yk + k^2 = 4px - 4ph$$
$$y^2 - 4px - 2yk + k^2 + 4ph = 0$$
$$y^2 + (-4p)x + (-2k)y + (k^2 + 4ph) = 0.$$

Si hacemos $D = (-4p)$, $E = (-2k)$, $F = (k^2 + 4ph)$, tenemos:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Es decir, la ecuación $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ se puede reducir a la forma cuadrática: $y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Inversamente, consideremos la ecuación cuadrática:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$y^2 + Ey = -Dx - F$$

entonces,

$$y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = -Dx - F + \frac{E^2}{4}$$

$$(y + \frac{E}{2})^2 = -D\left[x + \frac{F}{D} - \frac{E^2}{4D}\right]$$

es decir, la ecuación $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ puede tomar la forma:

$$\left[y - \left(-\frac{E}{2}\right)\right]^2 = -D\left[x - \left(\frac{E^2}{4D} - \frac{F}{D}\right)\right]$$

que es la ecuación de una parábola horizontal con vértice $V\left(-\frac{E}{2}, \frac{E^2}{4D} - \frac{F}{D}\right)$, que se abre hacia la derecha si $(-D) > 0$ y se abre hacia la izquierda si $(-D) < 0$.

Teorema 5.

La parábola horizontal de ecuación $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ se puede reducir a la ecuación $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ y, a la inversa, toda ecuación de la forma $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje x, si $D \neq 0$.

Teorema 6.

La parábola vertical de ecuación $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ se puede reducir a la ecuación $x^2 + Dx + Ey + F = 0$ y, a la inversa, toda ecuación de la forma $x^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje y, si $E \neq 0$.

Ejemplos.

9. Trazar la gráfica de la ecuación $y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$.

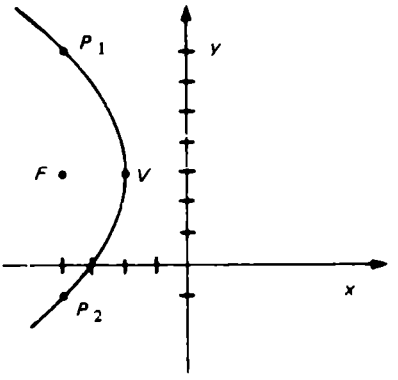
Al ser la ecuación cuadrática en una de las variables, representa una parábola. Por tanto:

$$
\begin{aligned}
y^2 + 8x - 6y + 25 &= 0 \\
y^2 - 6y &= -8x - 25 \\
y^2 - 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2 &= -8x - 25 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \\
y^2 - 6y + 9 &= -8x - 25 + 9 \\
(y - 3)^2 &= -8x - 16 \\
(y - 3)^2 &= -8(x + 2)
\end{aligned}
$$

que es una parábola horizontal con vértice en $V(-2, 3)$.

Además, $4p = -8$ y $p = -2$. Entonces, $V(-2, 3)\ F(h + p, k) = (-2 - 2, 3) = (-4, 3)$

Extremos del lado recto:
$P_1\ (h + p,\ k + 2p) = (-2 - 2,\ 3 + 2(-2)\ ) = (-4, -1)$
$P_2\ (h + p,\ k - 2p) = (-2 - 2,\ 3 - 2(-2)\ ) = (-4, 7)$
Longitud del lado recto: $|\ 4p\ | = |\ 4(-2)\ | = |-8\ | = 8$
Ecuación de la directriz: $x = h - p = -2 - (-2) = 0$
$x = 0$



También se puede obtener la ecuación reducida directamente de la ecuación $y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$, que al darle la forma $y^2 + Dx + Ey + F = 0$, nos da los valores de los coeficientes: $D = 8$, $E = -6$ y $F = 25$. Sustituyendo en la ecuación:

$$(y - \frac{-E}{2})^2 = (-D)\ [\ x - (\ \frac{E^2}{4D} - \frac{F}{D})\ ]$$

$$(y - \frac{+6}{2})^2 = (-8)\ [\ x - (\frac{(-6)^2}{(4)\ (8)} - \frac{25}{8})\ ]$$

$$(y - 3)^2 = -8\ (x - \frac{36}{32} + \frac{25}{8})$$

$$(y - 3)^2 = -8\ (x - \frac{36}{32} + \frac{100}{32})$$

$$(y - 3)^2 = -8\ (x + \frac{64}{32})$$

$$(y - 3)^2 = -8\ (x + 2)$$

que es la misma ecuación que habíamos deducido.

10. Una parábola cuyo eje es paralelo al eje y, pasa a través de los puntos $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(-1, 5)$. Encontrar su ecuación, sus datos y graficar.

La ecuación debe ser cuadrática en x y lineal en y, es decir, la ecuación es del tipo: $x^2 + Dx + Ey + F = 0$, puesto que los puntos dados pertenecen a la parábola, ellos deben satisfacer la ecuación. Por lo tanto, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 1 + D + E + F &= 0 \\ 4 + 2D + 2E + F &= 0 \\ 1 - D \quad + 5E + F &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} D &= -2 \\ E &= -1 \\ F &= \quad 2 \end{aligned}$$

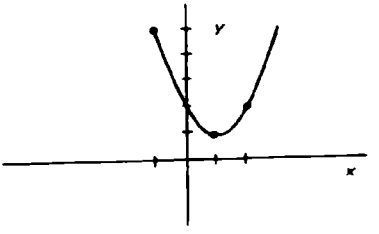
y la ecuación de la parábola es:

$$x^2 - 2x - y + 2 = 0$$

a la que podemos darle la forma $(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$.

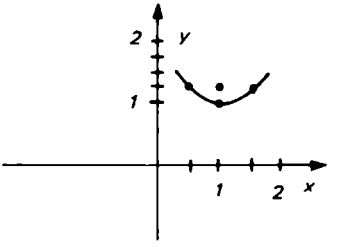
$$\begin{aligned} x^2 - 2x - y + 2 &= 0 \\ x^2 - 2x &= y - 2 \\ x^2 - 2x + 1 &= y - 2 + 1 \\ (x - 1)^2 &= (y - 1) \end{aligned}$$

que es la ecuación de una parábola vertical con vértice en $V(1, 1)$. Además, $4p = 1$ y $p = \frac{1}{4}$, por lo que dicha parábola se abre hacia arriba.



Tomando en cuenta el valor de p y las coordenadas del vértice, tenemos:

$F(1, 5/4)$
Ecuación de la directriz: $y = 3/4$
$LR = |4p| = 4(1/4) = 1$
$L(3/2, 5/4)$
$R(1/2, 5/4)$



Ejercicios.

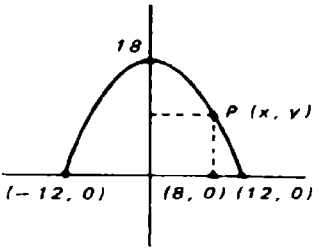
1. En los siguientes ejercicios escribir la ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

   a) $V(0, 3)$ y $F(4, 3)$
   b) $V(0, 0)$ y $F(0, 9)$
   c) $V(0, 0)$ y $F(6, 0)$
   d) $V(2, 3)$ y $F(6, 3)$
   e) $V(-3, 1)$ y $F(1, 1)$
   f) $V(5, -2)$ y $F(-2, -2)$
   g) $V(0, 0)$ pasa por el punto $(1, 3)$ y tiene su foco en el eje x.
   h) $F(1, 1)$ y directriz $x = 2$
   i) $V(0, 0)$ y directriz $x + 4 = 0$
   j) $F(2, -3)$ y directriz $y = -5$
   k) $V(0, 0)$ y directriz $y - 7 = 0$
   l) $V(-1, -2)$, $LR = 12$ y se abre hacia la derecha.
   m) Extremos del lado recto $(2, 1)$ y $(2, 3)$ y foco a la derecha del vértice.
   n) Lado recto formado por los segmentos que unen los puntos $(3, 5)$ y $(-3, 5)$.
   ñ) $V(4, -1)$, $LR = 8$ y se abre hacia la izquierda.

2. Hallar la ecuación de la parábola del eje vertical que pasa por los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 6)$.

3. Hallar la altura de un punto sobre un arco parabólico de 18 mts. de al-

tura y 24 mts. de base situado a una distancia de 8 mts. del centro del arco.



4. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice está sobre la recta de ecuación $7x + 3y - 4 = 0$, de eje horizontal y que pasa por los puntos $(3, -5)$ y $(3/2, 1)$.

5. Determinar vértice, foco, directriz, extremos del lado recto, longitud del lado recto y graficar.

a) $3y^2 = 8x$
b) $y^2 = -20x$
c) $x^2 = 24y$
d) $x^2 = -12y$
e) $2x^2 = -5y$
f) $y^2 = 12x$
g) $x^2 = -12y$
h) $x^2 + 20y = 0$
i) $3y^2 = 7x$
j) $4y^2 + 2x = 0$
k) $(y - 3)^2 = 12(x - 4)$
l) $(y - 3)^2 = -8(x - 3)$
m) $(x - 4)^2 = -8(y + 1)$
n) $(x - 10)^2 = 32y$
ñ) $(y + 1/2)^2 = 5x$
o) $(y + 1/4)^2 = (x - 1/8)$
p) $y^2 = 8(x - 1/3)$
q) $y^2 = -12(x - 4)$
r) $(x + 2)^2 = 16y$
s) $(y - 2/3)^2 = -6x$

t) $8y^2 - x + 4y + 3 = 0$
u) $2y^2 + 4y - 8x + 18 = 0$
v) $x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$
w) $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$
x) $y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$
y) $x^2 - 6x - 12y - 15 = 0$
z) $x^2 - 10x - 32y + 25 = 0$
a') $y^2 - 6y + 16x + 9 = 0$
b') $x^2 - 2x - 8y + 9 = 0$
c') $y^2 - 4y - 4x + 24 = 0$
d') $y^2 + 2y - 12x + 37 = 0$
e') $x^2 - 6y + 10x + 1 = 0$
f') $x^2 + 4x + 8y - 28 = 0$
g') $y^2 - 8y - 16x + 4 = 0$

6. Construir las gráficas de las siguientes relaciones:

a) $R_1 = \{ (x, y) \mid y = 6 - x^2 \text{ y } y = x^2 - 2 \}$
b) $R_2 = \{ (x, y) \mid y = 6 - x^2 \text{ o } y = x^2 - 2 \}$
c) $R_3 = \{ (x, y) \mid y < 6 - x^2 \text{ o } y < x^2 - 2 \}$
d) $R_4 = \{ (x, y) \mid y \leqslant 6 - x^2 \text{ o } y \leqslant x^2 - 2 \}$
e) $R_5 = \{ (x, y) \mid y \leqslant 6 - x^2 \text{ y } y < x^2 - 2 \}$
f) $R_6 = \{ (x, y) \mid y > 6 - x^2 \text{ y } y > x^2 - 2 \}$
g) $R_7 = \{ (x, y) \mid y \geqslant 6 - x^2 \text{ o } y > x^2 - 2 \}$
h) $R_8 = \{ (x, y) \mid y < 6 - x^2 \text{ y } y \geqslant x^2 - 2 \}$
i) $R_9 = \{ (x, y) \mid y \geqslant 6 - x^2 \text{ o } y < x^2 - 2 \}$
j) $R_{10} = \{ (x, y) \mid y = 6 - x^2 \text{ y } y \geqslant x^2 - 2 \}$

7. Graficar las siguientes relaciones:

a) $\{ (x, y) \mid y^2 = 12x \text{ o } y^2 - 4y - 14x - 3 < 0 \}$
b) $\{ (x, y) \mid x^2 + 3x + 4y - 2 \geqslant 0 \text{ y } y^2 - 4y - 16x - 12 \leqslant 0 \}$
c) $\{ (x, y) \mid y^2 \leqslant -7x \text{ y } x + y - 5 = 0 \}$
d) $\{ (x, y) \mid y^2 + 4x + 2y < 9 \text{ y } x^2 + y^2 \geqslant 16 \}$
e) $\{ (x, y) \mid x^2 \leqslant -y \text{ y } x \geqslant y \text{ y } x^2 + y^2 \leqslant 1 \}$
f) $\{ (x, y) \mid x^2 > -2y \text{ y } x - 2y < 1 \text{ o } x^2 + y^2 \geqslant 25 \}$
g) $\{ (x, y) \mid y^2 \leqslant -4x \text{ y } (x - 1)^2 + y^2 \geqslant 4 \}$
h) $\{ (x, y) \mid x^2 = -8y \text{ o } x + 4y = 1 \text{ o } x^2 + y^2 = 16 \}$
i) $\{ (x, y) \mid y^2 + 8x - 2y \geqslant 15 \text{ y } (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 25 \}$

Sección 10.5

ELIPSE

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir elipse.
2. A partir de la definición de elipse, deducir y graficar las elipses que tienen por ecuación:

   a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

   b) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

3. A partir de datos suficientes, encontrar la ecuación de la elipse con centro en el origen.
4. Dada la ecuación de una elipse con centro en el origen, encontrar sus datos y graficar.
5. Utilizando traslación de ejes, deducir las siguientes ecuaciones:

   a) $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

   b) $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

6. A partir de la ecuación reducida de la elipse, deducir su ecuación general.
7. Dada la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, decir cuándo es:

   a) Una elipse
   b) Un punto
   c) Conjunto vacío.

8. A partir de datos suficientes, encontrar la ecuación de la elipse con centro en (h, k) y graficar, especificando su dominio y su imagen.
9. Dada la ecuación general de la elipse, encontrar sus datos y graficar.
10. Encontrar el conjunto solución de desigualdades que involucren rectas y/o circunferencias y/o parábolas y/o elipses.

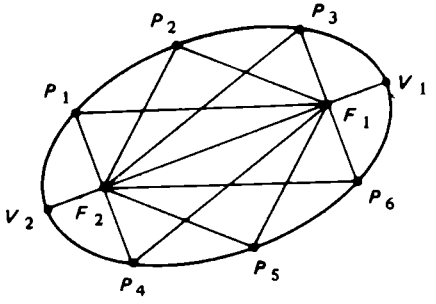
Definición. Elipse es el conjunto de puntos en el plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos es constante.

A los puntos fijos los llamamos focos de la elipse y los denotaremos por F_1 y F_2. A la suma constante la denotaremos por $2a$.

$$\text{Elipse} = \{ P \in R^2 \mid |\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a \}$$
$$= \{ P \in R^2 \mid d(PF_1) + d(PF_2) = 2a \}$$

Un punto P pertenece a la elipse de focos F_1 y F_2 si y sólo si:

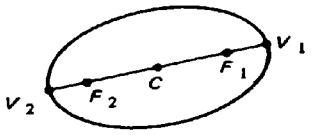
$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$$



Observando la gráfica anterior tenemos que:

$P_1 \in$ Elipse si y sólo si $|\overline{P_1F_1}| + |\overline{P_1F_2}| = 2a$
$P_2 \in$ Elipse si y sólo si $|\overline{P_2F_1}| + |\overline{P_2F_2}| = 2a$
$P_3 \in$ Elipse si y sólo si $|\overline{P_3F_1}| + |\overline{P_3F_2}| = 2a$
$P_4 \in$ Elipse si y sólo si $|\overline{P_4F_1}| + |\overline{P_4F_2}| = 2a$
$V_1 \in$ Elipse si y sólo si $|\overline{V_1F_1}| + |\overline{V_1F_2}| = 2a$
$V_2 \in$ Elipse si y sólo si $|\overline{V_2F_1}| + |\overline{V_2F_2}| = 2a$

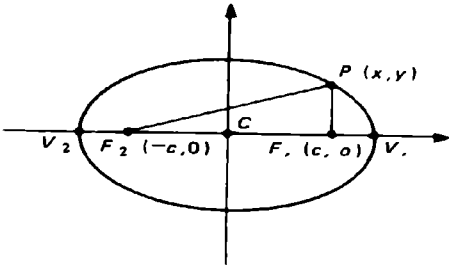
La distancia que existe entre F_1 y F_2 la representamos por $2c$. La recta que pasa por los focos la llamaremos *eje focal*; los puntos V_1 y V_2 en donde la elipse intersecta al eje focal los llamaremos *vértices*; el segmento V_1V_2 será llamado *eje mayor* de la elipse y al punto medio del eje mayor lo llamaremos *centro* y lo representamos por C.



F_1, F_2 = Focos
V_1, V_2 = Vértices
$\overline{F_1 F_2}$ = Eje focal y $|\overline{F_1 F_2}| = 2c$
$\overline{V_1 V_2}$ = Eje mayor y $|\overline{V_1 V_2}| = 2a$
C = Centro

Para establecer la ecuación de la elipse, consideremos el caso particular de una elipse cuyo eje focal coincida con el eje de las x y el centro sea el origen, es decir $C(0, 0)$.

Puesto que la distancia entre F_1 y F_2 es $2c$, en este caso las coordenadas de F_1 y F_2 son: F_2 son: F_2 $(-c, 0)$ y F_1 $(c, 0)$.



Si $P(x,y)$ es un punto de la elipse, por definición tenemos:

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a \qquad (1)$$

además:

$$|\overline{PF_1}| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$|\overline{PF_2}| = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Entonces tenemos que la igualdad 1 se convierte en:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a_2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 - 2xc - c^2 - y^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$-4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$x^2c^2 + 2xca^2 + a^4 = a^2(x+c)^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 + 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 + 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2$$

$$\frac{x^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(a^2 - c^2)} = \frac{a^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

Puesto que $a > c$, tenemos que $a^2 - c^2 > 0$ y llamaremos b^2 a esta resta, es decir, $b^2 = a^2 - c^2$.

De donde obtenemos la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Teorema 1.

> La ecuación de la elipse con focos $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, en la cual la suma de las distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos es $2a$, tiene la forma:
>
> $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ en donde } b > 0 \text{ y } b^2 = a^2 - c^2$$
>
> y es llamada elipse horizontal, con centro en el origen.

Para encontrar las coordenadas de los vértices V_1, V_2 sustituiremos $y = 0$ en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$x^2 = a^2$$

$$x = \pm a$$

es decir, $V_1\ (a, 0)$ y $V_2\ (-a, 0)$, de donde observamos que la longitud del eje mayor es $| \overline{V_1\ V_2} | = 2a$.

Si trazamos una perpendicular al eje mayor a través del centro $c\ (0,0)$, podemos determinar los puntos B_1 y B_2 donde la elipse intersecta a esta perpendicular y las coordenadas de B_1 y B_2 se obtienen sustituyendo $x = 0$ en la ecuación, con lo que tenemos

$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = b^2$$

$$y = \pm b$$

o sea: $B_1\ (0, b)$ y $B_2\ (0, -b)$. Al segmento $B_1\ B_2$ lo llamaremos eje menor de la elipse y su longitud es $| B_1\ B_2 | = 2b$.

Al cambiar x por $-x$ y y por $-y$, la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ no se altera: $\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Por esta razón decimos que la gráfica de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es simétrica con respecto al eje x, con respecto al eje y y con respecto al origen.

Para determinar el dominio y la imagen de la elipse despejamos primero la x y luego la y de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Dominio

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\ (a^2 - x^2)$$

Imagen

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2 - y^2}{b^2}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}\ (b^2 - y^2)$$

Dominio

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Para que la raíz exista se debe satisfacer que:

$$a^2 - x^2 \geqslant 0$$
$$(a-x)\ (a+x) \geqslant 0$$

$$x \in [\ -a,\ a\ ]$$

Imagen

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

Para que la raíz exista se debe satisfacer que:

$$b^2 - y^2 \geqslant 0$$
$$y^2 - b^2 \leqslant 0$$
$$(y - b)\ (y+b) \leqslant 0$$

$$y \in [\ -b,\ b\ ]$$

Resumiendo tenemos:

El dominio de la relación:

$$R = \{\ (x,\ y)\ |\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ \}\text{es}$$

$$[\ -a,\ a\ ]$$

La imagen de la relación:

$$R = \{\ (x,y)\ |\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ \}\ \text{es}$$

$$[\ -b,\ b\ ]$$

Puesto que una elipse tiene dos focos, podemos hablar de los lados rectos de la elipse.

Para obtener las coordenadas de los extremos de estos lados rectos, primero encontraremos las coordenadas de los extremos del lado recto que pasa por F_1 y llamaremos L_1 , R_1 . Para esto sustituimos $x = c$ en la ecuación de la elipse.

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\ (a^2 - c^2)$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$= \pm \frac{b}{a} \sqrt{b^2}$$

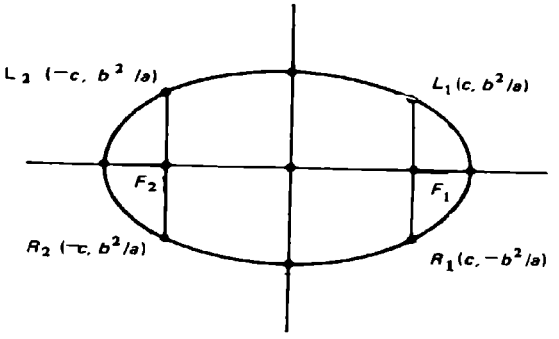
$$y = \pm \frac{b^2}{a}$$

entonces $L_1\ (c,\ b^2/a)$ y $R_1\ (c,\ -b^2/a)$.

De la misma manera podemos obtener las coordenadas de L_2 y R_2, sustituyendo x por $(-c)$ en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y obtenemos $L_2\ (-c,\ b^2/a)$ y $R_2\ (-c,\ -b^2/a)$.



A los segmentos $L_1\ R_1$ y $L_2\ R_2$ los llamamos lados rectos, entonces la longitud del lado recto $|\ L_1\overline{R}_1\ | = |\ L_2\overline{R}_2\ | = 2b^2/a$.

Si ahora consideramos una elipse con centro en el origen, eje mayor sobre el eje de las y y focos $F_1\ (0,c)$, $F_2\ (0, -c)$ y si, además, la suma de las distancias de un punto P de la parábola a los focos es igual a $2a$, se tendrá que la ecuación es de la forma:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

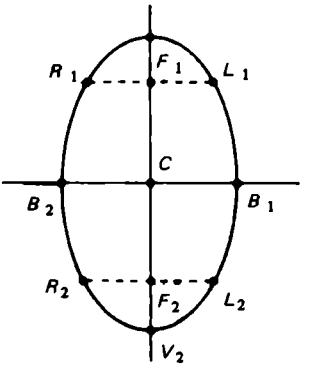
donde $b > 0$ y $b^2 = a^2 - c^2$.

Teorema 2.

La ecuación de la elipse con focos $F_1\ (0,\ c)$, $F_2\ (0,\ -c)$ en la cual la suma de las distancias de un punto cualesquiera a los focos es $2a$, tiene la forma:

$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, en donde $b > 0$ y $b^2 = a^2 - c^2$

y es llamada elipse vertical.



Centro: $C\,(0,0)$
Vértices: $V_1\ (0, a)$, $V_2\ (0, -a)$
Focos: $F_1\ (0, c)$, $F_2\ (0, -c)$
Extremos del lado recto: $L_1\ (\frac{b^2}{a}, c)$, $R_1\ (\frac{-b^2}{a}, c)$

$$L_2\ (\frac{b^2}{a}, -c)\ ,\ R_2\ (\frac{-b^2}{a}, -c)$$

Longitud del lado recto: $|\ \overline{R_1 L_1}\ | = |\ \overline{R_2 L_2}\ | = \frac{2b^2}{a}$

Extremos del eje menor: $B_1\ (b, 0)\ ,\ B_2\ (-b, 0)$
Longitud del eje mayor: $|\ \overline{V_1 V_2}\ | = 2a$
Longitud del eje menor: $|\ \overline{B_1 B_2}\ | = 2b$
Dominio: $[\ -b, b\ ]$
Imagen: $[\ -a, a\ ]$

Observaciones.

a) Tanto en la ecuación de la elipse de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ó } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

intervienen las variables a, b y c, que representan:

a – distancia del centro al vértice.
b – distancia del centro al extremo del eje menor.
c – distancia del centro al foco.

b) El valor de a siempre será mayor que el valor de b.
c) Dada la ecuación de la forma:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$$

tenemos:

i) Si $A = B$, representa una circunferencia.
ii) Si $A > B$, representa una elipse horizontal.
iii) Si $A < B$, representa una elipse vertical.

Ejemplos.

Dar todos los datos y la gráfica de la elipse cuya ecuación es:

1. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

1. Como el denominador mayor es 36 y está debajo de x^2 entonces el eje mayor de la elipse está sobre el eje de las x, o sea que la elipse es horizontal con centro en el origen $c(0, 0)$.
Comparando la ecuación dada con la ecuación de la elipse horizontal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

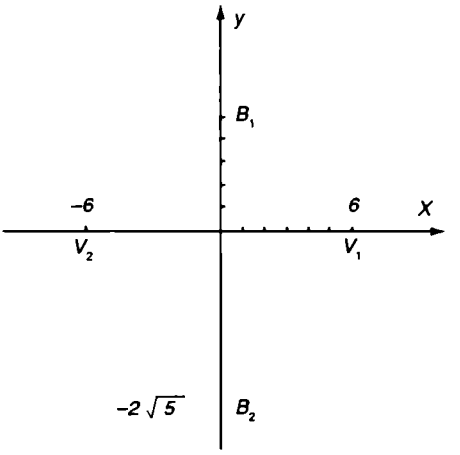
se tiene que

$a^2 = 36$ y $b^2 = 20$

$a^2 = \sqrt{36}$ $b = \sqrt{20}$

$a = 6$ $b = \sqrt{4/3} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$

y como "a" es la distancia del centro (0, 0) al extremo del eje mayor y "b" la distancia del centro (0, 0) al extremo del eje menor

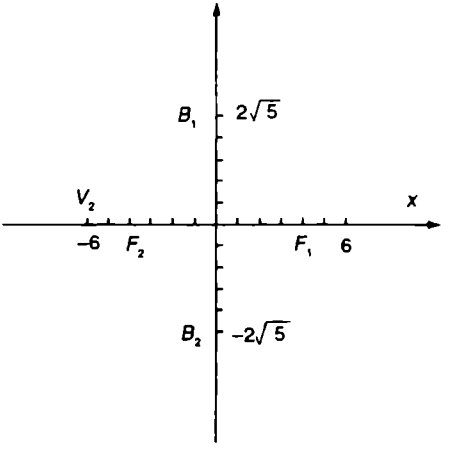


las coordenadas de los vértices son $V_1(6, 0)$, $V_2(-6, 0)$ y las coordenadas de los extremos del eje menor son $B_1\ (0, 2\sqrt{5})$, $B_2\ (0, -2\sqrt{5})$,

Como $c^2 = a^2 - b^2$ entonces

$$c^2 = 36 - 20$$
$$c^2 = 16$$
$$c = 4$$

que es la distancia del centro a cada uno de los focos,

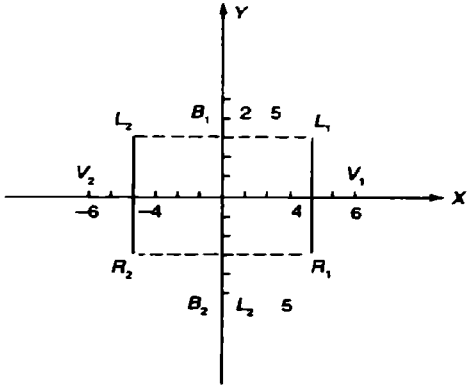


y las coordenadas de los focos son $F_1\ (4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$.

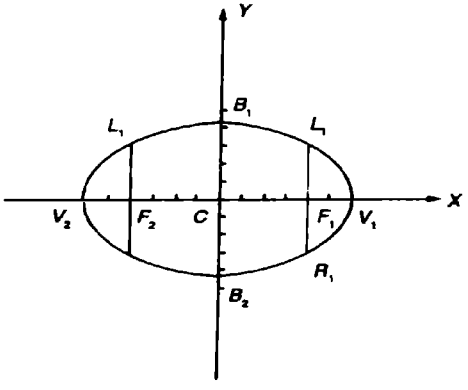
La longitud del lado recto es

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(20)}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

Por lo que el segmento de recta que pasa por el foco que es perpendicular al eje mayor mide 20/3 y la mitad 10/3 está sobre el eje mayor y la otra mitad hacia abajo



y las coordenadas de los extremos de los lados rectos son L_1 (4, 10/3), R_1 (4, −10/3) L_2 (−4, 10/3) y R_2 (−4, − 10/3).
La gráfica de la elipse es



Resumiendo todo lo anterior, los datos de la parábola son:

$C\ (0, 0)$, $V_1\ (6, 0)$ $V_2\ (-6, 0)$, $F_1\ (4, 0)$, $F_2\ (-4, 0)$, $B_1\ (0, 2\sqrt{5})$, $B_2\ (0, -2\sqrt{5})$, $L_1\ (4, 10/3)$, $R_1\ (4, -10/3)$, $L_2\ (-4, 10/3)$, $R_2\ (-4, -10/3)$ $LR = 20/3$.

2. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

La cantidad mayor en los denominadores es 25 y se encuentra debajo de y^2, por lo que la elipse es vertical con centro en el origen $C(0, 0)$.

Comparando la ecuación dada con $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$

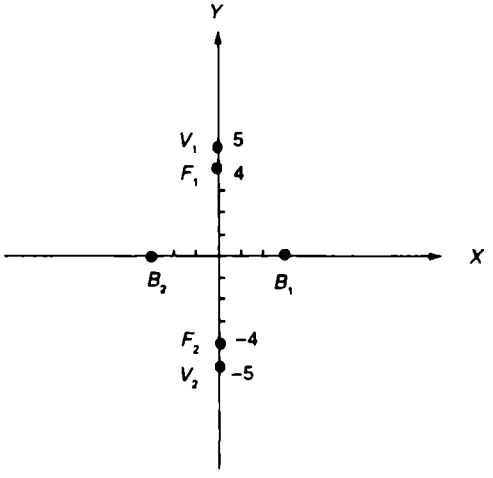
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

tenemos que $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$ ó $a = 5$ y $b = 3$.

Se sabe que

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = 25 - 9$$
$$c^2 = 16$$
$$c = 4$$

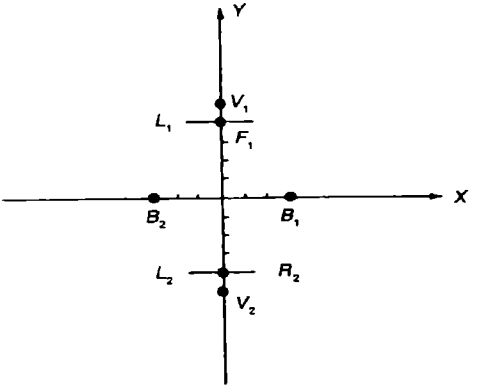
y como "a" distancia del centro al vértice, "c" distancia del centro al foco y "b" distancia del centro al extremo del eje menor, se localizarán en el plano coordenado esos datos.



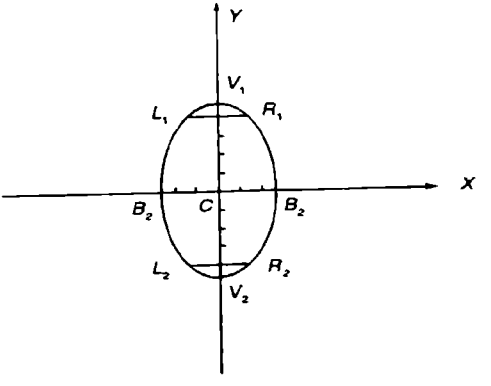
Por lo que las coordenadas de vértices, focos y extremos del eje menor son: V_1 (0, 5), V_2 (0, −5), B_1 (3, 0), B_2 (−3, 0), F_1 (0, 4), F_2 (0, −4).
La longitud del lado recto es

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{5} = \frac{18}{5}$$

Considerando que este segmento pasa por el foco y es perpendicular al eje mayor, se tiene que la mitad 9/5 está a la derecha del eje mayor y la otra mitad hacia la izquierda



Los extremos de los lados rectos son L_1 (9/5, 4), R_1 (−9/5, 4), L_2 (9/5, −4), R_2 (−9/5, −4)
Por lo que la gráfica de la elipse es

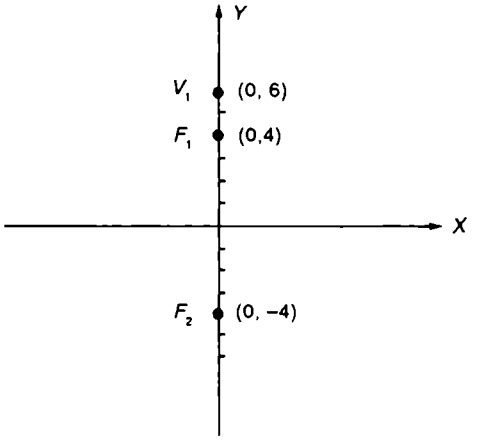


y sus datos son:

$C\ (0,\ 0)\ V_1\ (0,\ 5)\ F_1\ (0,\ 4)\ B_1\ (3,\ 6)\ L_2\ (-9/5,\ -4)\ L_1\ (-9/5,\ 4)$
$LR = 18/5\ V_2\ (0,\ -5)\ F_2\ (0,\ -4)\ B_2\ (-3,\ 0)\ R_2\ (9/5,\ -4)\ R_1\ (-9/5,\ 4)$

3. Obtener la ecuación de la elipse con focos en $F_1\ (0,\ 4)$ y $F_2\ (0,\ -4)$ y uno de sus vértices en $V_1\ (0,\ 6)$. Además dar los demás datos y graficarla.

Graficando los datos que nos proporcionan tenemos



y nos damos cuenta que la elipse tiene centro en $C(0,\ 0)$ y es elipse vertical de ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

De la gráfica se puede afirmar que $a = 6$ y $c = 4$ y usando la relación $b^2 = a^2 - c^2$ obtendremos el valor de b, es decir

$$b^2 = 36 - 16$$
$$b^2 = 20$$
$$b = \sqrt{20}\ b = 2\sqrt{5}$$

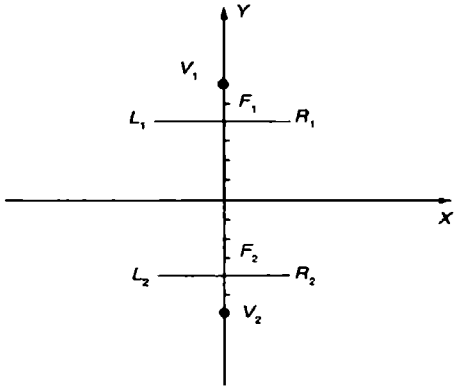
Por lo que la ecuación de la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$$

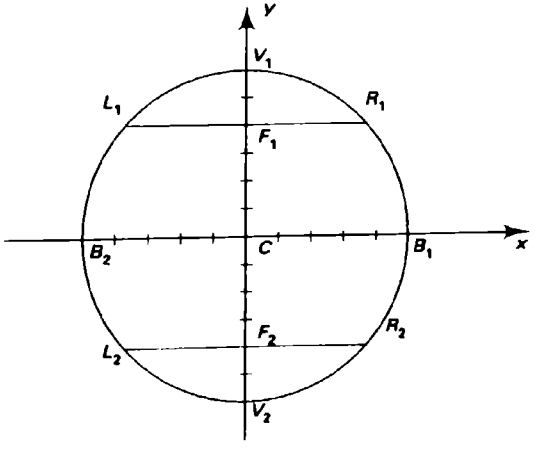
Para graficar la elipse obtendremos la longitud del lado recto

$$LR = \frac{2b^2}{a} = 2\,\frac{(20)}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

dividiendo el segmento LR en dos partes iguales (10/3) una hacia la derecha del foco y otra hacia la izquierda



y las coordenadas de los extremos de los lados rectos son $L_1\ (-10/3,\ 4)$ $R_1\ (10/3,\ 4)$, $L_2\ (-10/3,\ -4)$ y $R_2\ (+10/3,\ -4)$.
Ahora, como $b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, entonces los extremos del eje menor son $B_1\ (2\sqrt{5},\ 0)$ $B_2(-2\sqrt{5},\ 0)$. El otro vértice es $V_2\ (0,\ -6)$ y su gráfica.



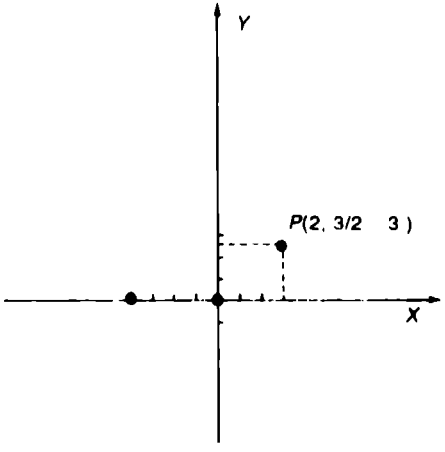
Resumiendo los datos se tiene

$C\ (0, 0)$, $V_1\ (0, 6)$, $F_1\ (0, 4)$, $B_1\ (\sqrt{20}, 0)$, $L_1\ (-10/3, 4)$, $L_2\ (-10/3, -4)$, $LR = 20/3$ $V_2\ (0,-6)$, $F_2\ )0, -4)$, $B_2\ (-\sqrt{20}, 0)$, $R_1\ (10/3, 4)$ $R_2\ (10/3, -4)$

Longitud eje mayor = 12
Longitud eje menor = $2\sqrt{20} = 2\sqrt{4(5)} = 4\sqrt{5}$
Dominio = $[-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$; imagen $[-6, 6]$

Ecuación elipse: $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

4. Construir la gráfica de la elipse cuyo centro está en el origen, un vértice en $V_1\ (-4, 0)$ y la curva pasa por el punto de coordenadas $\left(2, \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$. Primero graficaremos los datos que se proporcionan



Como uno de los vértices está en $V_1\ (-4, 0)$ el otro debe ser $V\ (4, 0)$, además el vértice está sobre el eje x, la ecuación es del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y el valor de a es 4

El punto $P\left(2, \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ está sobre la curva de la elipse y éste debe satisfacer la ecuación.

Es decir, sustituiremos en la ecuación de la elipse los valores de $x = 2$, $y = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ y el valor de $a = 4$ para obtener el valor de b.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(2)^2}{(4)^2} + \frac{\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{4}{16} + \frac{9(3)/4}{b^2} = 1$$

$$\frac{\frac{27}{4}}{\frac{b^2}{1}} = 1 - \frac{4}{16}$$

$$\frac{27}{4b^2} = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\frac{27(4)}{4(3)} = b^2$$

$$9 = b^2 \text{ ó } b = 3$$

Por lo que la ecuación de la elipse es

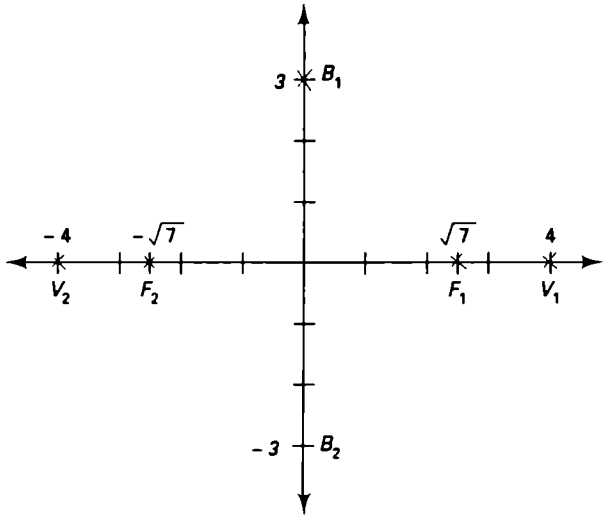
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Además, se obtendrán los demás datos y su gráfica.

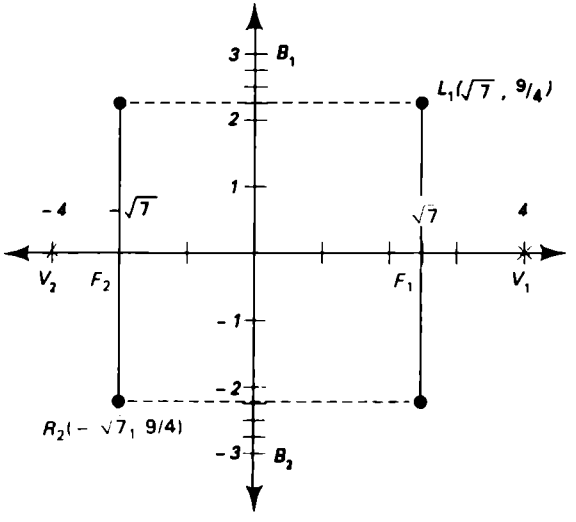
Falta obtener el valor de C, y lo obtendremos de

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 - c^2 \\ 9 &= 16 - c^2 \\ c^2 &= 16 - 9 \\ c^2 &= 7 \\ c &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

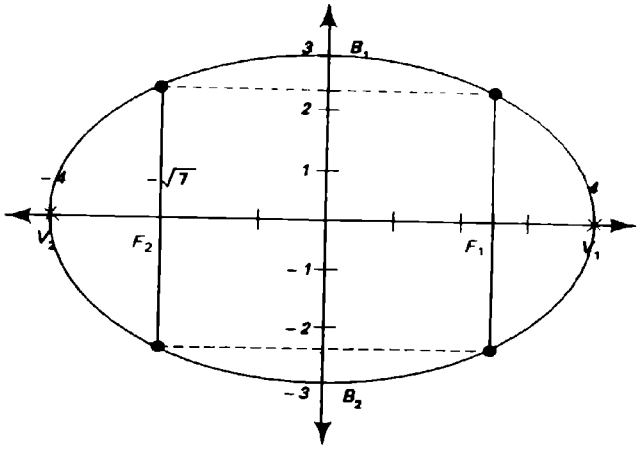
y como $b = 3$ y $a = 4$, entonces las coordenadas de los vértices, focos y extremos del eje menor son $V_1\ (-4, 0)$, $V_2\ (4, 0)$, $B_1\ (0, 3)$, $B_2\ (0, -3)$, $F_2\ (\sqrt{7}, 0)$, $F_1\ (-\sqrt{7}, 0)$.



La longitud de los lados rectos es $LR = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(9)}{4} = \dfrac{9}{2}$ la mitad de esto es 9/4 que es la medida del lado recto del foco hacia arriba y del foco hacia abajo.



y las coordenadas de los extremos de los lados rectos son $L_1\ (-\sqrt{7}, 9/4)$, $R_1\ (-\sqrt{7}, -9/4)$, $L_2\ (\sqrt{7}, 9/4)$, $R_2\ (\sqrt{7}, -9/4)$ y su gráfica es



Resumiendo toda la información de esta elipse, se tiene:

$C\ (0, 0)$, $V_1\ (-4, 0)$ $F_1\ (-\sqrt{7}, 0)$ $B_1\ (0, 3)$, $L_1\ (-\sqrt{7}, 9/4)$, $L_2\ (\sqrt{7}, 9/4)$
$V_2\ (4, 0)$ $F_2\ (\sqrt{7}, 0)$ $B_2\ (0, -3)$, $R_1\ (-\sqrt{7}, -9/4)$, $R_2\ (\sqrt{7}, -9/4)$

Longitud eje mayor = 8
Longitud eje menor = 6
Dominio = $[-4, 4]$; imagen $[-3, 3]$

Ecuación de la elipse: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Trasladando los ejes de la misma forma que lo hicimos con la parábola y de tal manera que el origen se traslade al punto (h, k), podemos obtener la ecuación de una elipse con centro en (h, k).

Teorema 3.

La elipse con centro en (h, k) cuya distancia focal es $2c$ y cuyo eje mayor es horizontal y de longitud $2a$, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$.

Teorema 4.

La elipse con centro en (h, k) cuya distancia focal es $2c$ y cuyo eje mayor es vertical, de longitud $2a$, tiene como ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

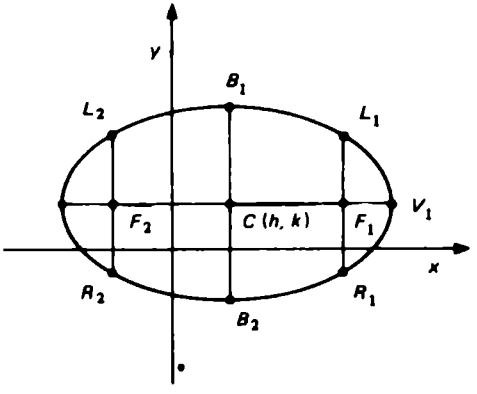
donde $b^2 = a^2 - c^2$.

Haciendo un análisis en las respectivas gráficas de la elipse con centro (h, k) obtenemos que para la elipse horizontal, cuya ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

sus datos están dados de la siguiente manera:

$C\,(h,k)$
$V_1\ (h+a,\ k)$, $V_2\ (h-a,\ k)$
$F_1\ (h+c,\ k)$, $F_2\ (h-c\ ,\ k)$
$B_1\ (h,\ k+b)$, $B_2\ (h\ ,\ k-b)$
$L_1\ (h+c,\ k + b^2/a)$, $R_1\ (h+c,\ k - b^2/a)$
$L_2\ (h-c\ k + b^2/a)$, $R_2\ (h-c,\ k - b^2/a)$
Dominio: $[\ h-a\ ,\ h+a\ ]$
Imagen : $[\ k-b,\ k+b\ ]$



Si la elipse es vertical, su ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

y sus datos están dados de la siguiente manera:

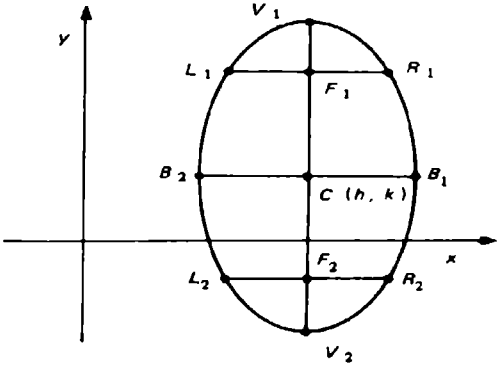
$C\,(h,\ k)$
$V_1\ (h,\ k+a)\ ,\ V_2\ (h,\ k-a)$
$F_1\ (h,\ k+c)\ ,\ F_2\ (h,\ k-c)$
$B_1\ (h+b,\ k)\ ,\ B_2\ (h-b,\ k)$

$$L_1\ \left(h + \frac{b^2}{a}\ ,\ k+c\right),\ R_1\ \left(h - \frac{b^2}{a}\ ,\ k+c\right)$$

$$L_2\,(h + \frac{b^2}{a}, k - c), R_2\,(h - \frac{b^2}{a}, k - c)$$

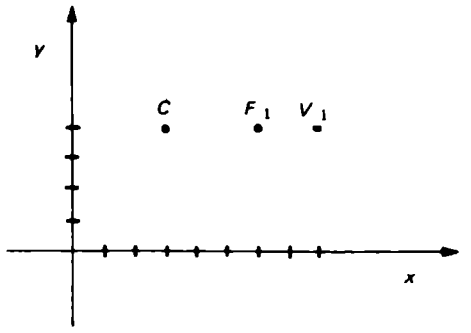
Dominio = $[\ h-b,\ h+b\ ]$

Imagen = $[\ k-a,\ k+a\ ]$



Ejemplos.

5. Hallar la ecuación de la elipse con centro en $C\,(3,4)$, un vértice en $V_1\ (8,4)$ y un foco $F_1\ (6;4)$.



Como la distancia del centro al foco es el valor de c, tenemos que $c = 3$, además, como la distancia del centro al vértice es a, $a = 5$. y como $b^2 = a^2 - c^2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} b^2 &= 25 - 9 \\ b^2 &= 16 \\ b &= 4 \end{aligned}$$

De la gráfica observamos que la elipse es horizontal y su ecuación es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

así, la ecuación de la elipse deseada es:

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$$

6. Si la ecuación de una elipse es:

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

Encontrar todos sus datos y graficar.

De la ecuación dada, observamos que es una elipse vertical puesto que la cantidad mayor está sobre $(y - 3)^2$. Así tenemos que:

$a^2 = 16$, $b^2 = 4$ y $c^2 = 12$

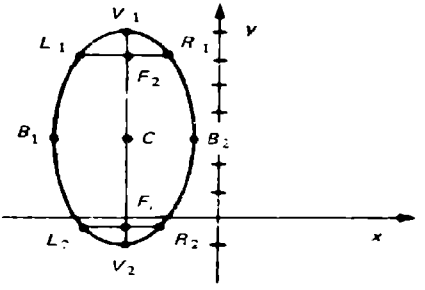
o $a = 4$ $b = 2$ y $c = 2\sqrt{3}$

y sus datos son:

$C(-3, 3)$
$V_1(-3, 7)$, $V_2(-3, -1)$
$F_1(-3, 3 + 2\sqrt{3})$, $F_2(-3, 3 - 2\sqrt{3})$

$$LR = \frac{2b^2}{a} = 2$$

$L_1(-4, 3 + 2\sqrt{3})$, $R_1(-2, 3 + 2\sqrt{3})$
$L_2(-4, 3 - 2\sqrt{3})$, $R_2(-2, 3 - 2\sqrt{3})$



Consideremos la ecuación $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ y desarrollemos ambos binomios:

$$\frac{x^2 - 2xh + h^2}{a^2} + \frac{y^2 - 2yk + k^2}{b^2} = 1$$

Multiplicando por $a^2 b^2$ ambos términos y ordenando, obtenemos:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2b^2 hx - 2a^2 ky + b^2 h^2 + a^2 k^2 - a^2 b^2 = 0$$

Si $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2 h$, $E = -2a^2 k$ y $F = b^2 h^2 + a^2 k^2 - a^2 b^2$ la ecuación se convierte en:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Aquí, A y C deben tener el mismo signo.
De manera similar, si partimos de la fórmula:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

la ecuación se convierte en:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Observación. Dada la ecuación de una elipse horizontal o vertical se puede reducir a la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $AC > 0$. Esta es llamada la ecuación general de una elipse.

Recíprocamente, $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $AC > 0$ y $A \neq C$, se puede reducir:

$$Ax^2 + Dx + Cy^2 + Ey = -F$$

$$A\ (x^2+\frac{D}{A}x+\qquad)+C(y^2+\frac{E}{C}y+\qquad)=-F$$

$$A\ (x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2})+C(y^2+\frac{E}{C}y+\frac{E^2}{4C^2})=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F$$

$$A\ (x + D/2A)^2 + C(y + E/2C)^2 = M$$

donde $M=\dfrac{D^2}{4A}+\dfrac{E^2}{4C}-F$

y dividiendo entre M, tenemos:

$$\frac{A(x+D/2A)^2}{M}+\frac{C(y+E/2C)^2}{M}=1$$

y su equivalente:

$$\frac{(x+D/2A)^2}{M/A}+\frac{(y+E/2C)^2}{M/C}=1$$

Teorema 5.

La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ reducida a la forma:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = M$$

donde $M = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$, representa:

a) Una elipse con centro en $\left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2C}\right)$ si $M > 0$.

b) El punto $\left(\frac{D}{2A}, \frac{-E}{2C}\right)$ si $M = 0$.

c) El conjunto vacío si $M < 0$.

Ejemplos.

7. Graficar la elipse cuya ecuación es:

$$25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0.$$

$$(25x^2 - 50x) + (9y^2 + 36y) = 164$$
$$25(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = 164 + 25 + 36$$
$$25(x - 1)^2 + 9(y + 2)^2 = 225$$
$$\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{25} = 1$$

Observamos que es una elipse vertical con $C(1, -2)$.

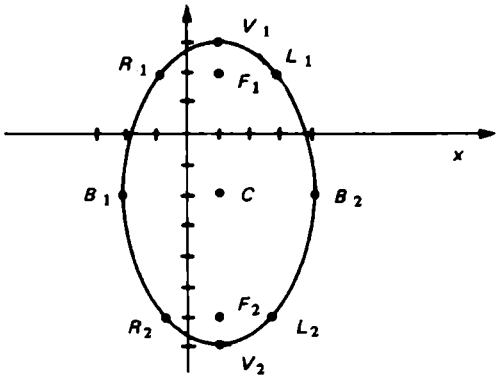
$a = 5$, $b = 3$ y $c = 4$

$C(1, -2)$
$V_1(1, 3)$, $V_2(1, -7)$
$F_1(1, 2)$, $F_2(1, -6)$

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5}$$

$$L_1\left(2\ \frac{4}{5}\ ,\ 2\right), \quad R_1\ (-4/5\ ,\ 2)$$

$$L_2\left(2\ \frac{4}{5}\ ,-6\right), \quad R_2\ (-4/5, -6)$$



8. Determinar si la gráfica de la ecuación $x^2 + 5y^2 + 2x - 20y + 31 = 0$ es una elipse, un punto o el conjunto vacío:

$$\begin{aligned} x^2 + 5y^2 + 2x - 20y - 31 &= 0 \\ (x^2 + 2x) + (5y^2 - 20y) &= -31 \\ (x^2 + 2x + 1) + 5(y^2 - 4y + 4) &= -31 + 1 + 20 \\ (x + 1)^2 + 5(y - 2)^2 &= -10 \end{aligned}$$

Por lo que la gráfica de la ecuación es el conjunto vacío.

9. Determinar si la gráfica de $16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0$ es una elipse, un punto o el conjunto vacío.

$$\begin{aligned} (16x^2 - 32x) + (25y^2 - 100y) &= 284 \\ 16(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 - 4y + 4) &= 284 + 16 + 100 \\ 16(x - 1)^2 + 25(y - 2)^2 &= 400 \end{aligned}$$

Por lo que la gráfica de la ecuación es una elipse, cuya ecuación reducida es:

$$\frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1$$

10. Determinar si la gráfica de $x^2 + 3y^2 - x + 6y + \frac{13}{4} = 0$ es una elipse, un punto o el conjunto vacío.

$$(x^2 - x) + (3y^2 + 6y) = -\frac{13}{4}$$

$$(x^2 - x + 1/4) + 3(y^2 + 2y + 1) = -\frac{13}{4} + \frac{1}{4} + 3$$

$$(x - 1/2)^2 + 3(y + 1)^2 = 0$$

Por lo que la gráfica de la ecuación es el punto $(1/2, -1)$.

Ejercicios.

1. En los ejercicios siguientes, hallar la ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

   a) $C(2, -1)$, eje menor mide 6 y un vértice en $(-3, -1)$.
   b) $C(0,0)$ lado recto mide 9, y uno de los extremos del eje menor es $(-3\sqrt{3}, 0)$.
   c) $C(0,0)$, eje menor mide 4 y un foco en $(0, \sqrt{5})$.
   d) El eje mayor mide 10, el eje focal es paralelo al eje x, la curva pasa por el punto $(-5, 7)$ y su centro es $(-5, 3)$.
   e) $C(0,0)$, $V_1(-3, 0)$ y la curva pasa por el punto $(1, \frac{4\sqrt{2}}{3})$.
   f) $C(-2, -3)$, $V(-2, -16)$ y los extremos de un lado recto son $(-1/13, 9)$ y $(-51/13, 9)$.
   g) $C(0,0)$, el eje mayor mide 10 y el eje menor mide 8 y es vertical.
   h) $C(3, -2)$, el eje menor mide 6 y longitud del lado recto es 18/5 y es horizontal.
   i) $C(0,0)$, el eje mayor coincide con el eje y y pasa por los puntos $(2, \sqrt{\frac{92}{3}})$ y $(21, -\sqrt{\frac{92}{3}})$.
   j) $C(4, -1)$, $F_1(1, -1)$ y pasa por el punto $(8,0)$.
   k) $V_1(-1, 3)$, $V_2(5, 3)$ y la longitud del eje menor es 4.
   l) $V_1(1, -6)$, $V_2(9, -6)$ y la longitud de cada lado recto es 9/2.

2. En cada uno de los siguientes ejercicios se da la ecuación de una elipse, determinar su centro, vértices, focos, puntos extremos del eje menor, longitud del lado recto, extremo de los lados rectos y graficar.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{289} = 1$

c) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

d) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

e) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$

f) $144y^2 + 169x^2 = 24336$

g) $4x^2 + 9y^2 = 36$

h) $100x^2 + 36y^2 = 3600$

i) $3x^2 + 5y^2 = 15$

j) $16y^2 + 25x^2 = 400$

k) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1/2)^2}{9} = 1$

l) $\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

m) $\frac{(x-1)^2}{17^2} + \frac{(y+3)^2}{15^2} = 1$

n) $\frac{(x+4)^2}{12} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$

ñ) $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1$

o) $25\,(y-7)^2 + 49\,(x+2)^2 = 1225$

p) $64\,(x+1/2)^2 + 81\,(y+3)^2 = 5184$

q) $4(y-1/3)^2 + 25\,(x-2)^2 = 100$

r) $36\,(y+5)^2 + 49\,(x-3)^2 = 1764$

s) $15^2\,(y-1/2)^2 + 17^2\,(x-1/2)^2 = 65{,}025$

3. Determine si la ecuación es una elipse, un punto o el conjunto vacío. Si es una elipse, dar sus datos y graficarla.

a) $x^2 + 2y^2 - 2x + 12y + 19 = 0$

b) $x^2 + 4y^2 - 4x + 4y - 11 = 0$

c) $9x^2 + 25y^2 - 18x - 250y + 409 = 0$

d) $3y^2 + x^2 + 12y - 2x + 15 = 0$

e) $16y^2 + 9x^2 + 96y - 180x + 900 = 0$

f) $3x^2 + y^2 + 18x + 4y + 31 = 0$

g) $480x^2 + 32y^2 - 48y + 594 = 0$

h) $4x^2 + y^2 - 4x^2 - 2y^2 + 2 = 0$

i) $4x^2 + 3y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

j) $x^2 + 4y^2 - 4x + 4y + 5 = 0$

k) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 76 = 0$

l) $500x^2 + 54y + 10{,}800x + 252y + 2562 = 0$

m) $3x^2 + 2y^2 - 24x + 12y + 60 = 0$

n) $4x^2 + 8y^2 + 4x + 24y - 13 = 0$

ñ) $5x^2 + 4y^2 - 30x - 4y + 46 = 0$

4. Graficar las siguientes relaciones:

a) $\{ (x,y) \mid 2x^2 + y^2 \leqslant 2 \}$

b) $\{ (x,y) \mid 2x^2 + y^2 \geqslant 2 \}$

c) $\{ (x,y) \mid 2x^2 + y^2 \leqslant 2 \text{ y } y > x - 1 \}$

d) $\{ (x,y) \mid 4x^2 + 25y^2 \geqslant 10 \text{ y } x^2 + y^2 \leqslant 25 \}$

e) $\{ (x,y) \mid x^2 + 36y^2 - 2x + 72y + 1 \leqslant 0 \text{ ó } y^2 \geqslant 16x \}$

f) $\{ (x,y) \mid 81x^2 + 4y^2 \geqslant 324 \text{ y } x^2 + 144y^2 \leqslant 144 \}$

g) $\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 16 \text{ , y } y^2 \geqslant 36x \text{ y } 36x^2 + 4y^2 \leqslant 144 \}$

Sección 10.6

HIPÉRBOLA

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir hipérbola.
2. A partir de la definición de hipérbola, deducir y graficar las hipérbolas que tienen por ecuación:

a) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$b)\ \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

3. Definir y encontrar las ecuaciones de las asíntotas.
4. A partir de datos suficientes, encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen.
5. Dada la ecuación de una hipérbola con centro en el origen, encontrar sus datos y graficar.
6. Utilizando la traslación de ejes, deducir las siguientes ecuaciones:

$$a)\ \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$b)\ \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

7. A partir de la ecuación reducida de la hipérbola, deducir su ecuación general.
8. Dada la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + C = 0$, decir cuando:

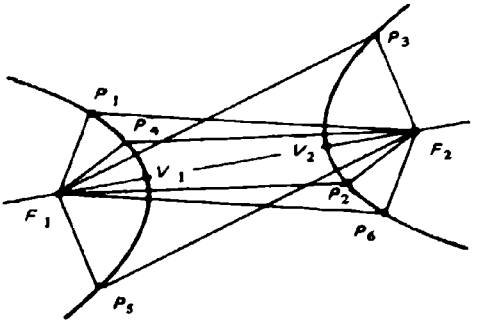
   a) Es hipérbola.
   b) Son dos rectas.

9. A partir de datos suficientes, encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en (h, k) y graficarla, especificando su dominio y su imagen.
10. A partir de la ecuación general de la hipérbola, encontrar sus datos y graficarla.
11. Encontrar el conjunto solución de desigualdades que involucren rectas y/o circunferencias y/o parábolas y/o elipses y/o hipérbolas.

Definición. Sean F_1 y F_2 dos puntos fijos y sea $2a$ un número positivo, la hipérbola es el conjunto de puntos en R^2, tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a F_1 F_2 es igual a $2a$.

$$\text{Hipérbola} = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid |\, d(P, F_1), -d(P_1, F_2) \,| = 2a \}$$
$$= \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid |\, |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| \,| = 2a \}$$

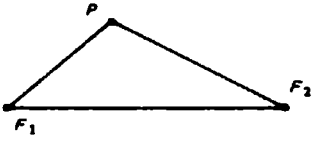
De acuerdo a la definición de hipérbola y tal como se ilustra en la siguiente gráfica,



nos damos cuenta que:

$P_1 \in$ Hipérbola si y sólo si $\left|\,|\overline{P_1F_1}| - |\overline{P_1F_2}|\,\right| = 2a$
$P_2 \in$ Hipérbola si y sólo si $\left|\,|\overline{P_2F_1}| - |\overline{P_2F_2}|\,\right| = 2a$
$P_3 \in$ Hipérbola si y sólo si $\left|\,|\overline{P_3F_1}| - |\overline{P_3F_2}|\,\right| = 2a$
$V_1 \in$ Hipérbola si y sólo si $\left|\,|\overline{V_1F_1}| - |\overline{V_1F_2}|\,\right| = 2a$
$V_2 \in$ Hipérbola si y sólo si $\left|\,|\overline{V_2F_1}| - |\overline{V_2F_2}|\,\right| = 2a$
etc.

A los puntos F_1 y F_2 los llamaremos focos de la hipérbola; representaremos a la distancia entre los focos por $2c$: $|\overline{F_1F_2}| = d(F_1F_2) = 2c$. Si formamos el triángulo F_1PF_2, donde P es un punto de la hipérbola, nos damos cuenta que $2c$ es la distancia de un lado de este triángulo, mientras que $2a$ es la diferencia de los otros dos, entonces: $2a < 2c$, o sea, $a < c$.



A la recta que pasa por los focos F_1 y F_2 la llamaremos *eje focal*; los puntos donde la hipérbola corta al eje focal los denotamos por V_1 y V_2 y

los llamamos los *vértices* de la hipérbola; al segmento $V_1\ V_2$ lo llamamos *eje transverso;* el *centro* es el punto medio del eje transverso.

Para establecer la ecuación de la hipérbola, consideramos una hipérbola con centro en $C\ (0,0)$ y con eje focal coincidiendo con el eje x. Así es que $F_1\ (c, 0)$ y $F_2\ (-c, 0)$.

Sea $P\ (x,y)$ un punto en R^2 que pertenece a la hipérbola, es decir:

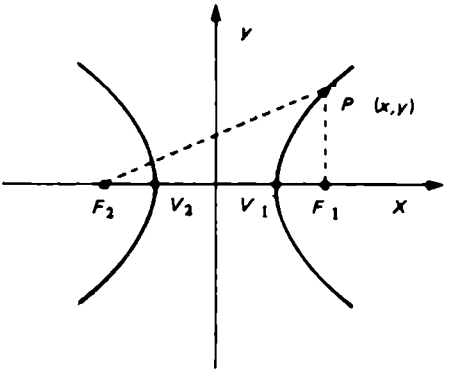
$$\left|\ |\overline{PF_1}\ | - |\overline{PF_2}\ |\ \right| = 2a, \text{ equivalentemente,}$$

$$|\ PF_1\ | - |PF_2\ | = \pm\ 2a$$

Ahora:

$$|\overline{PF_1}\ | = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$|\overline{PF_2}\ | = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$



Así tenemos que:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm\ 2a.$$

En forma similar a como lo hicimos en la elipse, podemos reducir esta ecuación y obtenemos:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2\ y^2 = a^2\ (c^2 - a^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

de donde $c > a$, $c^2 > a^2$ y $(c^2 - a^2) > 0$. Llamamos b^2 a esta diferencia, es decir, $b^2 = c^2 - a^2$ y obtenemos la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Teorema 1.

La hipérbola de foco F_1 $(c, 0)$ y F_2 $(-c, 0)$, donde $2a$ es el valor absoluto de la diferencia de las distancias de un punto cualquiera de ella a ambos focos, tiene por ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$ y es llamada hipérbola horizontal.

Las coordenadas de los vértices las obtenemos al sustituir $y = 0$ en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ ó } x^2 = a^2$$

equivalentemente: $x = \pm a$.

Entonces, las coordenadas de los vértices son: V_1 $(a, 0)$, V_2 $(-a, 0)$ y $2a$ es la longitud del eje transverso.

La gráfica de la hipérbola cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, no corta al eje de las y, puesto que si hacemos $x = 0$, obtenemos:

$$\frac{-y^2}{b^2} = 1, \text{ o sea: } -y^2 = b^2$$

que no tiene solución en los reales.

Para obtener los extremos del lado recto, sustituimos $x = c$ ó $x = -c$ en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{-y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$\frac{-y^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(c^2 - a^2)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(b^2)$$

$$y = \pm \frac{b^2}{a}$$

Entonces las coordenadas de los extremos de uno de los lados rectos son:

$$L_1 \left(c, \frac{b^2}{a}\right) \text{ y } R_1 \left(c, \frac{-b^2}{a}\right)$$

Y al sustituir $x = -c$, obtenemos las coordenadas del otro extremo;

$$L_2 \left(-c, \frac{b^2}{a}\right) \text{ y } R_2 \left(-c, \frac{-b^2}{a}\right)$$

Es claro que la longitud de cada uno de los lados rectos es: $LR = \frac{2b^2}{a}$

Ahora determinaremos el dominio y la imagen de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Despejamos y para obtener $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, entonces $x^2 - a^2$ no puede tomar valores negativos, esto es, $x^2 - a^2 \geqslant 0$. El conjunto solución de esta desigualdad es $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$. Entonces, el dominio de la hipérbola con ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ es } (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$$

Al despejar x obtenemos: $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$ de donde concluimos que la imagen de la hipérbola es $(-\infty, \infty)$.

De manera semejante, podemos obtener la ecuación de la hipérbola con eje transverso en el eje de las y.

Teorema 2.

> La ecuación de la hipérbola con focos $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$, donde $2a$ es el valor absoluto de la diferencia de las distancias de un punto cualquiera de ella a ambos focos tiene por ecuación:
>
> $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$
>
> donde $b^2 = c^2 - a^2$ y es llamada hipérbola vertical.

Para la hipérbola de ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ tenemos:

Vértices: $V_1(0, a)$, $V_2(0, -a)$

Longitud del eje transverso: $2a$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}$

Extremos de los lados rectos: $L_1\left(\frac{b^2}{a}, c\right)$, $R_1\left(\frac{-b^2}{a}, c\right)$

$L_2\left(\frac{b^2}{a}, -c\right)$, $R_2\left(\frac{-b^2}{a}, -c\right)$

Dominio: $(-\infty, \infty)$
Imagen: $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$

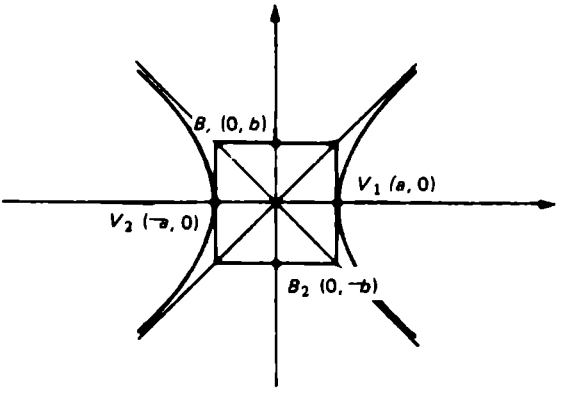
Observación. El segmento que une los puntos $B_1(0, b)$ y $B_2(0, -b)$ en la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se llama eje conjugado o imaginario. Aunque el eje conjugado no tiene puntos en común con la hipérbola, existe cierta relación con ésta.

Asíntotas de una hipérbola

Una hipérbola tiene asociadas un par de rectas que guardan una relación importante al graficarla. Consideremos la hipérbola de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

y tracemos las diagonales del rectángulo que aparece en la siguiente figura:



Se puede probar que las ecuaciones de estas diagonales son:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = \frac{-b}{a}x$$

que son llamadas las asíntotas de la hipérbola. Éstas tienen la propiedad de que la distancia de un punto $P(x, y)$ de la hipérbola a una de estas rectas se puede hacer tan pequeña como se desee con tal de tomar la abscisa x del punto suficientemente grande o suficientemente pequeña.

De una manera semejante se puede probar que para la hipérbola vertical de ecuación:

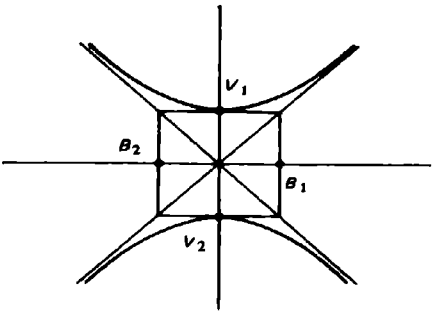
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

las ecuaciones de sus asíntotas son:

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y = \frac{-a}{b}x$$

y los extremos del eje conjugado son:

$$B_1\ (b, 0)\ \ ;\ \ B_2\ (-b, 0)$$



Para dibujar una hipérbola dada la ecuación, primero trazamos las asíntotas, localizamos los vértices y los extremos de los lados rectos y unimos estos puntos con un trazo continuo guiándonos por las asíntotas, las cuales nunca se encuentran con la curva, pero a las cuales la curva se acerca cuando sus ramas se prolongan.

> Si las asíntotas son perpendiculares entre sí, la hipérbola se llama hipérbola *equilátera*.

Supongamos que la hipérbola con ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ es una hipérbola equilátera. Entonces las pendientes de las asíntotas cuyas ecuaciones son: $y = \frac{b}{a}x$ y $y = \frac{-b}{a}x$ son tales que $m_1\ m_2 = -1$ y por consiguiente, $\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{-b}{a}\right) = -1$, o sea: $b^2 = a^2$, de donde concluimos que $b = a$.

Entonces la ecuación toma la forma: $x^2 - y^2 = a^2$.

Observaciones.

a) Una manera de distinguir las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola horizontal de las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola vertical es:

i) Hipérbola horizontal:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

ii) Hipérbola vertical:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$$

$$\frac{y^2}{a^2} = \frac{x^2}{b^2}$$

$$y^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2}$$

$$y = \pm \frac{a}{b} x$$

b) Tanto en la ecuación de la hipérbola horizontal como en la de la vertical intervienen las variables a, b y c, que representan:

a = distancia del centro al vértice.
c = distancia del centro al foco.
b = no tiene ninguna interpretación geométrica y es auxiliar para obtener las asíntotas y los lados rectos.

c) La ecuación de una hipérbola siempre toma una de las siguientes formas:

$$\frac{x^2}{A} - \frac{y^2}{B} = 1 \qquad \text{ó} \qquad \frac{y^2}{A} - \frac{x^2}{B} = 1$$

Para distinguir si la ecuación de la hipérbola dada es horizontal o vertical basta con observar el signo que antecede a la variable x, si

éste es positivo será una hipérbola horizontal y si es negativo, será vertical. Los valores de los denominadores no bastan para distinguir si la hipérbola es horizontal o vertical, ya que puede suceder que:

i) $A > B$
ii) $A < B$
iii) $A = B$

Ejemplo.

1. Construir la gráfica de la hipérbola de ecuación:

$$16x^2 - 20y^2 = 320.$$

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Ya que el signo que antecede a la variable x es positivo, es una hipérbola horizontal, de donde:

$$a^2 = 20, \qquad b^2 = 16$$
$$a = 2\sqrt{5}, \qquad b = 4$$

Además, puesto que $b^2 = c^2 - a^2$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 20 + 16$$
$$c^2 = 36$$
$$c = 6$$

$C\,(0,0)$
$V_1\,(2\sqrt{5}, 0)$, $V_2\,(-2\sqrt{5}, 0)$
$F_1\,(6, 0)$, $F_2\,(-6, 0)$

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(16)}{2\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$

$$L_1\left(6, \frac{8}{5}\sqrt{5}\right), \qquad R_1\left(6, \frac{8}{5}\sqrt{5}\right)$$

$$L_2\left(-6, \frac{8}{5}\sqrt{5}\right), \qquad R_2\left(-6, -\frac{8}{5}\sqrt{5}\right)$$

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 0$$

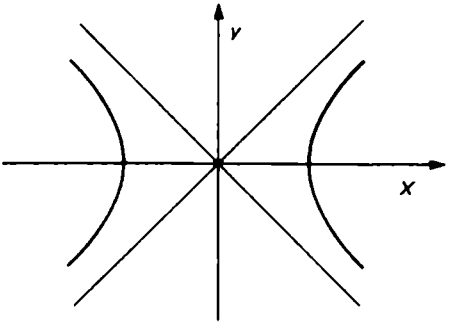
$$\frac{x^2}{20} = \frac{y^2}{16}$$

$$y^2 = \frac{16x^2}{20}$$

$$y = \pm \frac{4}{2\sqrt{5}}\, x$$

$$= \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}\, x$$

Asíntotas: $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}\, x$



Si el centro de la hipérbola está en el punto $C(h,k)$, trasladamos el origen a C y obtenemos los siguientes resultados:

Teorema 3.

La hipérbola con centro en $C(h, k)$, donde $2a$ es el valor absoluto de la diferencia de las distancias de un punto cualquiera de ella a ambos focos y eje transverso horizontal tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$

y las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \frac{b}{a}(x - h) + k \text{ y } y = -\frac{b}{a}(x-h) + k$$

Teorema 4.

La hipérbola con centro en $C(h, k)$, donde $2a$ es el valor absoluto de la diferencia de las distancias de un punto cualquiera de ella a ambos focos y eje transverso vertical tiene por ecuación:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(6x-h)^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$

y las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \frac{b}{a}(x-h) + k \text{ y } y = \frac{-a}{b}(x-h) + k$$

Ejemplo.

2. Dibujar la gráfica de la ecuación $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{12} = 1$ y dar todos sus datos.

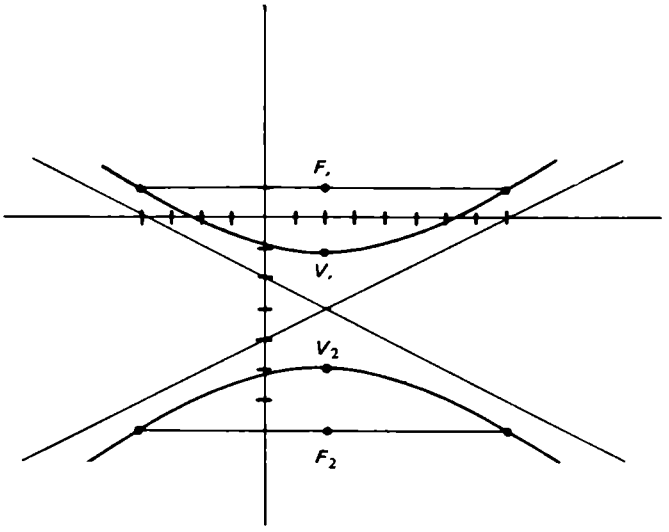
De la ecuación: $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{12} = 1$, concluimos que es una hipérbola vertical con:

$a = 2, b = 2\sqrt{3}$, $c = 4$ y el centro está en $C(2, -3)$.

Además, $V_1 = (2, -1)$ y $V_2\ (2, -5)$.
Los focos son: $F_1\ (2, 1)$ y $F_2\ (2, -7)$.
La longitud del lado recto es: 12.
Los extremos del lado recto son: $L_1\ (8, 1), R_1\ (-4, 1)$
$L_2\ (8, -7), R_2\ (-4, -7)$.

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{3} - 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad y = \frac{-x}{\sqrt{3}} - 3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



Estableceremos ahora la ecuación general de la hipérbola desarrollando las ecuaciones:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

ó

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Teorema 5.

Sea $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A\,C < 0$, una ecuación que puede escribirse en forma equivalente como:

$$A\,(x + \frac{D}{2A})^2 + C\,(y + \frac{E}{2C})^2 = M, \text{ donde}$$

$$M = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

entonces:

1. Si $M = 0$, la gráfica está formada por dos rectas que se cortan.
2. Si $M \neq 0$, la gráfica es una hipérbola con centro en:

$$(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2C}$$

Su eje transverso es horizontal si M/A es positivo y M/C es negativo y vertical en caso contrario.

Ejemplos.

3. Determine el lugar geométrico que representa la ecuación $5x^2 - 4y^2 - 20x - 24y + 4 = 0$

Completando cuadrados:

$$(5x^2 - 20x\ ) - (4y^2 + 24y\ ) = -4$$
$$5(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 + 6y + 9) = -4 + 20 - 36$$
$$5(x-2)^2 - 4(y + 3)^2 = -20$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{5} = -1$$

$$\frac{(y+3)^2}{5} - \frac{(x-2)^2}{4} = +1$$

que es la ecuación de una hipérbola cuyas asíntotas son:

$$y + 3 = \frac{\sqrt{5}}{2}(x-2) \quad \text{y} \quad y + 3 = \frac{-\sqrt{5}}{2}(x-2)$$

4. Determine el lugar geométrico que representa la ecuación

$$4y^2 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$4y^2 - (x^2 - 2x + 1) = 1 - 1$$
$$4y^2 - (x-1)^2 = 0$$

que representa el par de rectas de ecuaciones.

$$x + 2y - 1 = 0 \quad \text{y} \quad x - 2y - 1 = 0$$

Ejercicios.

1. En los ejercicios siguientes, escribir la ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas:

a) $C(0,0)$, $V_1(2,0)$ y eje conjugado = 6.
b) $C(-1,-2)$, $F_1(-9,-2)$ y $V_1(5,-2)$

c) $C\ (0, 0)$, $V_1\ (6, 0)$ y la ecuación de una de sus asíntotas es: $4x - 3y = 0$.

d) $C\ (0, 0)$, $V\ (-3, 0)$ y $LR = 8/3$

e) Extremos del eje conjugado $(6, 3)$, $(-4, 3)$ y $V\ (1, 10)$.

f) $V_1\ (11, 2)$, $F_1\ (12, 2)$ y extremo del eje conjugado $(7, 5)$.

g) Pasa por el punto $(4, 6)$, las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm \sqrt{3}x$ y su eje focal es horizontal con centro en el origen.

h) $C\ (0, 0)$, el eje transverso es horizontal y de longitud 4, distancia focal $2\sqrt{13}$.

i) $F_1\ (13, 0)$, $C\ (0, 0)$, asíntotas $y = \pm \frac{5}{12}x$ y uno de sus vértices es el punto $(-8, 0)$.

j) El extremo del eje conjugado es $(3, 0)$, la longitud del lado recto es 10 y el centro está en el origen.

k) $C\ (2, -1)$, eje transverso 8 y una de las ecuaciones de las asíntotas es $y + 1 = 3/4\ (x - 2)$.

l) $F_1\ (\sqrt{61}, 5)$, $F_2\ (-\sqrt{61}, 5)$ y un vértice en $(6, 5)$.

m) $C\ (2, -1)$, $LR = 9/2$ y $V_1\ (6, -1)$.

n) El eje conjugado es horizontal y mide 6, la curva pasa por $(-8, 3)$ y su centro está en el origen.

ñ) El eje transverso es vertical y pasa por los puntos $(1, -3 + \frac{12}{5}\sqrt{34})$ y $(1, -3 - \frac{12}{5}\sqrt{34})$.

o) El eje transverso es horizontal, pasa por los puntos $(3, \sqrt{2})$ y $(2\sqrt{3}, 2)$ y su centro está en el origen.

2. En las siguientes hipérbolas, hallar las coordenadas de los vértices, focos, extremos de los lados rectos, longitud del lado recto, centro, ecuaciones de las asíntotas y graficar.

a) $x^2 - y^2 = 36$

b) $y^2 - x^2 = 16$

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

d) $\frac{y^2}{20} - \frac{x^2}{16} = 1$

e) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

f) $3x^2 - 4y^2 = 48$

g) $5y^2 - 4x^2 = 20$

h) $10x^2 - 12y^2 = 120$

i) $21y^2 - 20x^2 = 420$

j) $64x^2 - 36y^2 = 2304$

k) $(x-1)^2 - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

l) $\dfrac{(x+2)^2}{20} - \dfrac{(y-6)^2}{36} = 1$

m) $\dfrac{(y-1/2)^2}{4} - \dfrac{(x+2)^2}{12} = 1$

n) $\dfrac{(y+10)^2}{25} - \dfrac{(x-5)^2}{4} = 1$

ñ) $\dfrac{(x+2/3)^2}{2} + \dfrac{(y+1/5)^2}{49} = 1$

o) $4(x+3)^2 - 1/4(y-1)^2 = 1$

p) $36(y-2)^2 - 16(x+2)^2 = 576$

q) $64(y+16)^2 - 24(x+16)^2 = 1{,}536$

r) $36(y-5)^2 - 36(x-5)^2 = 1{,}296$

s) $2(x-1/3)^2 - 4(y+2)^2 = 8$

3. En los ejercicios siguientes, determinar si la gráfica de la ecuación dada es una hipérbola o un par de rectas y si es hipérbola dar todos sus datos.

a) $3x^2 - 9y^2 - 6x + 36y - 60 = 0$

b) $4x^2 - 25y^2 - 8x + 50y - 21 = 0$

c) $25y^2 - 9x^2 - 150y - 90x - 225 = 0$

d) $2x^2 - 2y^2 + 4x - 40y - 198 = 0$

e) $16x^2 - 16y^2 - 16x - 8y - 61 = 0$

f) $8y^2 - 16x^2 + 96y + 96x + 144 = 0$

g) $4y^2 - 3x^2 - 96y - 18x + 537 = 0$

h) $2x^2 - 4y^2 + 12x + 4y + 17 = 0$

i) $3y^2 - 4x^2 + 54y + 16x + 215 = 0$

j) $144x^2 - 144y^2 - 96x + 72y + 7 = 0$

k) $16x^2 - 32y^2 + 8x - 32y - 39 = 0$

l) $4y^2 - 16x^2 - 96x + 16y - 128 = 0$

m) $9x^2 - 4y^2 - 18x + 96y - 603 = 0$

n) $12y^2 - 24y - 8x^2 - 80y - 188 = 0$

4. Graficar las siguientes relaciones:

a) $\{ (x,y) \mid 9y^2 - 4x^2 \leqslant 36 \}$
b) $\{ (x,y) \mid 9x^2 - 16(y-1)^2 \geqslant 144 \}$
c) $\{ (x,y) \mid 3x^2 - 4y^2 < 12 \}$
d) $\{ (x,y) \mid 9(x+2)^2 - 16y^2 > 144 \}$
e) $\{ (x,y) \mid 5y^2 - 9x^2 \leqslant 45 \text{ y } x + y \geqslant 1 \}$
f) $\{ (x,y) \mid 9x^2 - 16y^2 \geqslant 144 \text{ y } x^2 + y^2 \leqslant 16 \}$
g) $\{ (x,y) \mid 3y^2 - x^2 \leqslant 27 \text{ o } x^2 \geqslant 16x \}$
h) $\{ (x,y) \mid 100y^2 - 44x^2 \leqslant 275 \text{ o } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} \geqslant 1 \}$
i) $\{ (x,y) \mid 4x^2 - 45y^2 \geqslant 180 \text{ y } x^2 + y^2 \leqslant 49 \text{ y } x^2 \geqslant 8y \}$
j) $\{ (x,y) \mid 49x^2 - 16y^2 \leqslant 784 \text{ y } 25x^2 + 25y^2 = 100 \text{ y } 2x + y \geqslant 5 \}$

Sección 10.7

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Dada una lista de ecuaciones en la forma: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ clasificarlas en:

   a) Circunferencias
   b) Parábolas
   c) Elipses
   d) Hipérbolas

   y dar todos sus elementos en cada caso.

Al estudiar la recta concluimos que su ecuación era siempre una ecuación lineal o de primer grado. Inversamente una ecuación de primer grado siempre representa una línea recta.

No podemos decir lo mismo para una ecuación general de segundo grado que, como hemos visto, puede representar una circunferencia, una parábola, una elipse o una hipérbola. También recordamos que la ecuación de segundo grado puede representar los casos degenerados de un punto, conjunto vacío o un par de rectas que se cortan. Es conveniente que revisemos la ecuación general de segundo grado con el objeto de distinguir rápidamente el tipo de curva que puede representar.

Consideremos la ecuación general de segundo grado:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

1. Si $A = B$, la ecuación general toma la forma siguiente:

$$Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + E = 0$$

que puede representar una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.

2. *a*) Si $A \neq 0$, $C \neq 0$, y $B = 0$, la ecuación general se reduce a la forma:

$$Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$$

la cual es una parábola de eje paralelo al eje y.

b) Si $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, la ecuación general se reduce a la forma:

$$By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

la cual es una parábola de eje paralelo al eje x.

3. Si $AB > 0$ y $A \neq B$ (diferente y con el mismo signo) la ecuación:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

representa una elipse, un punto o el conjunto vacío.

4. Si $AB < 0$ (signos diferentes) la ecuación:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

representa una hipérbola o un par de rectas que se cortan.

Ejemplos.

Decir si la ecuación dada representa una circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, conjunto vacío, un punto o un par de rectas que se cortan:

1. $4y^2 - x^2 + 2x - 1 = 0$

Como los coeficientes de x^2 y y^2 son de signo contrario, esta ecuación representa una hipérbola o un par de rectas que se cortan.

$$\begin{aligned} 4y^2 - (x^2 - 2x + 1) &= 0 \\ 4y^2 - (x - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

que representan un par de rectas cuyas ecuaciones son:

$$x + 2y - 1 = 0 \quad \text{y} \quad -x - 2y - 1 = 0$$

2. $x^2 + y^2 + 14x - 10y + 26 = 0.$

Como los coeficientes de x^2 y y^2 son iguales, representa una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.

$$\begin{aligned} (x^2 + 14x + 49) + (y^2 - 10y + 25) &= -26 + 49 + 25 \\ (x + 7)^2 + (y - 5)^2 &= 48 \end{aligned}$$

que representa una circunferencia con centro en $(-7, 5)$ y $r = \sqrt{48}$.

3. $y^2 + 8x - 2y - 15 = 0$

Como el coeficiente de x^2 es cero y existe el término en x, representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje de las x.

$$\begin{aligned} y^2 - 2y &= -8x + 15 \\ y^2 - 2y + 1 &= -8x + 16 \\ (y - 1)^2 &= -8(x - 2) \end{aligned}$$

4. $x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 5 = 0$

Como los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes y del mismo signo representa una elipse, un punto o el conjunto vacío.

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 - 2y + 1) &= -5 + 1 + 5 \\ (x - 1)^2 + 4(y - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

que representa al punto (1,1).

5. $x^2 - 120y - 40 = 0$

Como el coeficiente de y^2 es 0 y puesto que el término en x existe, representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje y

$$x^2 = -20y + 40$$
$$x^2 = -20(y - 2)$$

6. $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 = 0$

Puede representar una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) = -34 + 9 + 25$$
$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 0$$

que es el punto $(3, -5)$

7. $16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y - 89 = 0$

Puede representar una hipérbola o un par de rectas que se cortan.

$$16(x^2 + 4x + 4) - 9(y^2 - 2y + 1) = 89 + 64 - 9$$
$$16(x + 2)^2 - 9(y - 1)^2 = 144$$

$$\frac{(x + 2)^2}{9} - \frac{(y - 1)^2}{16} = 144$$

que es una hipérbola horizontal de centro $(-2, 1)$.

8. $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 76 = 0$

Puede representar una elipse, un punto o el conjunto vacío.

$$9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 4) = -76 + 36 + 16$$
$$9(x - 2)^2 + 4(y - 2)^2 = -24$$

que representa el conjunto vacío.

9. $25x^2 + 9y^2 + 150x - 36y + 36 = 0$

Puede representar una elipse, un punto o el conjunto vacío.

$$25(x^2 + 6x + 9) + 9(y^2 - 4y + 4) = -36 + 225 + 36$$

$$25(x+3)^2 + 9(y-2)^2 = 225$$

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

que representa una elipse vertical con centro en $(-3, 2)$.

Ejercicios.

1. Clasifique las siguientes ecuaciones de segundo grado según sea circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, conjunto vacío, un punto o un par de rectas que se cortan.

a) $12x^2 + 9y^2 - 24x - 6y + 101 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 12y - 4x + 21 = 0$

d) $3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0$

e) $x^2 + 16y - 2x + 1 = 0$

f) $y^2 - 18y - 4x + 73 = 0$

g) $x^2 - y^2 - 8x + 4y + 20 = 0$

h) $5y^2 - 3x^2 - 10y + 12x - 7 = 0$

i) $3x^2 + 3y^2 + 18y + 27 = 0$

j) $8x^2 + 12y^2 - 8x - 12y + 5 = 0$

k) $x^2 + 2y^2 - 24x - 20y + 274 = 0$

l) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

m) $2y^2 - x^2 + 4y + 2x + 1 = 0$

n) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$

ñ) $2x^2 + 5y^2 + 40x + 50y + 325 = 0$

o) $16x^2 + 2y^2 - 8x + 1 = 0$

p) $16x^2 - 9y^2 - 192x + 54y + 851 = 0$

q) $3y^2 + 5x^2 - 54y - 120x + 964 = 0$

r) $252x^2 + 294y^2 - 84x - 84y + 55 = 0$

s) $9x^2 + 9y^2 - 6x - 6y + 5 = 0$

t) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 59 = 0$

u) $y^2 - 8x + 4 = 0$

v) $4x^2 - 2y - 4x + 11 = 0$

w) $x^2 + y^2 + 24x + 20y + 243 = 0$

x) $2y^2 - 20y - 2x + 201 = 0$

y) $x^2 + 12y - 24x + 136 = 0$

z) $2x^2 + 3y^2 - 4x - 18y + 27 = 0$

a') $3x^2 + 2y^2 - 30x + 36y + 236 = 0$

b') $x^2 + y^2 - 16x + 2y + 40 = 0$

c') $y^2 - x^2 + 4y - 8x + 20 = 0$

Sección 10.8

EXCENTRICIDAD DE UNA CÓNICA

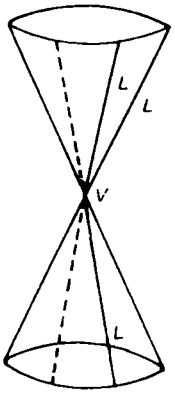
Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir cónica
2. Definir excentricidad de una cónica.
3. Obtener la excentricidad de una cónica.

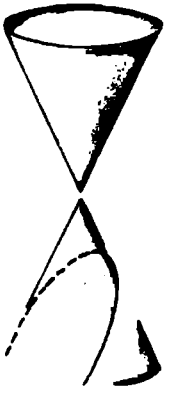
Hemos estudiado la ecuación general de segundo grado la cual según sea el caso representa una circunferencia, parábola, elipse o hipérbola. Casos particulares de la ecuación pueden representar un punto, el conjunto vacío o un par de rectas.

Las cuatro figuras antes mencionadas se obtienen al intersectar planos con un cono circular recto de dos hojas.



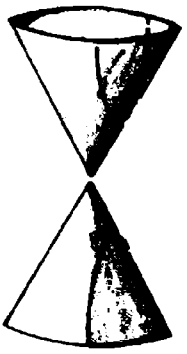
V – vértice
L – una recta generadora

CONO CIRCULAR
RECTO DE DOS HOJAS



La intersección de un plano paralelo a una y sólo una recta generadora da lugar a una PARÁBOLA.

La intersección de un plano que no sea paralelo a ninguna recta generadora da lugar a una ELIPSE.

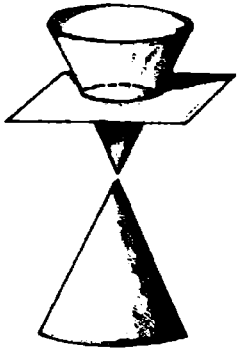


La intersección de un plano que es paralelo a dos rectas generadoras (el plano corta a las dos hojas del cono) da lugar a una HIPÉRBOLA.

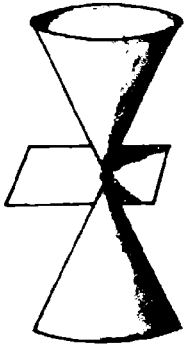
Observaciones

Los siguientes son casos especiales:

A. De la elipse.

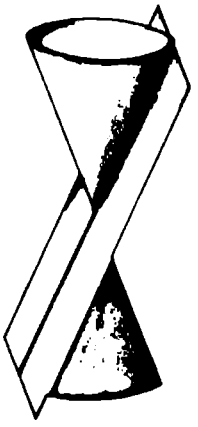


La intersección de un plano pararelo a la base del cono da lugar a una CIRCUNFERENCIA. (Este plano no es paralelo a ninguna recta generadora).



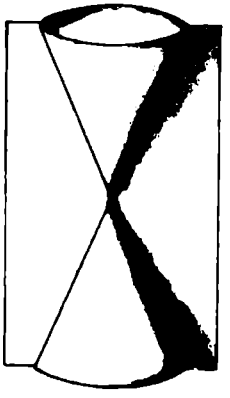
La intersección de un plano paralelo a la base del cono que pase por el vértice da lugar a un PUNTO.

B. De la parábola



La intersección de un plano paralelo a una y sólo una recta generadora que contiene al vértice da lugar a una RECTA.

C. De la hipérbola

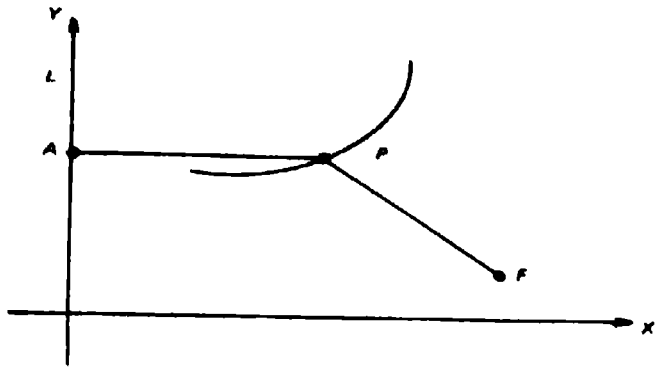


La intersección de un plano que es paralelo a dos rectas generadoras y que contiene al vértice da lugar a DOS RECTAS QUE SE INTERSECTAN

Esta situación geométrica motiva a llamar SECCIÓN CÓNICA a las figuras obtenidas.

Daremos ahora la definición de cónica.

Definición. Llamaremos cónica al conjunto de puntos en el plano R^2 tal que la razón de sus distancias a una recta fija L y un punto fijo F no contenido en la recta es igual a una constante e.



La recta fija L es llamada la Directriz, el punto fijo F el foco y la razón constante e la excentricidad.

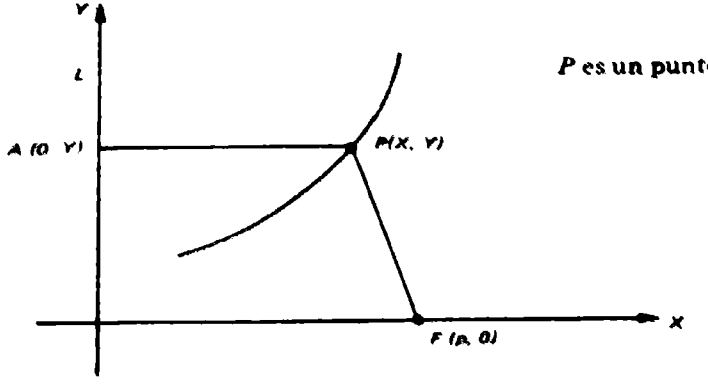
Observaciones.

a) e es una cantidad positiva.

b) Si $e = 1$ la cónica es una parábola, puesto que

$$\frac{|PF|}{|PA|} = 1 \quad \text{ó} \quad |PF| = |PA|$$

Por simplicidad en las expresiones supondremos que la directriz de la cónica coincide con el eje Y y su respectivo foco está sobre el eje de las x.



P es un punto de la cónica

A partir de la definición de cónica tenemos.

$$\frac{|PF|}{|PA|} = e$$

$$\frac{\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}}{\sqrt{(y-y)^2 + (x-0)^2}} = e$$

$$\frac{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2}} = e$$

elevando al cuadrado, tenemos

$$\frac{(x-p)^2 + y^2}{x^2} = e^2$$

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = e^2 x^2$$

$$x^2 - e^2 x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = 0$$

$$(1 - e^2) x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = 0$$

Esta ecuación de segundo grado es la ecuación de una cónica y dependiendo del valor que tome la excentricidad (e) se obtendría una parábola, una hipérbola o una elipse.

1) Si $e = 1$

entonces

$$\begin{aligned}(1 - (1)^2) x^2 - 2xp + p^2 + y^2 &= 0\\ -2xp + p^2 + y^2 &= 0\\ y^2 &= -2xp + p^2\\ y^2 &= -2p(x - p/2)\end{aligned}$$

que es la ecuación de un parábola

2) Si $e \neq 1$

entonces $(1 - e^2) \neq 0$

$$\frac{(1-e^2)x^2 - 2xp + p^2 + y^2}{(1-e^2)} = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{2p}{1-e^2}\right) x + \frac{p^2}{(1-e^2)} + \frac{y^2}{(1-e^2)} = 0$$

$$\left(x^2 - \left(\frac{2p}{1-e^2}\right)x + \frac{p^2}{1-e^2)^2}\right) + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{p^2}{(1-e^2)} + \frac{p^2}{(1-e^2)^2}$$

$$\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right) + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{-p^2(1-e^2) + p^2}{(1-e^2)^2}$$

$$\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2}$$

dividido entre $\frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2}$

tenemos

$$\frac{\left(x - \frac{p}{(1-e^2)}\right)^2}{\frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2 e^2}{1-e^2}} = 1$$

Esta ecuación representa una elipse o una hipérbola dependiendo del valor de e, puesto que en el segundo sumando aparece la expresión $(1-e^2)$ que puede tomar valores positivos (elipse) o negativos (hipérbola).

Si $e > 1$ entonces

$$e^2 > 1$$
$$0 > 1-e^2$$

ó $1-e^2 < 0$

por lo que la ecuación representa una hipérbola.

o si $e < 1$, entonces

$$e^2 < 1$$
$$0 < 1-e^2$$

ó $1-e^2 > 0$

por lo que la ecuación representa una elipse.

Resumiendo

Si $e = 1$ la cónica es una parábola
Si $e > 1$ la cónica es una hipérbola
Si $e < 1$ la cónica es una elipse

Recordemos que la ecuación de una elipse es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Y comparando con la ecuación de la cónica tenemos.

$$a^2 = \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} \qquad \text{y} \qquad b^2 = \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)}$$

y como $c^2 = a^2 - b^2$

entonces

$$c^2 = \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)}$$

$$c^2 = \frac{p^2 e^2 - p^2 e^2 (1-e^2)}{(1-e^2)^2}$$

$$c^2 = \frac{p^2 e^2 - p^2 e^2 + p^2 e^4}{(1-e^2)^2}$$

$$c^2 = \frac{p^2 e^4}{(1-e^2)^2}$$

ahora

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{\dfrac{p^2 e^4}{(1-e^2)^2}}{\dfrac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2}} = \frac{p^2 e^4}{p^2 e^2}$$

$$\frac{c^2}{a^2} = e^2$$

por lo que $e = \dfrac{c}{a}$

En forma similar se puede demostrar que la excentricidad de la hipérbola también está dada por

$$e = \frac{c}{a}$$

Observaciones

a) En la parábola la directriz y el foco de la cónica son los mismos que aparecen en la definición de la parábola

b) En la elipse y en la hipérbola cada foco tiene su directriz

Ejemplos

1. Dada la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Encontrar su excentricidad

$b^2 = 20$

$a^2 = 36$

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 36 - 20$

$c^2 = 16$

$c = 4$ entonces $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2. Dada la ecuación de la elipse.

$4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$

encontrar su excentricidad.

$$4(x^2 - 12x) + 9(y^2 + 8y) = -144$$

$$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) = -144 + 144 + 144$$

$$4(x - 6)^2 + 9(y + 4)^2 = 144$$

$$\frac{(x - 6)^2}{36} + \frac{(y + 4)^2}{16} = 1$$

entonces

$a^2 = 36$

$b^2 = 16$

$c^2 = a^2 \quad b^2 = 20$

entonces $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{20}}{6}$

3. Determinar la excentricidad de la cónica cuya ecuación es

$$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$$

Reduciendo, obtenemos

$$\frac{(x - 1)^2}{16} - \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$$

que es la ecuación de una hipérbola.

entonces $a^2 = 16$

$b^2 = 9$

$b^2 = c^2 - a^2$

$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$

así $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

4. Determinar la ecuación de la hipérbola de centro $(2, -1)$, cuyo eje transverso mide 10 y su excentricidad es 7/5

$c(2, -1)$

$2a = 10$

$a = 5$

$e = \frac{c}{a} = \frac{7}{5}$ entonces $\frac{c}{5} = \frac{7}{5}$

así $c = 7$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 - a^2 = b^2$

$49 - 25 = b^2$

$24 = b^2$

así la ecuación es

$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{24} = 1$$

Ejercicios.

En los ejercicios del 1 al 7 determinar la excentricidad de la cónica dada.

1. $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{289} = 1$
2. $x^2 - y^2 = 36$
3. $y^2 - x^2 = 16$
4. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$
5. $(x-1)^2 = 16(y-1)$
6. $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$
7. $\frac{y^2}{20} - \frac{x^2}{16} = 1$
8. Encontrar la ecuación de la elipse vertical con centro en el origen cuya excentricidad es 4/5 y distancia focal es 16.
9. Encontrar la ecuación de la hipérbola horizontal con centro $(1/2, -1/4)$ cuya excentricidad es $\sqrt{2}$ y su eje conjugado mide 8.
10. Encontrar la ecuación de la hipérbola horizontal con centro $(1, 12)$ cuya excentricidad es $\sqrt{13/2}$ y eje transverso mide 4.

CAPÍTULO 11

Funciones en los reales

INTRODUCCIÓN

El cálculo constituye una de las áreas de matemática más importante, puesto que difícilmente podemos encontrar alguna profesión que pueda darse el lujo de no necesitar en alguna medida este material.

Nos hemos dado cuenta de que el concepto de función aparece con frecuencia en el estudio de álgebra, trigonometría y geometría analítica. Es sin embargo, en el cálculo donde el concepto de función ocupa un lugar central. En este capítulo hablaremos de límites de funciones, derivación de función, optimización de función, integral de funciones, etc.

El cálculo nos permite conocer el comportamiento de cualquier función y facilita el trazado de su gráfica. Además, nos proporciona datos para poder decidir cuál es el número óptimo de artículos que debemos producir para obtener una máxima ganancia. Mediante el cálculo podemos obtener el área de algunas regiones o el volumen de algunos sólidos, etc.

Este capítulo pretende ser una sólida plataforma que nos permita realizar estudios de mayor alcance en esta rama.

Sección 11.1

FUNCIONES EN LOS REALES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Dada una relación en los reales, reconocer si es función o no.
2. Dada una función en los reales, obtener su dominio.
3. Dada una función en los reales, obtener su imagen.
4. Dada una situación objetiva, expresar un modelo matemático que involucre el concepto de función.
5. Dada una función, indicar si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

En el cálculo nos interesarán funciones cuyo dominio e imagen son los reales o algún subconjunto de ellos.
Es decir:

$$f: R \to R$$

Si x y y son números reales, podemos definir función de la siguiente manera.

Una FUNCIÓN es un conjunto de parejas ordenadas (x, y) en el cual no hay dos parejas ordenadas distintas que tengan el mismo primer elemento, y se expresa por:

$$f = \{(x, y) / y = f(x)\}$$

Al conjunto formado por todos los valores posibles de x (valores del primer elemento de la pareja ordenada) se le llama DOMINIO de la función f, y al conjunto de todos los valores posibles de y (valores del segundo elemento de la pareja ordenada) se le llama RANGO o IMAGEN de la función.

Observaciones.

i) A la variable "x" se le llama variable INDEPENDIENTE, y a "y" variable DEPENDIENTE.

ii) La definición de función asegura que el valor de y (variable dependiente) es único para un valor específico de x (variable independiente).

Ejemplos.

1. $f_1 = \{(x, y) / x + y = 1\}$

   Despejando y de la ecuación tenemos:

   $$y = 1 - x$$

   que es una función, ya que para cada valor asignado a x existirá un único valor de y

2. $f_2 = \{(x, y) / x + y^2 = 1\}$

   Despejando y de la ecuación tenemos:

   $$y^2 = 1 - x$$

   $$y = \pm \sqrt{1 - x}$$

   que no es una función, ya que para cada valor de x en los reales tal que $x < 1$ existirán dos valores diferentes de y (uno positivo y otro negativo).

3. $f_3 = \{(x, y) / x = 1\}$

   no es una función. Algunas parejas de esta relación son: $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1/2)$, $(1, -2)$, etc.

4. $f_4 = \{(x, y) / y = 3\}$

   Sí es una función. Algunas parejas de esta función son: $(1, 3)$, $(-1, 3)$, $(0, 3)$, $(1/2, 3)$ $(-3, 3)$, etc.

También en el cálculo se utilizan funciones o relaciones dando solamente la expresión algebraica que indica cómo se relacionan x y y. Sobreentendiéndose que es una función f tal que $f = \{(x, y) / y = f(x)\}$. Por ejemplo, las siguientes relaciones no son funciones:

i) $x^2 + y^2 = 1$
ii) $4y^2 = 5 - x$
iii) $2x^2 + 3y^2 = 6$
iv) $xy^2 = 1$

Estas relaciones no son funciones, ya que al despejar la variable y obtendremos una expresión en la que para cada valor de x existirán dos valores distintos de y.

Al despejar y en las relaciones anteriores tenemos:

i) $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$

ii) $y = \pm \sqrt{\dfrac{5 - x}{4}}$

iii) $y = \pm \sqrt{\dfrac{6 - 2x^2}{3}}$

iv) $y = \pm \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

Las siguientes relaciones sí son funciones.

$y = \dfrac{6}{x}$ $\qquad$ $x + y = 9$

$y + x^2 = 2$ $\qquad$ $y = + \sqrt{1 - x^2}$

$y = - \sqrt{x^2 - 9}$ $\qquad$ $y = + \sqrt{x}$

Obtención del dominio de una función f: $R \to R$

Se dijo anteriormente que el dominio de una función son los valores posibles de x (variable independiente) y estos valores serán aquellos para los cuales la expresión $y = f(x)$ exista, es decir, $y = f(x)$ esté definida en los reales.

Observación.

i) Si $f(x)$ es un cociente, éste no existe si el denominador se hace cero, por lo que se deben eliminar del dominio aquellos valores de x (de los reales) en lo que esto ocurre.

ii) Si $f(x)$ es una raíz cuadrada, ésta existirá sólo si el radicando es positivo o cero, es decir:
si $y = \sqrt{m}$ donde $m = f(x)$, existirá si $m \geq 0$

En los siguientes ejemplos, dar el dominio (D) de cada una de las siguientes funciones.

5. $y = \dfrac{2}{x}$

Para que $y = \dfrac{2}{x}$ exista, x debe ser diferente de cero, por lo que:

$$D = \{x \in \text{Reales} / x \neq 0\}$$

6. $y = \dfrac{3}{x + 1}$

no existe si $x + 1 = 0$ ó $x = -1$. Por lo que:

$$D = \{x \in \text{Reales} / x \neq -1\}$$

7. $y = \dfrac{x}{2x + 3}$

no existe si $2x + 3 = 0$ ó $x = -3/2$, por lo que:

$$D = \{x \in \text{Reales} / x \neq -3/2\}$$

8. $y = \dfrac{2}{x^2 - 16}$

no existe si, $x^2 - 16 = 0$
$x^2 = 16$
$x = \pm 4$
por lo que:

$$D = \{x \in \text{Reales} / x \neq 4, x \neq -4\}$$

9. $f(x) = \dfrac{x - 2}{2x^2 - 5x + 2}$

no existe si, $2x^2 - 5x + 2 = 0$
$(2x - 1)(x - 2) = 0$
$2x - 1 = 0 \quad x - 2 = 0$
$x = 1/2 \quad x = 2$

por lo que:

$$D = \{x \in \text{Reales} / x \neq 1/2, x \neq 2\}$$

10. $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$

existe si $x \geq 0$
por lo que:

$$D = \{x \in R / x \geq 0\} = [0, \infty)$$

11. $y = \sqrt{x + 2}$

existe si, $x + 2 \geq 0$

por lo que: $x \geq -2$

$$D = \{x \in R / x \geq -2\} = [-2, \infty)$$

12. $y = \sqrt{4 - 2x}$

existe si, $4 - 2x \geq 0$

$$4 \geq 2x$$

$$\frac{4}{2} \geq x$$

$$2 \geq x$$

$$x \leq 2$$

por lo que:

$D = \{x \in R / x \leq 2\} = (-\infty, 2]$

13. $y = \sqrt{8 - x}$

existe si, $8 - x \geq 0$

$$8 \geq x$$

$$x \leq 8$$

$D = \{x \in R / x \leq 8\} = (-\infty, 8]$

14. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

existe si, $x^2 - 1 \geq 0$

$$(x - 1)(x + 1) \geq 0$$

la solución de esta desigualdad es:

$$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

por lo que:

$$D = \{x \in R / x \leq -1 \text{ ó } x \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

15. $y = \sqrt{1 - x^2}$

existe si, $1 - x^2 \geq 0$
$(1 - x)(1 + x) \geq 0$

y la solución de esta desigualdad es $[-1, 1]$
por lo que:

$$D = \{x \in R / -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$$

16. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2 - x}}$

El cociente junto con el radical existe si:

$$2 - x > 0$$
$$2 > x$$
$$x < 2$$

por lo que:

$$D = \{x \in R / x < 2\} = (-\infty, 2)$$

17. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

El cociente junto con el radical existe si:

$$x^2 - 1 > 0$$
$$(x - 1)(x + 1) > 0$$

la solución de esta desigualdad es:

$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

por lo que:

$$D = \{x \in R / x < -1 \text{ ó } x > 1\} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

18. $y = x^2$

Para cualquier valor asignado a x, existirá y, por lo que:

$$D = \text{Reales}$$

19. $y = 2x^2 - 1$

no existen restricciones para x, por lo que:

$$D = \text{Reales}$$

20. $y = 5x + 4$

no existen restricciones para x, por lo que:

$$D = \text{Reales}$$

21. $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$

Una raíz cúbica (impar) existirá para cualquier valor asignado a x, por lo que:

$$D = \text{Reales}$$

22. $y = x^{1/5} = \sqrt[5]{x}$

$$D = \text{Reales}$$

23. $y = (x^2 - 4)^{2/3} = \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}$

como es una raíz cúbica, ésta existirá para cualquier valor, por lo que:

$$D = \text{Reales}$$

24. $y = (x + 1)^{3/2} = \sqrt[2]{(x + 1)^3}$

y esta expresión existirá si:

$$(x + 1)^3 \geq 0$$
$$(x + 1)^2 (x + 1) \geq 0$$

$$(x + 1)^2 \geq 0 \text{ y } x + 1 \geq 0 \quad \text{ó} \quad (x + 1)^2 \leq 0 \text{ y } x + 1 \leq 0$$
$$(-\infty, \infty) \quad \text{y} \quad x \geq -1 \quad \text{ó} \quad \phi \quad \text{y} \quad x \leq -1$$

$$[(-\infty, \infty) \cap [-1, \infty) \cup [\phi \cap (-\infty, -1]]$$

$$[-1, \infty) \cup \phi = [-1, \infty)$$

Por lo que: $(x + 1)^3 \geq 0$ si $x \geq -1$, así es que:

$$D = \{x \in R / x \geq -1\} = [-1, \infty)$$

25. $y = \sqrt{(x^2 + 1)^3}$

existe si $(x^2 + 1)^3 \geq 0$

Esta expresión es positiva para cualquier valor de x en los reales, ya que cualquier número elevado al cuadrado es positivo, le sumamos (1) y lo elevamos al cubo, será positivo.
por lo que:

$$D = \text{Reales}$$

26. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 9}}$

Una raíz cúbica existe para cualquier valor, por lo que la única restricción será cuando

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x = 3 \text{ ó } x = -3$$

así

$$D = \{x \in R / x \neq 3 \text{ y } x \neq -3\}$$

27. $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$

En el ejemplo 25, observamos que $(x^2 + 1)^3$ es positivo para cualquier número real, además, esta función no existirá si

$$(x^2 + 1)^3 = 0$$

$$\sqrt[3]{(x^2 + 1)^3} = \sqrt[3]{0}$$

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$

que no tiene solución en los reales, por lo que:

$$D = \text{Reales}$$

Obtención de la imagen de algunas funciones

Un procedimiento para obtener la imagen (valores de y) en una función $y = f(x)$ es el siguiente:

i) Despejar la variable x de la función $y = f(x)$.
ii) La imagen será el conjunto de valores que puede tomar la variable y despejada la variable x.

En los siguientes ejemplos, dar la imagen (I) de cada una de las siguientes funciones:

28. $y = x + 1$

despejando x, tenemos:

$$x = y - 1$$

no existen restricciones para y en la expresión, por lo que:

$$I = \text{Reales}$$
$$D = \text{Reales}$$

29. $y = x^2$

Despejando x, tenemos:

$$x^2 = y$$
$$x = \pm \sqrt{y}$$

Por lo que $\sqrt{y}$ existe si $y \geq 0$, de donde

$$I = [y \in R \,/\, y \geq 0]$$
$$D = \text{Reales}$$

30. $y = \dfrac{1}{x}$

Despejando x, tenemos

$$y = \frac{1}{x}$$

$$xy = 1$$

$$x = \frac{1}{y}$$

Por lo que y tiene que ser diferente de cero, de donde

$$I = \{y \in R \,/\, y \neq 0\}$$
$$D = \{x \in R \,/\, x \neq 0\}$$

31. $y = \sqrt[3]{x}$

Despejando x, tenemos:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$(y^3) = (\sqrt[3]{x})^3$$

$$y^3 = x$$

$$x = y^3$$

y no tiene restricciones en la expresión, por lo que

$$I = \text{Reales}$$
$$D = \text{Reales}$$

32. $y = x^2 + 1$

Despejando x, tenemos:

$$y = x^2 + 1$$
$$x^2 = y - 1$$
$$x = \pm \sqrt{y - 1}$$

La expresión $\sqrt{y - 1}$ existe si $(y - 1) \geq 0$ ó $y \geq 1$, por lo que

$$I = \{y \in R \,/\, y \geq 1\} = [1, \infty)$$
$$D = \text{Reales}$$

33. $y = x^{2/3} + 1$

Despejando x, tenemos:

$$y = x^{2/3} + 1$$
$$x^{2/3} = y - 1$$
$$(x^{2/3})^3 = (y - 1)^3$$
$$x^2 = (y - 1)^3$$
$$x = \pm \sqrt{(y - 1)^3}$$
$$x = \pm (y - 1)\sqrt{y - 1}$$

Por lo que $(y - 1) \geq 0$ si $y \geq 1$ y la imagen es

$$I = \{y \in R \,/\, y \geq 1\} = [1, \infty)$$
$$D = \text{Reales}$$

34. $y = \dfrac{x + 1}{x}$

Despejando x, tenemos:

$$y = \frac{x + 1}{x}$$
$$xy = x + 1$$
$$xy - x = 1$$
$$x(y - 1) = 1$$
$$x = \frac{1}{y - 1}$$

Por lo que $\dfrac{1}{y - 1}$ existe si $y \neq 1$

y así

$$I = \{y \in R \,/\, y \neq 1\}$$
$$D = \{x \in R \,/\, x \neq 0\}$$

Observación.

Dada la gráfica de una función $y = f(x)$, se puede obtener su dominio e imagen observando los valores que toma x y y respectivamente sobre la gráfica. En la sección siguiente, se verán gráficas de funciones.

Situaciones objetivas que dan lugar a un modelo matemático que involucra el concepto de función

En algunas aplicaciones del cálculo se pueden presentar situaciones en donde se requiera expresar una variable en función de otra (u otras) variables.

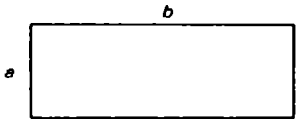
Enseguida describiremos un procedimiento que nos ayudará en nuestro proceso mental para la resolución de un problema.

1. Leer el problema completo (más de una vez si es necesario).
2. Hacer un dibujo (si es que la situación dada lo permite).
3. Identificar las variables.
4. Indicar cuáles son los datos.
5. Identificar cuál es la pregunta.
6. Plantear la ecuación que relaciona las variables, para obtener lo que se pide.
7. Realizar el procedimiento para obtener lo que se pide.
8. Dar la respuesta.

En los ejemplos 35 al 39 aplicaremos este procedimiento.

35. Si el largo de un rectángulo es el doble de su ancho, expresar el perímetro en función de su área.

DIBUJO



VARIABLES

a = ancho
b = largo
P = perímetro
A = área

Datos.

largo = doble del ancho, o sea, $b = 2a$

¿Cuál es la pregunta?

Expresar el perímetro en función del área.

Ecuación que relaciona las VARIABLES.

$A = a\,b$ pero como $b = 2a$

así $A = a\,(2a)$

$A = 2a^2$ y $a^2 = A/2$

$$\boxed{a = +\sqrt{A/2}}$$

(Consideremos solamente la raíz positiva debido a que no tiene sentido referirse a un ancho negativo).

Perímetro = $P = 2a + 2b$

$P = 2\sqrt{A/2} + 2\,(2a)$

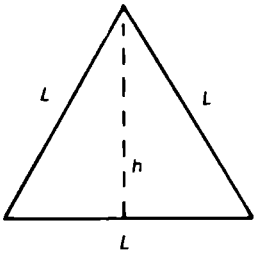
$P = 2\sqrt{A/2} + 4a$

$P = 2\sqrt{A/2} + 4\sqrt{A/2}$

Solución $\boxed{P = 6\sqrt{A/2}}$

36. Expresar el área de un triángulo equilátero en función de la longitud de uno de sus lados.

DIBUJO



VARIABLES

L = longitud de cualquier lado
h = altura
A = área

¿Cuál es la pregunta?

Expresar área del $\triangle$ en función de uno de sus lados.

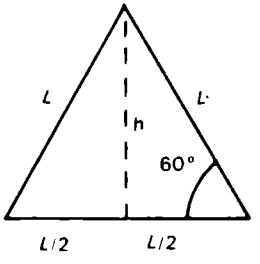
Ecuación que relaciona las VARIABLES.

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$A = \frac{L\,h}{2}$$

PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LO QUE SE PIDE.

Por ser el triángulo equilátero, podemos establecer la siguiente relación:



$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{L}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{L}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} L$$

así

$$A = \frac{L\,h}{2} = \frac{L\left(\frac{\sqrt{3}}{2} L\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}\,L^2}{4}$$

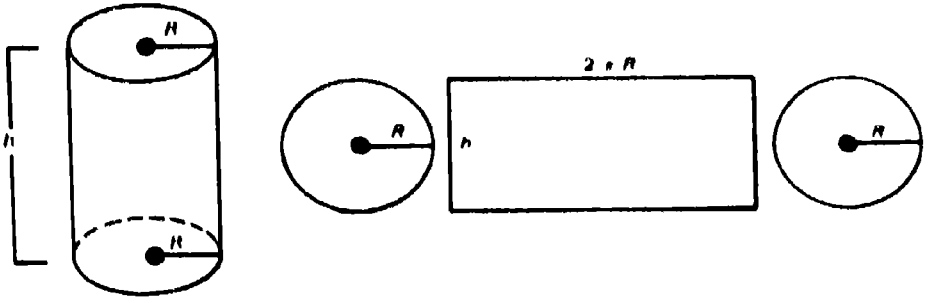
o sea

SOLUCIÓN

$$\boxed{A = \frac{\sqrt{3}\,L^2}{4}}$$

37. Se desea almacenar aceite en botes cilíndricos con tapa cuyo volumen es 375 cm^3. Expresar el área de la superficie del cilindro en función de su radio.

DIBUJO



Variables

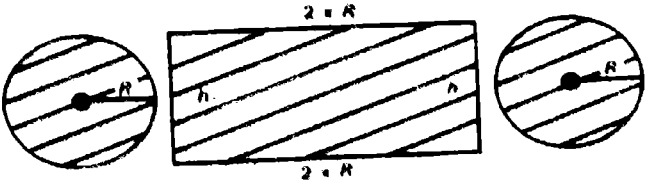
h = altura
R = radio
V = volumen
A = área de la superficie

Datos.

Volumen = $V = 375\ cm^3$

¿Cuál es la pregunta?

Expresar el área de la superficie en función de su radio.



Ecuación que relaciona las VARIABLES.

$$A = \pi R^2 + 2 \pi Rh + \pi R^2$$
$$A = 2 \pi R^2 + 2 \pi Rh$$

PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LO QUE SE PIDE.

como: $V = \pi R^2 h$ y $V = 375\ \text{cm}^3$, podemos formar una relación entre h y V

$$375 = \pi R^2 h$$

$$\boxed{\frac{375}{\pi R^2} = h}$$

y sustituyendo h en

$$A = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$$

tenemos

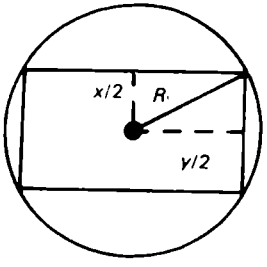
$$A = 2\pi R^2 + 2\pi R\left(\frac{375}{\pi R^2}\right)$$

SOLUCIÓN

$$\boxed{A = 2\pi R^2 + \frac{750}{R}}$$

38. Un rectángulo es inscrito en una circunferencia de radio $R = 5$. Expresar el área del rectángulo en función de su ancho.

DIBUJO



VARIABLES

x = ancho del ☐

y = largo del ☐

R = radio de la circunferencia

A = área del ☐

DATOS

Radio de circunferencia = 5.

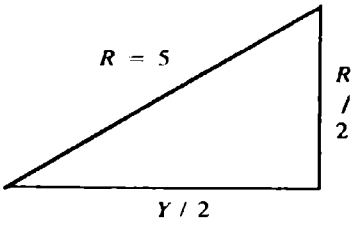
¿Cuál es la pregunta?

Expresar el área del ☐ en función de su ancho.

Ecuación que relaciona las variables.

$A = xy$

PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LO QUE SE PIDE.



$$25 = X^2 + Y^2$$

$$25 = \frac{X^2 + Y^2}{4}$$

$$100 = X^2 + Y^2$$

$$Y^2 = 100 - X^2$$

$$Y = \sqrt{100 - X^2}$$

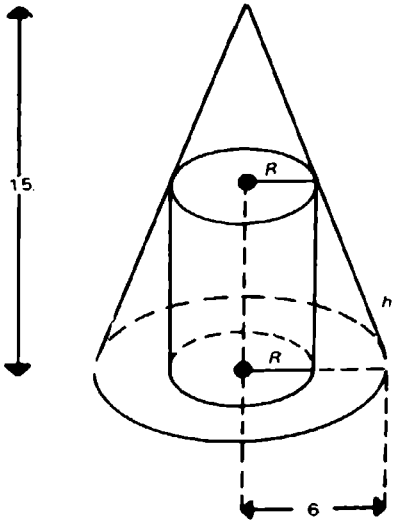
así

$$A = xy$$

$$A = \sqrt{100 - X^2}$$

39. Un cilindro recto circular se inscribe dentro de un cono recto circular con un radio de 6 cm y una altura de 15 cm. Expresar el volumen del cilindro en función de su radio.

DIBUJO



VARIABLES

R = radio del cilindro.
h = altura del cilindro.
A = área del cilindro

Datos.

Radio del cono = 6
Altura del cono = 15

¿Cuál es la pregunta?

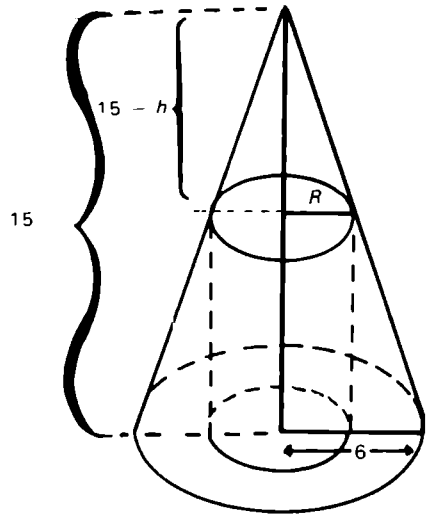
Expresar el área del cilindro en función de su radio.

Ecuación que relaciona las VARIABLES.

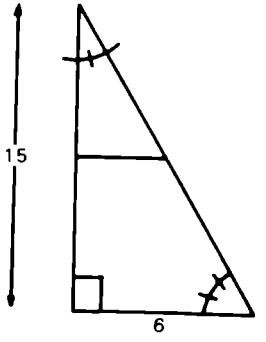
$$V = \pi R^2 h$$

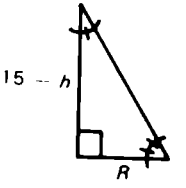
como se pide volumen en función de R, se debe buscar una relación entre h y R para sustituir h en función de R.

PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LO QUE SE PIDE.



se pueden observar dos triángulos semejantes.





y sus lados serán proporcionales. Es decir:

$$\frac{15}{6} = \frac{15 - h}{R}$$

$$\frac{15}{6} R = 15 - h$$

$$h = 15 - \frac{15}{6} R$$

$$h = \frac{90 - 15\,R}{6}$$

y

$$V = \pi\, R^2\, h$$

$$V = \pi\, R^2 \left[\frac{90 - 15\,R}{6}\right]$$

$$V = \frac{1}{6}\, \pi\, R^2\, [90 - 15\,R]$$

$$\boxed{V = \frac{1}{6}\, \pi\, [90\, R^2 - 15\, R^3]}$$

Clasificación de funciones en los reales

En el capítulo 3, se vio la definición de función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva, recordaremos estas definiciones para luego clasificar funciones de los reales.

Definición.

Una función f: $A \to B$ es INYECTIVA si y sólo si se satisface la siguiente propiedad:

$$\text{Si } a \neq b \text{ entonces } f(a) \neq f(b)$$

donde a y b son elementos del dominio.

Es decir, una función *no es inyectiva* si un elemento de su imagen está relacionado con dos elementos de su dominio.

Ejemplos.

40. Decir si las siguientes funciones son inyectivas, dada la función como un conjunto de parejas.

$$f_1 = \{ (x, a), (y, b), (z, c) \}$$

Sí es *función inyectiva*, ya que todas las parejas tienen segundo elemento diferente.

$$f_2 = \{ (m, n), (p, n) \}$$

No es una *función inyectiva*, ya que las dos parejas tienen el mismo segundo elemento.

$$f_3 = \{ (x, y) \mid y = x + 1 \}, \; x \; e \; \text{Reales}$$

Sí es *función inyectiva*, ya que para cada valor de y en la pareja ordenada existirá un único valor de x, $x = y - 1$.

$$f_4 = \{ (x, y) \mid y = 2 \}, \; x \; e \; \text{Reales}$$

No es *función inyectiva*, ya que para cualquier x existirá el mismo valor de y, $y = 2$.

Algunas parejas de f_4 son:

$$f_4 = \{ (1, 2), (2, 2), (-3, 2), (-4, 2), \ldots \}$$

41. Decir si las siguientes funciones son funciones inyectivas.

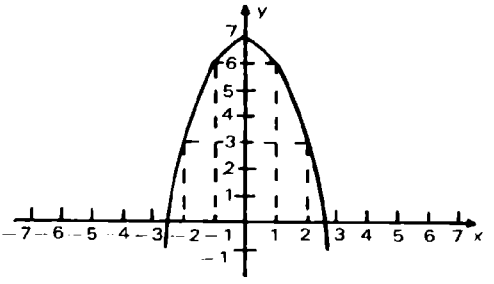
i) $y = 6/x$

Sí es función inyectiva, ya que para cualquier valor de $y \neq 0$ existirá un único valor de x, $x = 6/y$

ii) $y + x^2 = 7$

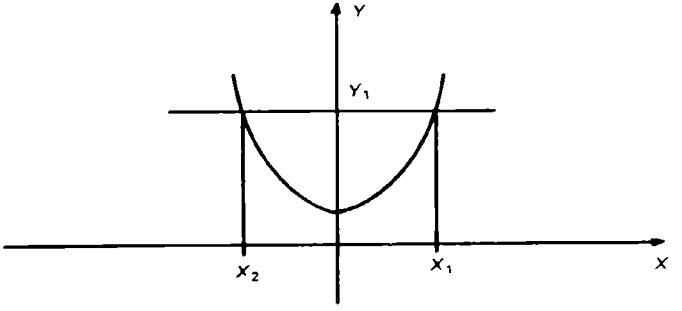
No es función inyectiva, ya que para cualquier y menor que 7 existirán dos valores de x.

La gráfica de esta función es:

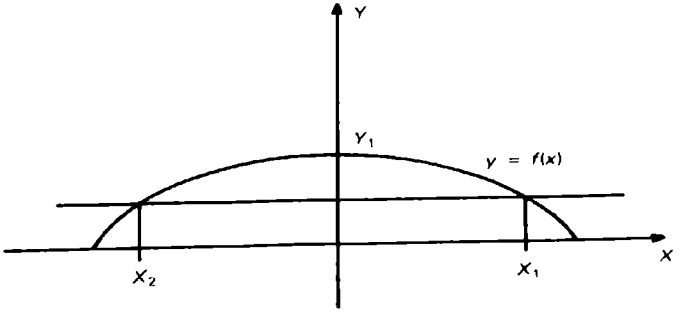


Observación

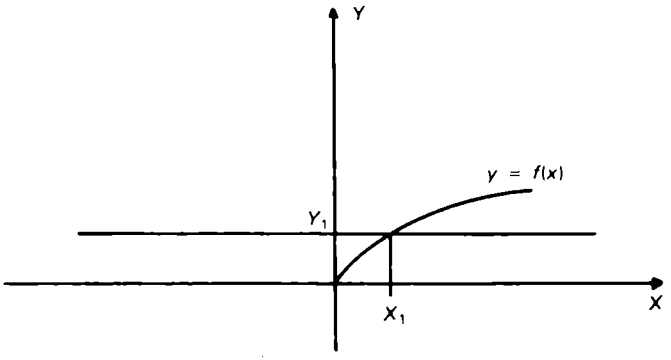
Dada la gráfica de una función $f(x)$, podemos observar en su gráfica si ésta es función inyectiva o no. Si se traza una recta paralela al eje x y esta recta toca en dos o más puntos distintos de la gráfica de $f(x)$, entonces la función *no es función inyectiva.*



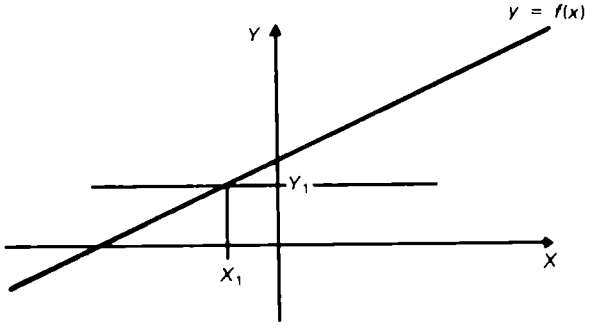
No es función inyectiva



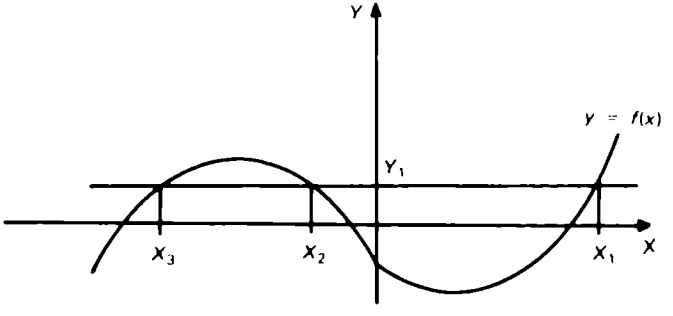
No es función inyectiva



Sí es función inyectiva



Sí es función inyectiva



No es función inyectiva

Función sobreyectiva

Definición.

Una función f: $A \to B$ es SOBREYECTIVA si y sólo si se satisface la siguiente propiedad.

Para toda $b \in B$, existe $a \in A$, Tal que $f(a) = b$

Observaciones.

a) Una función es sobreyectiva si el conjunto de llegada o codominio coincide con la imagen de la función.
b) Una función puede ser sobreyectiva y no ser inyectiva.
c) Para afirmar si una función es sobreyectiva, se tiene que indicar el conjunto de partida A y el conjunto de llegada B.

Ejemplos.

42. Sea: f: $A \to B$, $A = \{x, y, z\}$
$B = \{a, b, c\}$
y $f = \{(x, a), (y, b), (z, c)\}$

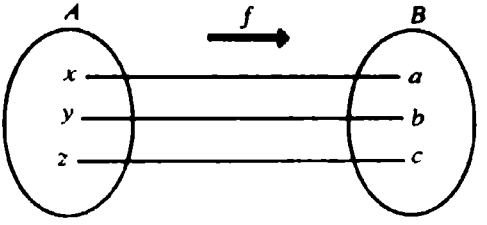


Imagen $= \{a, b, c\} = B$
f sí es función sobreyectiva.

43. Sea: f: $A \to B$, $A = \{m, n\}$
$B = \{n, p, q\}$
y $f = \{(m, n), (p, n)\}$

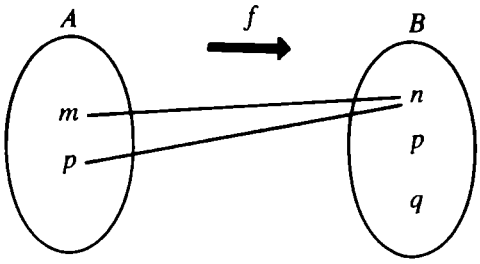


Imagen = $\{n\} \neq B = \{n, p, q\}$
f no es función sobreyectiva y no es inyectiva.

44. Sea: $f: A \to B$, $A = B$ = Reales
y $f = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$

Imagen = {Reales} = B
f sí es función sobreyectiva.

45. Sea: $f: A \to B$, $A = B$ = Reales
y $f = \{(x, y) \mid y = 2\}$

Imagen = $\{2\} \neq B$ = Reales
f no es función sobreyectiva.

46. Sea: $f: A \to B$, $A = B$ = Reales
y $f = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

Imagen = $\{y \in R \mid y \geq 0\} \neq B$ = Reales
f no es función sobreyectiva.

47. Sea: $f: A \to B$, A = Reales
B = Reales positivos
y $f = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

Imagen = $\{y \in R \mid y \geq 0\} = B$ = Reales positivos.
f sí es función sobreyectiva.

Función biyectiva

Definición.

Una función f: $A \rightarrow B$ es BIYECTIVA si y sólo si:

i) f es inyectiva.
ii) f es sobreyectiva.

Ejemplos.

48. Sea: f: $A \rightarrow B$, $A = \{x, y, z\}$
$B = \{a, b, c\}$
y $f = \{(x, a), (y, b), (z, c)\}$

Es función biyectiva ya que es inyectiva y sobreyectiva.

49. Sea: f: $A \rightarrow B$, $A = \{m, n\}$
$B = \{n, p, q\}$
y $f = \{(m, n), (p, n)\}$

f no es función inyectiva y no es sobreyectiva, por lo que f no es función biyectiva.

50. Sea: f: $A \rightarrow B$, $A = B =$ Reales
y $f = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$

f sí es función sobreyectiva y sí es inyectiva, por lo tanto f sí es función biyectiva.

51. Sea: f: $A \rightarrow B$, $A = B =$ Reales
y $f = \{(x, y) \mid y = 2\}$

f no es función sobreyectiva y no es inyectiva, por lo tanto f no es función biyectiva.

52. Sea: f: $A \rightarrow B$, $A = B =$ Reales
y $f = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

f no es función sobreyectiva ni tampoco inyectiva, por lo tanto f no es función biyectiva.

53. Sea: $f: A \to B$, A = Reales
B = Reales positivos
y $f = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

f sí es función sobreyectiva pero no es inyectiva, por lo tanto f no es función biyectiva. ·

Ejercicio ·

1. Decir si las siguientes relaciones son funciones, donde $f: R \to R$.

a) $f = \{(x, y) / y = 2x + 1\}$
b) $f = \{(x, y) / y^2 = 3x^{1/2}\}$
c) $f = \{(x, y) / y^2 + 2x^2 = 1\}$
d) $f = \{(x, y) / y + x^2 = 2\}$
e) $f = \{(x, y) / x^2 y + 3xy = 1\}$
f) $f = \{(x, y) / y^2 x + 2xy = 1\}$
g) $f = \{(x, y) / x = 3\}$
h) $f = \{(x, y) / y = 1\}$

i) $f = \left\{(x, y) / y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}\right\}$

j) $f = \left\{(x, y) / y = \dfrac{2}{x}\right\}$

2. Decir si las siguientes relaciones son funciones donde $f: R \to R$.

a) $x^2 + y = 2$

b) $y = -\sqrt{4 - x^2}$

c) $y = \dfrac{3}{x}$

d) $y + x = 9$

e) $y^2 + x^2 = 4$

f) $yx^2 + x + 1 + y = 0$

h) $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$

i) $x = \dfrac{3}{y^2}$

j) $y^2 = \dfrac{2}{x}$

k) $y^2 = x^2 - x$

l) $y^2 = 2x^3$

m) $x^2 - 2x + y^2 + 4x = 0$

n) $y = \sqrt{x^2 - 16}$

ñ) $y^4 + x^2 = 1$

o) $y^4 = 4 - x^2$

p) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

3. Dar el dominio e imagen de cada una de las siguientes funciones.

a) $y = \frac{5}{x}$

b) $y = \frac{1}{x + 5}$

c) $y = \frac{2}{x - 3}$

d) $y = \frac{x + 1}{x^2}$

e) $y = \frac{x}{x + 4}$

f) $y = \frac{x}{x^2 - 9}$

g) $y = \frac{x + 4}{x^2 - 16}$

h) $y = \frac{1}{x^2 + 4}$

i) $y = \sqrt{x - 5}$

j) $y = -\sqrt{9 - x}$

k) $y = -\sqrt{x + 1}$

l) $y = \sqrt{x^2 - 25}$

m) $y = \sqrt{25 - x^2}$

n) $y = -\sqrt{25 - x^2}$

ñ) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 25}}$

o) $y = \frac{-1}{\sqrt{25 - x^2}}$

p) $y = \frac{3}{\sqrt{x - 1}}$

q) $y = 2x + 9$

r) $y = 5x^{1/3}$

s) $y = x^{-2}$

t) $y = x^{1/7}$

u) $y = (x^2 - 9)^{1/3}$

v) $y = (3x^2 + 2)^{2/3}$

w) $y = (2x^2 + 1)^{1/2}$

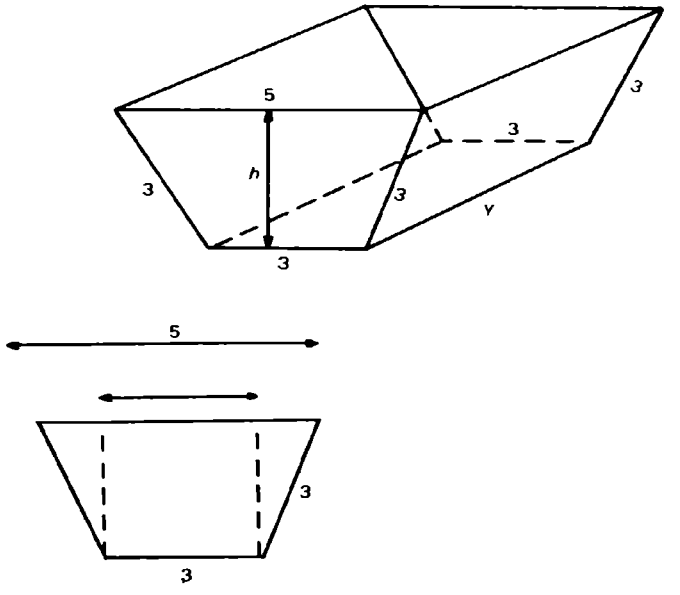
x) $y = (2x^2 - 1)^{1/2}$

4. Expresar el área de un cuadrado en función de su perímetro.
5. Si el ancho de un rectángulo es la tercera parte de su largo, expresar el perímetro en función de su área.
6. En un triángulo rectángulo cuyas medidas son 3, 4 y 5, se inscribe un rectángulo de tal manera que dos de sus lados coinciden con sus catetos. Expresar el área del rectángulo en función de su largo.

7. La base de un triángulo isósceles tiene 20 m y su altura 40 m. Un rectángulo es inscrito en el triángulo de tal manera que dos de sus vértices quedan en la base. Expresar el área del rectángulo en función de su largo.
8. Expresar el volumen de un cilindro recto circular en función de: *a*) su radio *b*) su altura, si sabemos que la altura es 3 veces su radio.
9. Expresar el perímetro de un círculo en función de su área.
10. Se tiene una pieza cuadrada de 10 cm de lado y se desea hacer una caja abierta, recortando en las 4 esquinas cuadrados iguales y doblando el resto. Expresar el volumen de la caja en función del lado del cuadrado recortado.
11. Una escalera de 3 metros se recarga sobre una pared vertical. Expresar la distancia desde el piso a la parte superior de la escalera en función de la distancia desde la base de la escalera a la pared.
12. Si un coche se encuentra a x metros de la intersección de una carretera y otra a y metros de la misma intersección. Expresar la distancia entre ambos coches en función de x y y.
13. Dos coches, uno se dirige hacia el este a 80 km/hora y el otro hacia el sur a 90 km/hora, están dirigiéndose hacia la intersección de dos carreteras. Expresar la distancia entre los coches en función del tiempo. Considere el tiempo desde un instante dado.
14. Un islote está en un punto A, a 12 km del punto B más cercano sobre una playa recta. Un faro está en el punto C a 20 km de B sobre la playa. Si un hombre puede nadar a 8 km/hora y caminar a razón de 10 km/hora y nada de la isla a un punto entre B y C y camina de ese punto a C. Expresar el tiempo que tarda en nadar y luego caminar en función de la distancia de B al punto donde llega a la playa.
15. Si en un trapecio el lado menor es la tercera parte de su lado mayor y su altura es la mitad del lado mayor, expresar el área en función del lado mayor.
16. Si en un cilindro sin tapas sabemos que el radio es la cuarta parte de la altura. Expresar la superficie del cilindro en función del radio.
17. Una persona corta arbitrariamente un pedazo de alambre de 1 m de largo en dos trozos:

el trozo de la izquierda lo va a doblar para formar un cuadrado y el de la derecha lo doblará para formar un círculo. Exprese el área total de las dos figuras en términos de x.
18. A un tanque cónico de radio de 5 mts y 10 pies de altura, fluye agua cuando el agua está a una altura h y un radio r, expresar el volumen del agua en función de la altura.

19. Una persona de 1.80 m de altura comienza a caminar en el instante $t = 0$ directamente debajo de un faro de 4.50 m de altura. La persona camina en línea recta a la razón constante de 3 mts/segundo. Expresar la longitud de la sombra de la persona como función de la distancia que caminó.
20. Una alberca tiene una profundidad mínima de 1 metro y una máxima de 3 metros, 15 metros de largo y 8 metros de ancho. Expresar el volumen del agua contenida en función de la altura del nivel del agua.
21. Un recipiente tiene la forma siguiente:



Expresar el volumen del recipiente en función de su largo.

22. Decir si las siguientes son funciones inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. (R = Reales, R^+ = Reales positivos).

a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$f: A \to B$ $f = \{(x, y) \mid y = 2x + 3\}$
b) $f: R \to R$, $f(x) = 2x^2$
c) $f: R \to R$, $f(x) = x^3$
d) $f: R \to R$, $f(x) = x + 2$
e) $f: R^+ \to R$, $f(x) = x^{1/2}$
f) $f: [-1, 1] \to R$, $f(x) = (1 - x^2)^{1/2}$
g) $f: [-1, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = (1 - x^2)^{1/2}$
h) $f: [-1, \infty) \to R$, $f(x) = (x^2 - 1)^{1/2}$

$$i)\ f\colon R \to R \quad , \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x < -2 \\ x & -2 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

$$j)\ f\colon R \to R \quad , \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < -1 \\ x & x \ge -1 \end{cases}$$

Sección 11.2

FUNCIONES EVALUADAS EN VALORES DE SU DOMINIO

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Evaluar una función cuando se da el valor del dominio en forma numérica o literal.

Sea $f(x) = 3x + 5$, si se desea evaluar la función $y = f(x)$, para algún valor numérico en especial, lo que se hace es sustituir en la función el valor indicado.

Por ejemplo:

si $x = 0$ entonces $y = f(0) = 3(0) + 5 = 5$
es decir $f(0) = 5$

o si $x = 2$ entonces $y = f(2) = 3(2) + 5 = 11$
es decir $f(2) = 11$

o si $x = -1/2$ entonces $y = f(-1/2) = 3(-1/2) + 5 = 7/2$

Funciones evaluadas en expresiones algebraicas

La variable x puede ser sustituida por otra expresión algebraica en la misma variable x o en otra variable.

Por ejemplo, para la función $f(x) = 3x + 5$ tenemos:

$f(2x) = 3(2x) + 5 = 6x + 5$
$f(a) = 3(a) + 5 = 3a + 5$
$f(a + b) = 3(a + b) + 5 = 3a + 3b + 5$
$f(2x^2 - 3) = 3(2x^2 - 3) + 5 = (6x^2 - 9) + 5 = 6x^2 - 4$

Ejemplos.

1. Sea $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

$$f(a) = 3(a)^2 - 2(a) + 5$$
$$= 3a^2 - 2a + 5$$

$$f(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 5$$
$$= 12 - 4 + 5$$
$$= 13$$

$$f(x^2) = 3(x^2)^2 - 2(x^2) + 5$$
$$= 3x^4 - 2x^2 + 5$$

$$f(2x) = 3(2x)^2 - 2(2x) + 5$$
$$= 12x^2 - 4x + 5$$

$$f(x + y) = 3(x + y)^2 - 2(x + y) + 5$$
$$= 3(x^2 + 2xy + y^2) - 2x - 2y + 5$$
$$= 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 2x - 2y + 5$$
$$= 3x^2 + 3y^2 + 6xy - 2x - 2y + 5$$

$$f(x + h) = 3(x + h)^2 - 2(x + h) + 5$$
$$= 3(x^2 + 2xh + h^2) - 2x - 2h + 5$$
$$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 2x - 2h + 5$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x} = 3x - 2 + 5/x$$

$$\frac{f(3t + 1)}{3t + 1} = \frac{3(3t + 1)^2 - 2(3t + 1) + 5}{(3t + 1)}$$
$$= \frac{3(3t + 1)^2}{3t + 1} - \frac{2(3t + 1)}{3t + 1} + \frac{5}{3t + 1}$$
$$= 3(3t + 1) - 2 + 5/(3t + 1)$$

$$\frac{f(x^2)}{x^2} - \frac{f(x)}{x} - f(1) = \frac{3(x^2)^2 - 2(x^2) + 5}{x^2} - \frac{3x^2 - 2x + 5}{x}$$
$$- [3(1)^2 - 2(1) + 5]$$
$$= \frac{3x^4 - 2x^2 + 5}{x^2} - (3x - 2 + 5/x) - 6$$
$$= 3x^2 - 2 + 5/x^2 - 3x + 2 - 5/x - 6$$
$$= 3x^2 + 5/x^2 - 3x - 5/x - 6$$

2. Sea $f(x) = 2x - y + x^2$

$$f(1) = 2(1) - y + (1)^2 = 3 - y$$

$$f(a) = 2(a) - y + (a)^2 = 2a - y + a^2$$

$$\begin{aligned} f(2t + 3) &= 2(2t + 3) - y + (2t + 3)^2 \\ &= 4t + 6 - y + (4t^2 + 12t + 9) \\ &= 4t + 6 - y + 4t^2 + 12t + 9 \\ &= 4t - y + 4t^2 + 12t + 15 \end{aligned}$$

3. Sea $f(x) = x$

$$\frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} + \frac{f(z)}{z} =$$

$$\frac{x}{x} + \frac{y}{y} + \frac{z}{z} =$$

$$1 + 1 + 1 = 3$$

4. Sea $f(x) = 5$

$$f(1) = 5 \qquad f(a) = 5$$
$$f(x^2) = 5 \qquad f(x + y) = 5$$

$$\frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} = \frac{5}{x} + \frac{5}{y}$$

$$\frac{f(x)}{f(2x + t)} - \frac{f(y)}{f(3x - y)} = \frac{5}{5} - \frac{5}{5} = 1 - 1 = 0$$

5. Sea $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

$$f(1) = \frac{1 + 3}{1 - 2} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$f(-2) = \frac{-2 + 3}{-2 - 2} = \frac{1}{-4} = -1/4$$

$$f(-3) = \frac{-3 + 3}{-3 - 2} = \frac{0}{-5} = 0$$

$$f(a) = \frac{a + 3}{a - 2}$$

$$f(2x + 3) = \frac{(2x + 3) + 3}{(2x + 3) - 2} = \frac{2x + 6}{2x + 1}$$

6. Sea $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 3x - 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

$f(2) = 3(2) - 2 = 4$
$f(1) = 3(1) - 2 = 1$
$f(0) = 2$
$f(-1/3) = 2$
$f(-5) = 2(-5)^2 = 50$
$f(1/2) = 2$
$f(-2) = 2(-2)^2 = 8$

$$f(a) = \begin{cases} 2a^2 & \text{si } a < 1 \\ 2 & \text{si } -1 \le a < 1 \\ 3a - 2 & \text{si } a \ge 1 \end{cases}$$

$$f(x + 1) = \begin{cases} 2(x + 1)^2 & \text{si } (x + 1) < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \le (x + 1) < 1 \\ 3(x + 1) - 2 & \text{si } (x + 1) \ge 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x^2 + 4x + 2 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 3x + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

7. Sea $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$

$f(0) = \sqrt{2(0)^2 + 1} = \sqrt{1} = 1$
$f(1) = \sqrt{2(1)^2 + 1} = \sqrt{3}$
$f(-2) = \sqrt{2(-2)^2 + 1} = \sqrt{8 + 1} = 3$
$f(a) = \sqrt{2(a)^2 + 1} = \sqrt{2a^2 + 1}$
$f(x + y) = \sqrt{2(x + y)^2 + 1} = \sqrt{2x^2 + 4xy + 2y^2 + 1}$

8. Sea $f(x) = x - 1/x$
$f(1) = 1 - 1/1 = 0$
$f(2) = 2 - 1/2 = 3/2$
$f(a) = a - 1/a$

$$f(x - 1) = (x - 1) - \frac{1}{x - 1}$$

$$= \frac{(x - 1)^2 - 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$$

Ejercicios

En cada uno de los siguientes problemas, evaluar lo que se indica para la función dada.

1. Si $f(x) = 2 - x$

$f(2 - x) =$ $\quad$ $f(1) =$
$f(x + 2) =$ $\quad$ $f(b^2) =$

2. Si $g(x) = x^2 - 5x + 3$

$g(3t + 1) =$ $\quad$ $g((3)^{1/2}) =$
$g(x^2 - 1) =$ $\quad$ $g(-(3)^{1/2}) =$

3. Si $f(x) = 2x^{-2} + 3x^{-1} + x^0 + 3x - 5$

$f(x + 2) =$ $\quad$ $f(1) =$
$f(x - 1) =$ $\quad$ $f((5)^{1/2}) =$

4. Si $f(x) = x + 3y + x^2$

$f(2t + 3) =$ $\quad$ $f(y) =$
$f(x)/x =$ $\quad$ $f(y)/y =$

5. Si $g(x) = (x-5)/(x + 4)$

$g(2) =$ $\quad$ $g(x - 2) =$
$g(-1) =$ $\quad$ $g(x + 3) =$

6. Si $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < -1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$

$f(1) =$ $\quad$ $f(-1) =$ $\quad$ $f(y) =$
$f(2) =$ $\quad$ $f(-3) =$ $\quad$ $f(b) =$
$f(0) =$

7. Si $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \leq 1 \\ (x + 2)^2 & x > 1 \end{cases}$

$f(-1) =$ $\quad$ $f(0) =$
$f(1) =$ $\quad$ $f(2) =$

8. Si $f(x) = (2x^2 + 3)^{1/2}$

$f(a^2) =$ $\quad$ $f(0) =$
$f(x^2 - 1) =$ $\quad$ $f(1) =$
$f(h - 1/2) =$ $\quad$ $f(-1) =$
$f(h^3 + 1) =$ $\quad$ $f(-2) =$

9. Si $f(x) = (x + 1) \,/\, (x^2 - x)$

$f(x + 1) =$ $\qquad$ $f(x - 1) =$
$f(2) =$ $\qquad$ $f(-2) =$

10. Si $f(x) = x - 2/x$

$f(x - 2) =$ $\qquad$ $f(2 - x) =$
$f(1) =$ $\qquad$ $f(-1) =$

11. Si $f(x) = \dfrac{1 + x}{\dfrac{x}{3} - 1}$

$f(1 + h) =$ $\qquad$ $f(1) =$
$f(x/3) =$ $\qquad$ $f(6) =$

12. Si $f(x) = \dfrac{(x - 2)^{1/2}}{(x^2 - 4)^{1/2}}$

$f(1 + h) =$ $\qquad$ $f(1 - x/y) =$
$f(y/x) =$ $\qquad$ $f(x/y - 1) =$

13. Si $f(x) = \dfrac{2x^4 + 3}{x^2 + 2x} - (2x + 1)^{1/2}$

$f(1) =$ $\qquad$ $f(x/y) =$ $\qquad$ $f(x/y + 1) =$

14. Si $f(y) = y$

$f(y)/y + f(x)/x + f(t)/t =$

15 Si $f(x) = -\frac{1}{2}$

$f(x)/f(x + t) - f(y)/f(3x - y) =$

16. Si $f(x) = x + 1$

$f(x)/(y + z) - f(x - 2t) + f(1) =$

17. Si $f(x) = x + y + 1$

$f(x + 1) =$ $\qquad$ $f(2) =$
$f(2x - 1) =$ $\qquad$ $f(0) =$
$f(x)/f(x + t) - f(x) =$

18. Si $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & x < -1 \\ x & -1 < x < 1 \\ \sqrt{x - 1} & x \geq 1 \end{cases}$

$f(-2) =$ $f(1) =$ $f(-1)$
$f(2) =$ $f(0) =$ $f(a) =$

19. Si $f(x) = |x^2 - 5|$

$f(1) =$ $f(-3) =$ $f(2)$
$f(-2) =$ $f(a) =$ $f(0) =$

Sección 11.3

GRÁFICAS DE FUNCIONES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el alumno deberá ser capaz de:

1. Dar la definición de gráfica de una función.
2. Dada la gráfica de una relación, decir si ésta es una función o no.
3. Representar situaciones cotidianas que den lugar a una función lineal.
4. Dada una situación gráficamente o en tabla de valores, reconocerla como función lineal.
5. Representar una situación dada gráficamente por medio de una fórmula.

En algunas ocasiones es necesaria la gráfica de una función para tener una idea más clara de sus características, por lo que introduciremos el concepto de gráfica de una función.

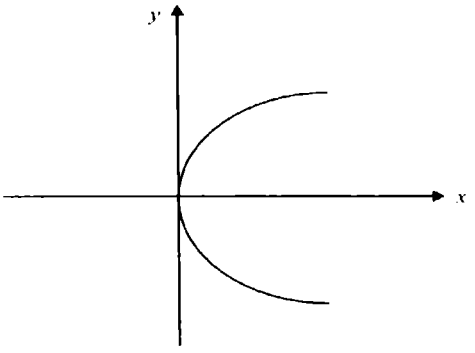
Definición. Si f es una función de R en R o de algún subconjunto de R en R, entonces la GRÁFICA de f es el conjunto de puntos en el plano cartesiano, tales que sus coordenadas (x, y) pertenecen a la función f.

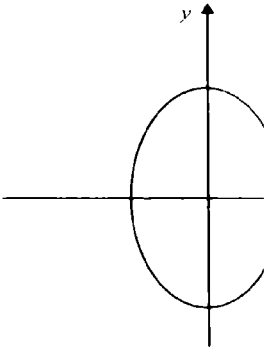
Es decir, la gráfica de una función $y = f(x)$ es un conjunto de puntos en el plano $R \times R$ cuyas coordenadas cartesianas están dadas por las parejas de números (x, y) que pertenecen a la función f, y se debe cumplir que para cada valor de x en el dominio de la función le corresponderá un único valor de y.

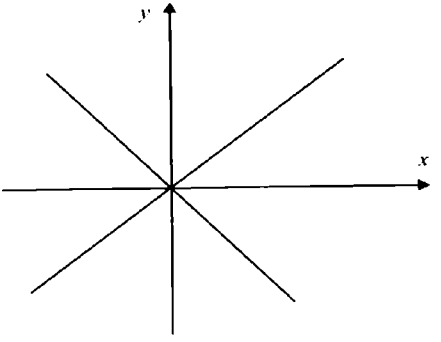
Observación. Si se traza una recta vertical (paralela al eje y) sobre la gráfica de una relación y si ésta corta a la gráfica en un único punto, entonces la gráfica representará una función.

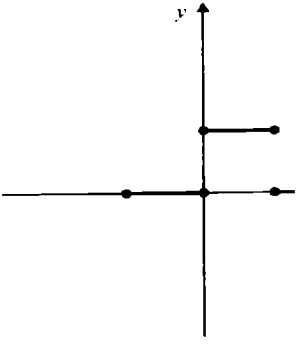
Ejemplos.

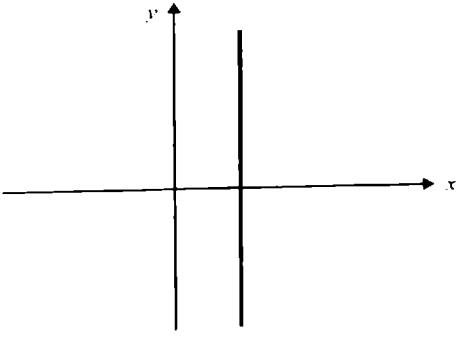
1. Las siguientes gráficas de relaciones no son funciones.





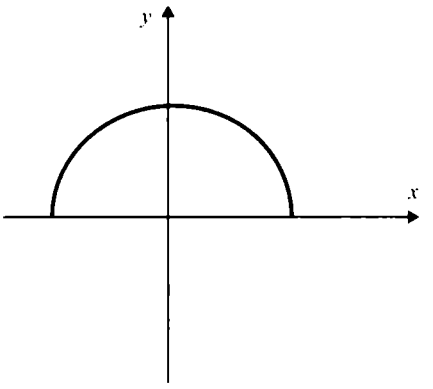


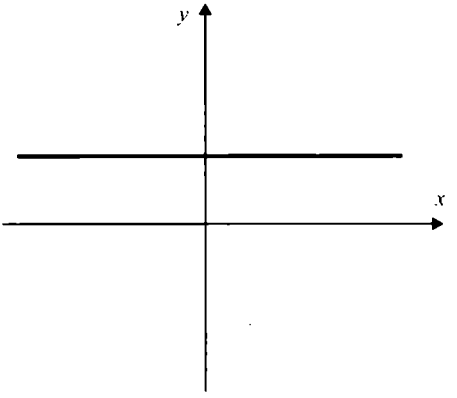


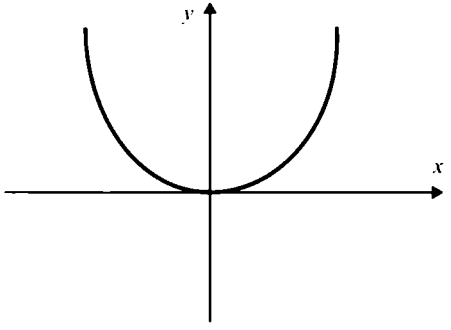


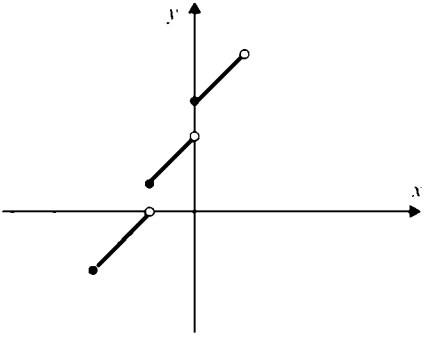
La primera gráfica no representa una función, ya que para cada valor de x mayor a cero, existirán dos valores de y, y al trazar una recta vertical para x mayor a cero ésta intersectará a dos valores de y. Por otro lado, si trazamos una recta vertical para los valores de la variable x en cada una de las demás gráficas, observamos que intersectará a las gráficas en dos valores para algunos valores de x.

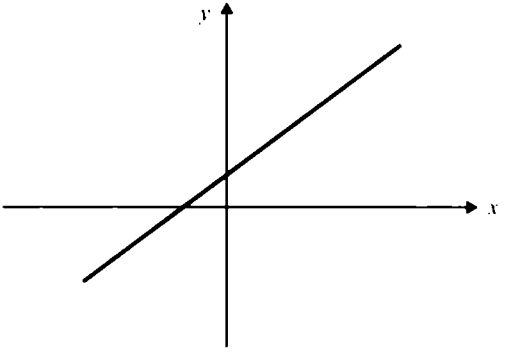
2. Las siguientes figuras de relaciones sí son funciones.











Analizaremos las siguientes situaciones:

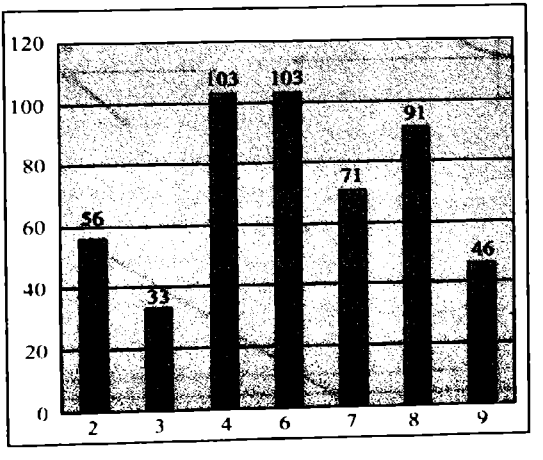
3. El sistema de monitoreo ambiental en la zona metropolitana de Guadalajara, Jalisco, para el sector Tlaquepaque, publicó la siguiente información en el periódico *El Informador*, el 3 al 10 de noviembre del año 2005.

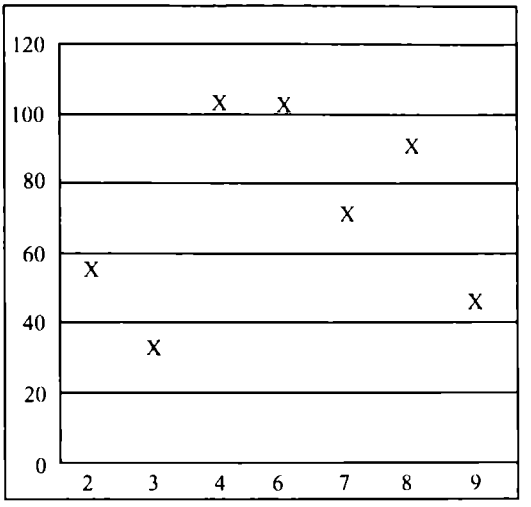
Fecha	2	3	4	6	7	8	9
Núm. de imecas	56	33	103	103	71	91	46

El índice IMECA significa:

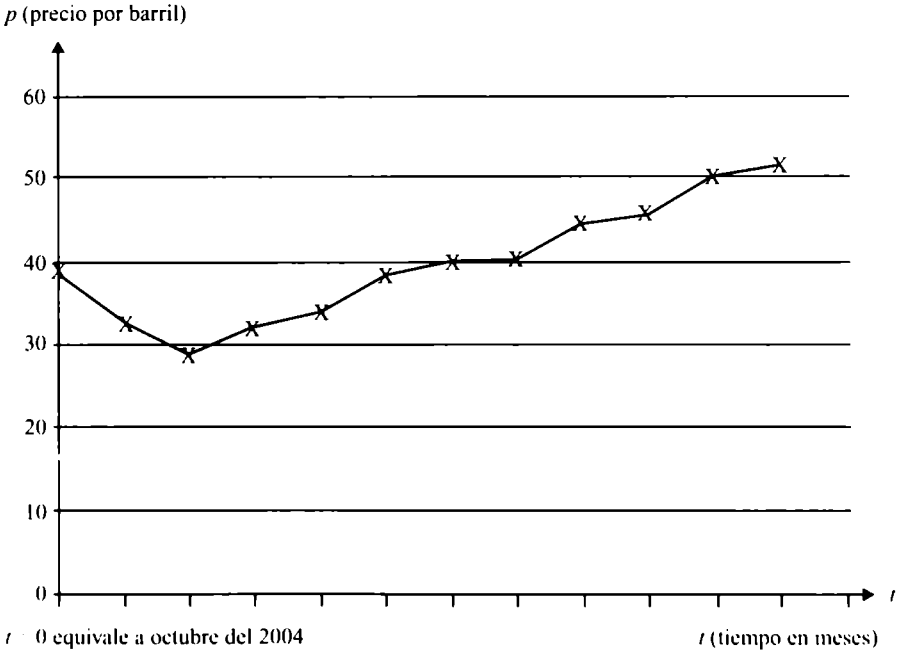
Menos de 50	Situación muy favorable	de 50 a 100	Situación favorable
De 100 a 200	Molestias ligeras	de 200 a 300	Molestias generales
Más de 300	Situación de emergencia		

A continuación mostramos dos formas diferentes de indicar los datos en una gráfica de valores.

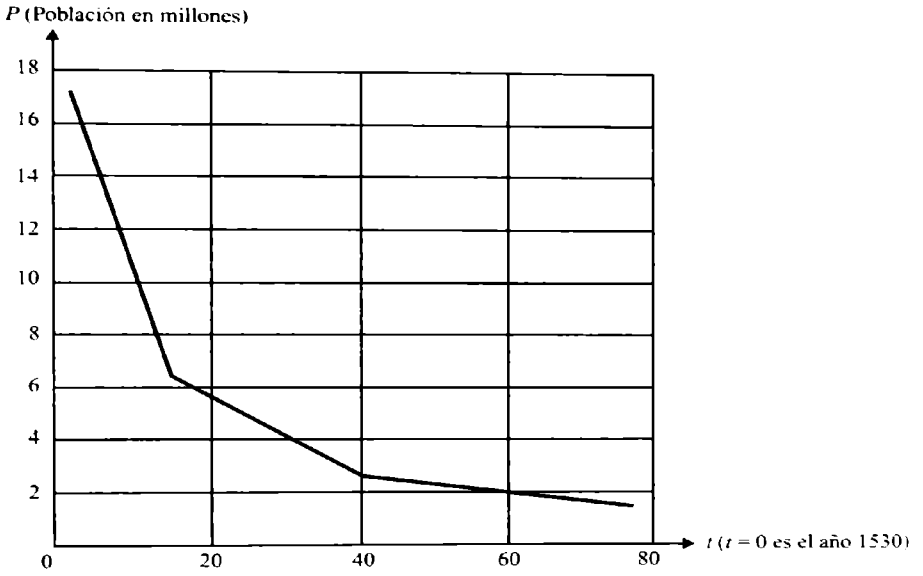




4. La siguiente gráfica muestra el promedio mensual en dólares por barril de petróleo del mes de octubre del 2004 al mes de septiembre del 2005.



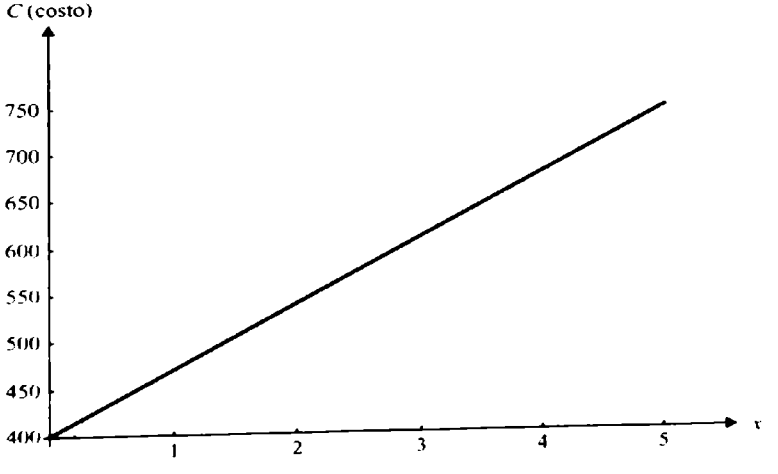
5. La siguiente gráfica muestra la población del México Central (1530-1610).



6. El costo por día representado por C para fabricar x pares de zapatos de seguridad está dada por la ecuación:

$$C = 400 + 70x$$

Y representado gráficamente tenemos que:



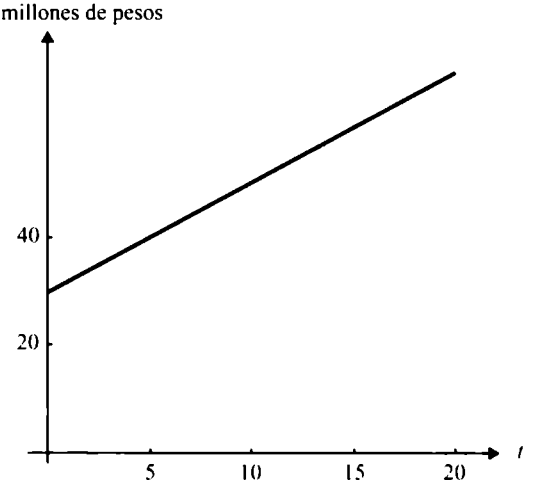
Cada una de las situaciones anteriores representa una *función*, ya que para cada valor de la *variable independiente* (variable graficada horizontalmente) existe un único valor de la *variable dependiente* (graficada verticalmente).

Observaciones.

a) Una función se puede representar por medio de una oración escrita, por una ecuación $H = f(t)$ o $y = f(x)$, por una gráfica, por un conjunto de valores de pares ordenados o por una tabla de valores.
b) El dominio de la función es el conjunto de valores posibles de la variable independiente (t) y el rango o imagen es el conjunto de valores correspondientes de la variable dependiente (H).

7. La gráfica siguiente representa la función costo (C) asociada a la renta por hora de una trilladora. Si t representa el número de horas de la renta de la máquina y C es el costo en miles de pesos:

a) Estimar el costo asociado con la renta de la máquina por 5 horas.
b) Estimar qué tantas horas de tiempo de renta son usadas con un costo de \$60,000.
c) Si el costo de \$30,000 está asociado con cero horas de renta. ¿Qué representa esta cantidad?
d) Dar el dominio e imagen de la función costo.

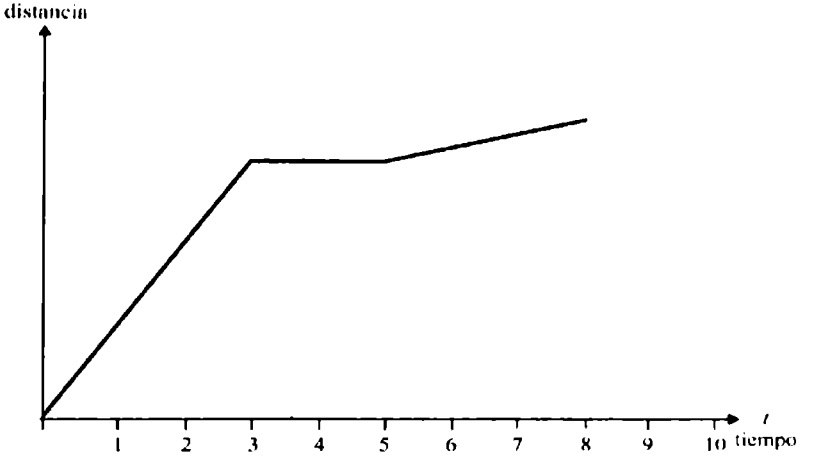


Solución.

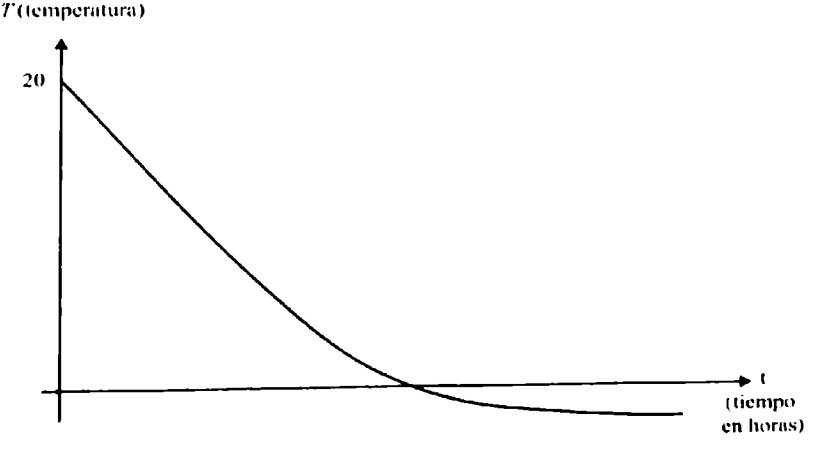
a) Trazando una línea vertical en $t = 5$ en la gráfica de la función, se tiene que el valor estimado del costo es de \$40,000.
b) De manera similar, trazaremos una línea horizontal por el valor aproximado de 60 y bajaremos luego una vertical donde se cruza con la recta de la función y aproximadamente es el valor de 15 horas.

c) La cantidad de 30,000 representa el costo fijo.
d) El dominio son los valores de t, que será el intervalo de $(0,\infty)$ y la imagen o rango será el intervalo de $(30,\infty)$.

8. Representaremos en la siguiente gráfica la distancia de un corredor que los primeros tres minutos corre rápidamente, en los siguientes dos minutos se detiene porque sufre una caída, después se levanta y continúa corriendo lentamente durante tres minutos más.



9. La temperatura en un día del mes de enero en la ciudad de Monterrey baja dramáticamente más de 20 grados en el transcurso del día. La siguiente figura es una gráfica de la temperatura en función del tiempo durante el día que se menciona.



Ejercicios.

1. Graficar cada una de las siguientes funciones y dar en cada caso su dominio e imagen:

   a) $y = 2x - 5$ *b*) $y = \frac{x}{3} + 3$

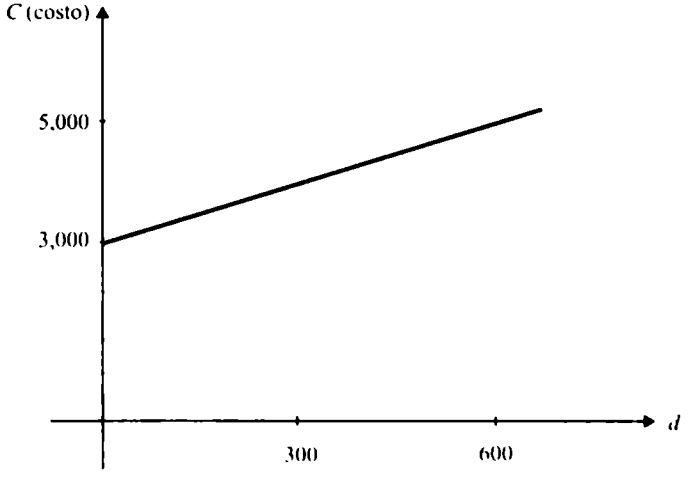
   c) $y = 5$ *d*) $y = -\frac{1}{2}$

   e) $y = 2x$ *f*) $y = -\frac{x}{2}$

   g) $y = 6 - \frac{2}{3}x$ *h*) $y = 3x + 3$

2. La siguiente gráfica puede representar el costo asociado con la renta por día de un carro, si d representa el número de kilómetros recorridos y C es el costo en dólares:

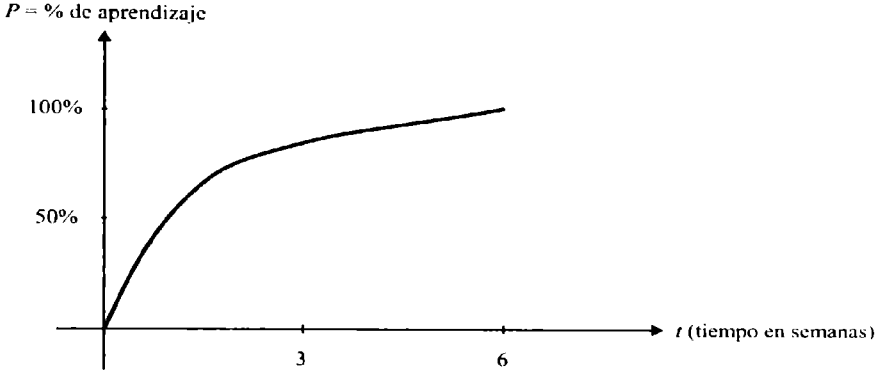
   a) Estimar el costo asociado con la renta del carro para 450 km recorridos.
   b) Estimar cuántos kilómetros se recorrerán para un costo de $6,000.
   c) Si el costo de $3,000 está asociado con cero km recorridos, ¿qué representa esta cantidad?



3. La siguiente gráfica puede ser usada para representar la medida de aprendizaje en un curso intensivo de inglés durante t semanas. Si P representa el porcentaje de aprendizaje que se adquiere, el cual es medido por un examen, y t el número de semanas:

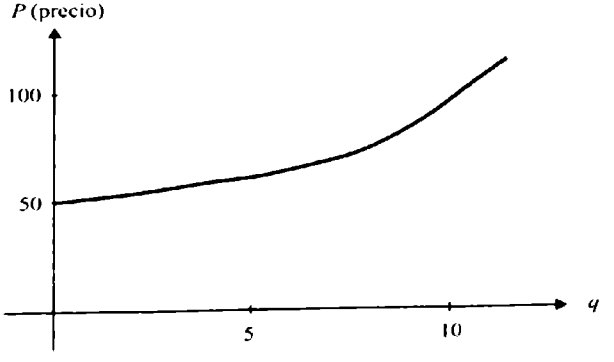
   a) Estimar el porcentaje de aprendizaje que se adquiere a las tres semanas.

b) Estimar el número de semanas del curso que son necesarias para adquirir un porcentaje de 75%.
c) ¿Cuándo el porcentaje de eficiencia crece más rápido, en las primeras semanas o en las últimas?



4. La siguiente gráfica puede representar la curva de oferta, que indica la cantidad de artículos que los fabricantes desean promover, dependiendo del precio al cual se debe vender su producto. Si q representa la cantidad de artículos en miles y P es el precio por unidad en miles:

a) ¿Qué pasa con el precio cuando el número de artículos que se ofrece es reducido?
b) ¿Qué pasa con el precio cuando el número de artículos que se ofrece es grande?
c) ¿Qué precio corresponde cuando el número de artículos ofrecidos es 10 mil?



5. Traza la gráfica adecuada para cada una de las siguientes situaciones:

   a) La distancia en función del tiempo, de un corredor que empieza a moverse lentamente, después cada vez más rápido hasta que sufre una caída de la que se levanta inmediatamente y continúa corriendo en forma lenta.
   b) La altura de una persona después de t años a partir de su nacimiento, en función del tiempo.
   c) La temperatura de una papa fría puesta en el horno de una estufa después de t minutos, en función del tiempo.
   d) El porcentaje de desempleo que durante los meses de diciembre de 1994 y enero de 1995, en la ciudad de Monterrey, Nuevo León, bajó dramáticamente, en función del tiempo.
   e) El número de abortos que crece durante unos años para luego estabilizarse, en función del tiempo.
   f) El uso de la electricidad para uso doméstico, en función de la hora del día.
   g) El decaimiento de la substancia radioactiva carbono-14, en función del tiempo.
   h) La temperatura de una taza de café en el comedor de su casa, en función del tiempo.
   i) El costo de renta de un automóvil, en función del número de kilómetros recorridos.
   j) El costo de un timbre postal, en función del peso de la carta que envía.

6. Escribe dos situaciones de la vida diaria que den lugar a una función. Estas situaciones pueden representarse en una tabla de números, en una gráfica o en una fórmula. Especifica en cada caso, las variables independiente y dependiente.

Sección 11.4

FUNCIÓN LINEAL

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el alumno deberá ser capaz de:

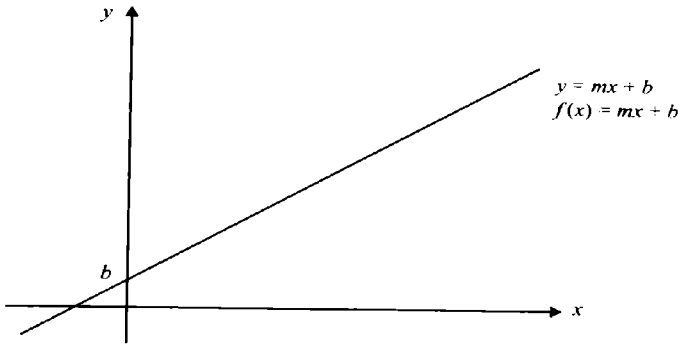
1. Explicar el significado de los conceptos:

   a) Función lineal.
   b) Dominio e imagen de una función lineal.

2. Representar situaciones cotidianas que den lugar a una función lineal.
3. Dada una situación gráficamente o en tabla de valores, reconocerla como función lineal.
4. Representar una situación dada gráficamente por medio de una fórmula.

Una *función lineal* tiene la forma $y = mx + b$

Su gráfica es una línea recta tal que:
i) m es la pendiente o razón de cambio de y con respecto a x.
ii) b es la intersección de la recta con el eje y o el valor de y cuando x toma el valor de cero.



Es decir, la función $y = f(x) = mx + b$ recibe el nombre de función lineal, ya que es la ecuación de una recta cuya pendiente es m y que pasa por el punto $(0,b)$.

Para graficar una recta, es suficiente obtener dos puntos de ella para luego trazar la recta que pase por esos dos puntos, que pueden ser los valores al origen; es decir, se sustituye en la ecuación $x = 0$ y se obtiene el correspondiente valor de y, después, se sustituye en la ecuación $y = 0$ y se obtiene el correspondiente valor de x.

Si $m \neq 0$, el dominio e imagen de $f(x) = mx + b$ son: dominio = reales, imagen = reales.

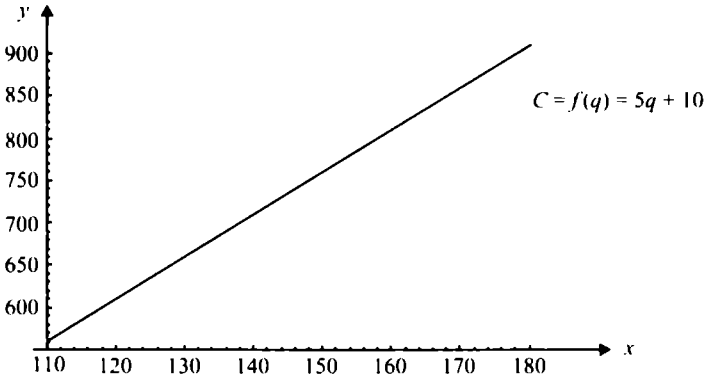
Ejemplos.

1. La siguiente tabla muestra el costo de producción de una empresa, donde q es el número de tapetes y C es el costo.

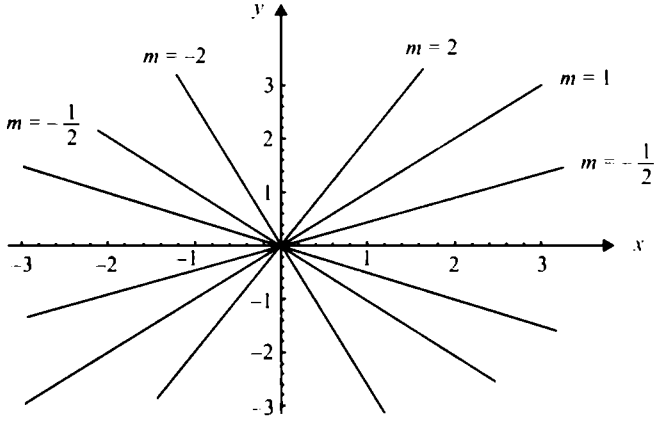
q	110	120	130	140	150	160	170	180
C	560	610	660	710	760	810	860	910

¿Estos datos serán parte de una función lineal?

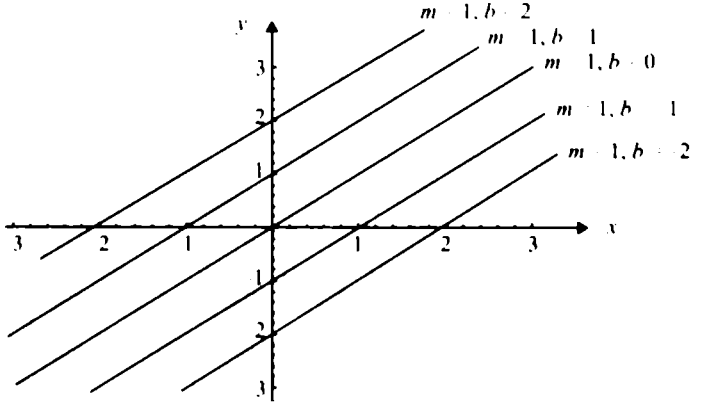
Sí son parte de una función lineal, ya que la pendiente entre cualquier par de puntos (110,560), (120,610), (130,660), (140,710), (150,760), (160,810), (170,860), (180,910) que se da en la tabla es $m = 5$, y la función será $C = f(q) = 5q + 10$.



A continuación se presentan las gráficas de diferentes rectas que pasan por el origen ($b = 0$) y diferentes pendientes.

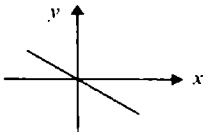


Las siguientes gráficas de rectas tienen la misma pendiente y pasan por diferentes puntos del eje y.

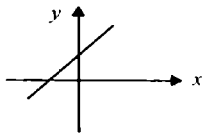


2. Para cada una de las siguientes funciones lineales cuya ecuación es de forma $y = mx + b$, se indica el signo positivo o negativo de la pendiente m y el de b.

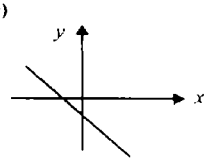
a)



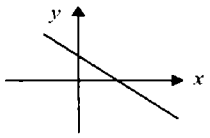
b)



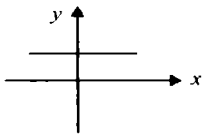
c)



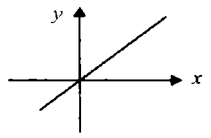
d)



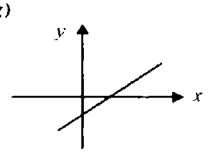
e)



f)



g)



Solución.

Si m es la pendiente y el valor de b es el punto donde cruza el eje de las y, tenemos que:

a) m es negativa y b es cero
b) m es positiva y b es positiva
c) m es negativa y b es negativa
d) m es negativa y b es positiva
e) $m = 0$ y b es positiva
f) m es positiva y $b = 0$
g) m es positiva y b es negativa

3. Se relaciona la función dada en cada figura con las siguientes ecuaciones:

a) $y = 2x - 3$ *b)* $y = 3$ *c)* $y = \left(\frac{1}{2}\right)x + 1$

d) $y = -2x + 1$ *e)* $y = -x - 2$ *f)* $y = \frac{x}{3}$

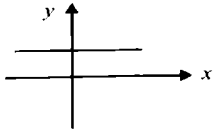


figura 1

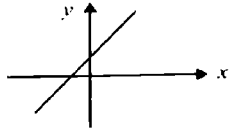


figura 2

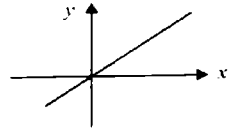


figura 3

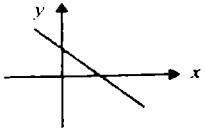


figura 4

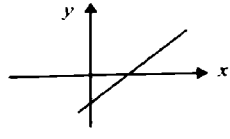


figura 5

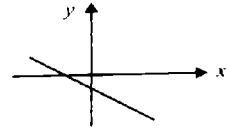


figura 6

Solución.

Recordemos que si la pendiente es positiva, entonces el ángulo de inclinación respecto al eje de las x es menor de 90 grados; y si la pendiente es negativa, el ángulo de inclinación será mayor a 90 grados. Por otro lado, el valor de b indica dónde la recta cruza al eje de las y: si b es positiva cruzará arriba del eje de las x, y si la b es negativa entonces la recta cruzará al eje de las y debajo del eje x.

Por lo que podemos decir que:

El inciso *a*) se relaciona con la gráfica de la figura 5, ya que en esta figura la pendiente es positiva y b es un número negativo.

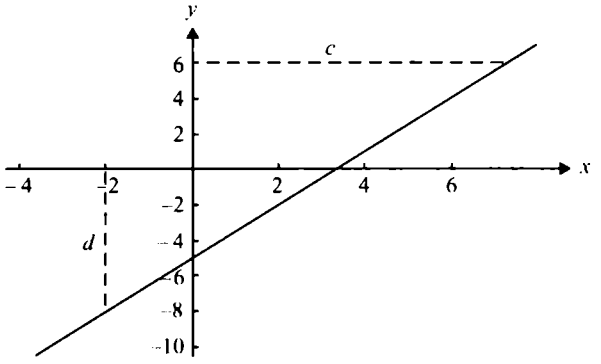
El inciso *b*) se relaciona con la gráfica de la figura 1, ya que la pendiente es cero y b es un número positivo.

El inciso *c*) se relaciona con la gráfica de la figura 2, ya que la pendiente es positiva y b es un número positivo.

El inciso *d*) se relaciona con la gráfica de la figura 4, ya que la pendiente es negativa y b es positivo.

El inciso *e*) se relaciona con la gráfica de la figura 6, y el inciso *f*) se relaciona con la gráfica de la figura 3.

4. Si la gráfica de $y = \frac{3x}{2} - 5$ para la función dada, obtener con precisión:



a) $f(2), f(-2)$ y $f(0)$.
b) Dar los ceros de $f(x)$.
c) ¿El punto $(1,-4)$ pertenece a la gráfica?
d) ¿En qué valores de x la gráfica de $f(x)$ cruza al eje de las x?
e) ¿En qué valores de y la gráfica de $f(x)$ cruza al eje de las y?
f) Si el punto $P(a, 4)$ pertenece a la gráfica de $f(x)$, obtener el valor de a.
g) Si el punto $P(-\frac{1}{2}, b)$ pertenece a la gráfica de $f(x)$, obtener el valor de b.

Solución.

a) $f(2) = \left(\frac{3}{2}\right)(2) - 5 = -2$, es decir $f(2) = -2$

$f(-2) = \left(\frac{3}{2}\right)(-2) - 5 = -8$, es decir $f(-2) = -8$

$f(0) = \left(\frac{3}{2}\right)(0) - 5 = -5$, es decir $f(0) = -5$

b) Los ceros de $f(x)$ son los valores de x donde $f(x) = 0$, es decir, donde $f(x)$ cruza al eje de las x.

así, $f(x) = 0$

$\left(\frac{3}{2}\right)x - 5 = 0$

$\left(\frac{3}{2}\right)x = 5$

$\frac{3x}{2} = 5$

$3x = 5(2)$

$3x = 10$

$x = \frac{10}{3}$

$x = 3.33$

c) El punto $(1,-4)$ pertenecerá a la gráfica si y sólo si este punto satisface a la ecuación $y = \left(\frac{3}{2}\right)x - 5$ al sustituir x por 1 y el valor de y por -4.

$y = \left(\frac{3}{2}\right)x - 5$

$-4 = \left(\frac{3}{2}\right)(1) - 5$

$-4 = \frac{3}{2} - 5$

$-4 = -\frac{7}{2}$

lo cual es falso, y se puede concluir que el punto $(-1,4)$ no pertenece a la gráfica de la función $y = \left(\frac{3}{2}\right)x - 5$.

d) Los valores de x donde cruza la gráfica de $f(x)$ el eje de las x son los ceros de $f(x)$ que se obtuvo en el inciso *b* y solamente es un valor

$x = \frac{10}{3}$ o $x = 3.33$.

e) Los valores donde cruza en el eje de las y es el valor de la función cuando $x = 0$.

$$y = \frac{3x}{2} - 5$$

si $x = 0$ tenemos que $y = \frac{3(0)}{2} - 5$

$$y = 0 - 5$$

$$y = -5$$

f) Como se indica que el punto $p(a,4)$ pertenece a la gráfica, entonces debe satisfacer la ecuación $y = \frac{3x}{2} - 5$ si $x = a$ y $y = 4$

$$y = \frac{3x}{2} - 5$$

$$(4) = \frac{3(a)}{2} - 5$$

$$4 + 5 = \frac{3a}{2}$$

$$9 = \frac{3a}{2}$$

$$9(2) = 3a$$

$$\frac{18}{3} = a$$

$$6 = a$$

$$a = 6$$

es decir, el punto de coordenadas (6,4) pertenece a la gráfica de la función.

g) Haremos lo mismo que en el inciso anterior para obtener el valor de b del punto $\left(-\frac{1}{2}, b\right)$

$$y = \frac{3x}{2} - 5$$

$$b = \frac{3\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} - 5$$

$$b = \frac{-\frac{3}{2}}{2} - 5$$

$$b = -\frac{3}{4} - 5$$

$$b = -5\frac{3}{4}$$

es decir, el punto de coordenadas $(-\frac{1}{2}, -5\frac{3}{4})$ pertenece a la gráfica de la función.

Observación.

Para graficar una recta, es suficiente obtener dos puntos de ella para luego trazar la recta por esos dos puntos, que pueden ser los valores al origen; es decir, se sustituye en la función el valor de $x = 0$ y se obtendrá el valor de y, después se sustituye en la función $y = f(x) = 0$ y se obtendrá el valor de x.

5. Graficar la función lineal $y = 2x + 1$ y dar su dominio e imagen.

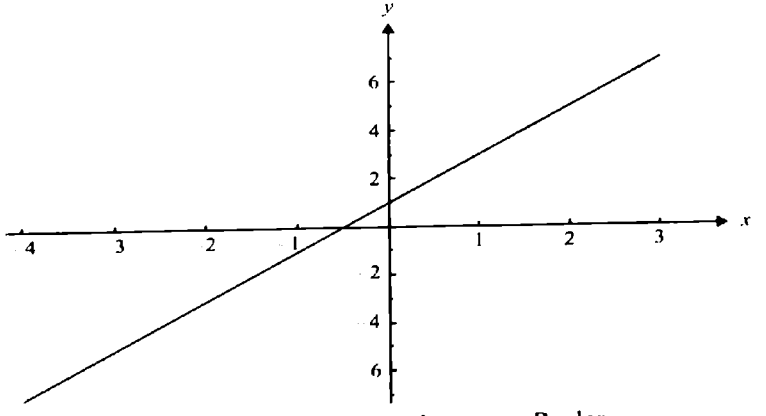
Solución.

Los valores al origen son:

Si $x = 0$, entonces $y = 2x + 1 = 2(0) + 1 = 1$, es decir, uno de los valores al origen es el punto $(0,1)$.

Si $y = 0$ y se sustituye este valor en la función, tenemos $0 = 2x + 1$ y despejando la variable de la ecuación tenemos que $x = \frac{-1}{2}$, es decir, el punto $\left(\frac{-1}{2},0\right)$ pertenece a la gráfica de la función dada.

Se colocarán estos dos puntos en un plano cartesiano y trazaremos la recta por estos dos puntos. Así, la gráfica de $y = 2x + 1$ es la siguiente:



Dominio = Reales Imagen = Reales

6. Se grafica la función $y = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)x$, y se da su dominio e imagen.

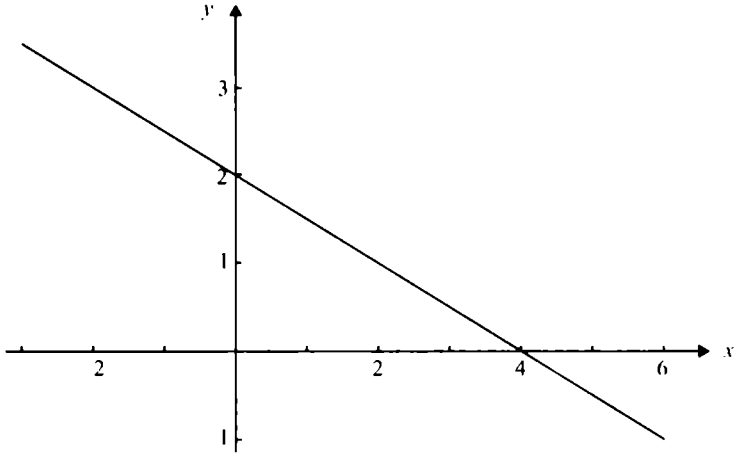
Solución.

Los valores al origen son:

Si $x = 0$ entonces $y = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)(0) = 2 - 0 = 2$, es decir, uno de los valores al origen es el punto $(0, 2)$.

Si $y = 0$ y se sustituye este valor en la función, tenemos que $0 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)x$, y despejando la variable de la ecuación tenemos que $x = 4$, es decir, el punto (4,0) pertenece a la gráfica de la función dada.

Se colocarán estos dos puntos en un plano cartesiano y trazaremos la recta por estos dos puntos. Así, la gráfica de $= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)x$, es la siguiente:



Dominio = Reales Imagen = Reales

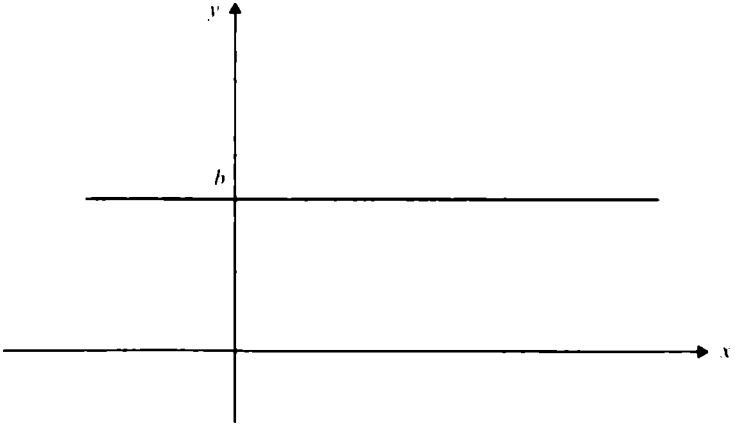
Función constante

Si en la función lineal $f(x) = mx + b$, $m = 0$, se obtiene

$$f(x) = (0)x + b$$
$$f(x) = b$$

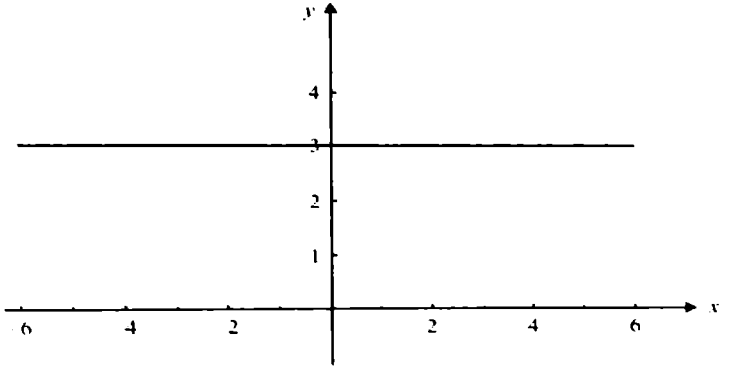
La gráfica de esta función es una recta que es paralela al eje de las x (la pendiente es cero) y que intersecta al eje y, en $y = b$.

Su gráfica es:



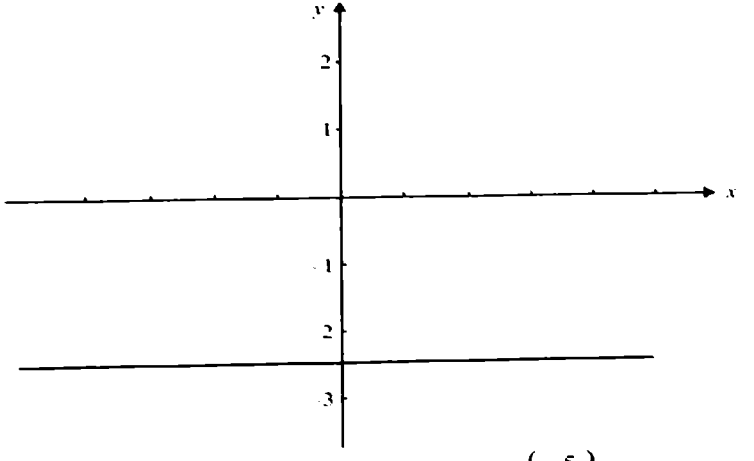
A esta función se le llama función constante, y su dominio = reales e imagen = $\{b\}$.

7. Se grafica la función $y = 3$ y se da su dominio e imagen.



Dominio = Reales Imagen = $\{3\}$

8. Se grafica la función $y = -\frac{5}{2}$ y se da su dominio e imagen.



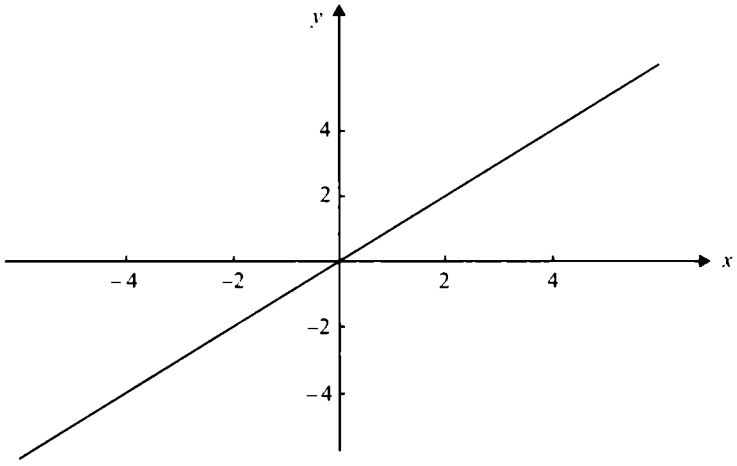
Dominio = Reales Imagen = $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

Función identidad

En la función lineal $f(x) = mx + b$, $m = 1$ y $b = 0$, se obtiene

$f(x) = (1)x + 0$
$f(x) = x$
o $y = x$

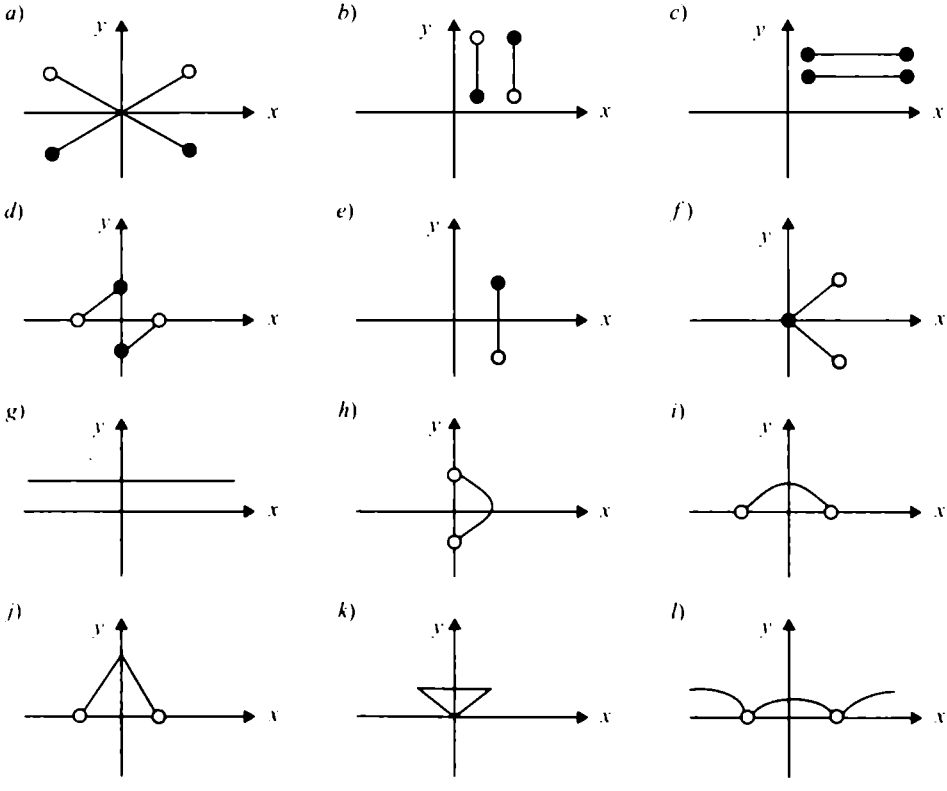
que también es la ecuación de una recta cuya pendiente es 1, intersecta al eje de las x en el origen (0,0) y su gráfica es



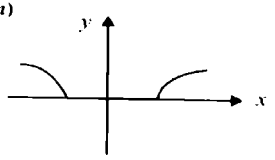
Dominio = Reales Imagen = Reales

Ejercicios.

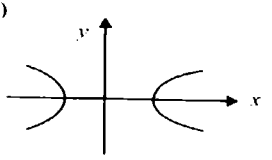
1. De las siguientes relaciones dadas gráficamente, indicar si son o no funciones.



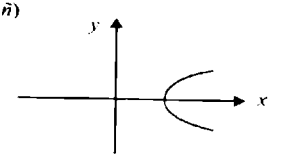
m)



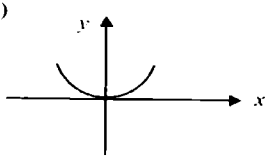
n)



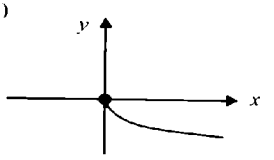
ñ)



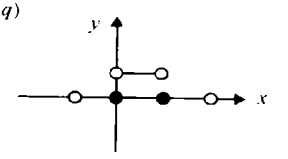
o)



p)

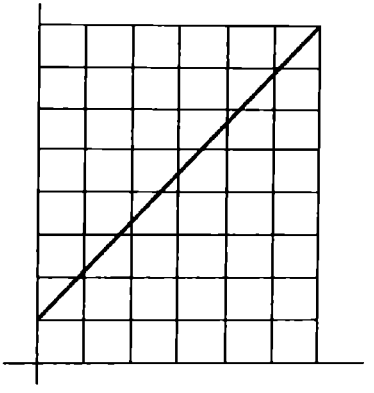


q)

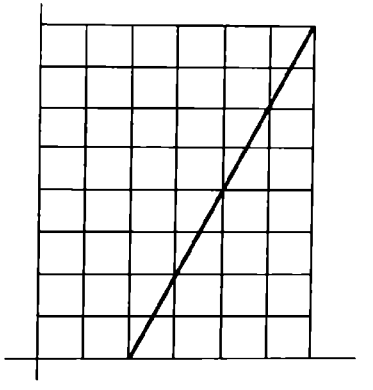


2. Estimar la pendiente de cada recta dada gráficamente.

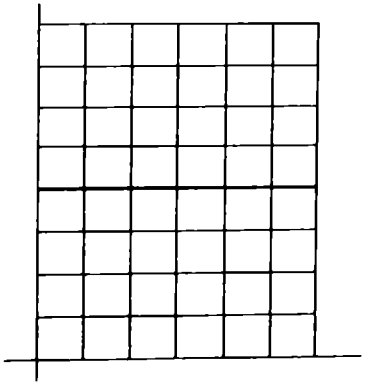
a)



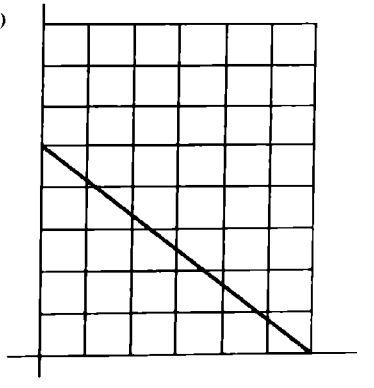
b)



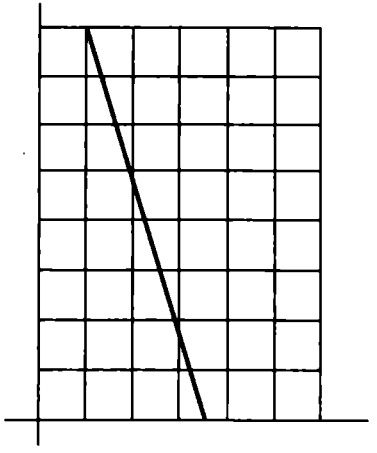
c)



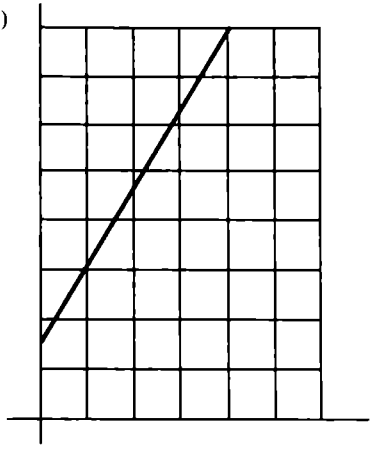
d)



e)

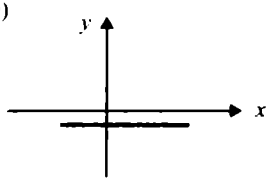


f)

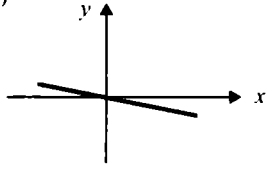


3. Indicar el signo de la pendiente de la recta dada gráficamente.

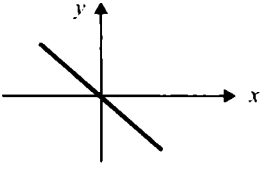
a)



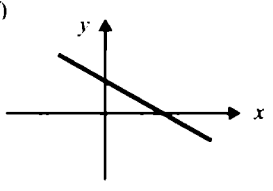
b)



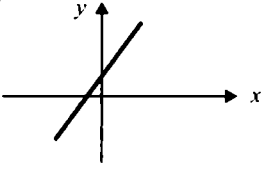
c)



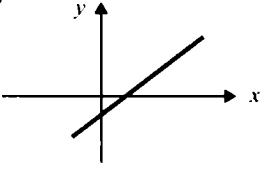
d)



e)

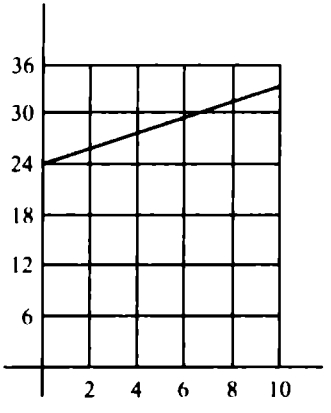


f)

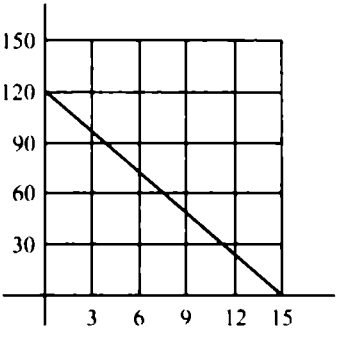


4. Dar un valor aproximado de la pendiente de la recta dada gráficamente.

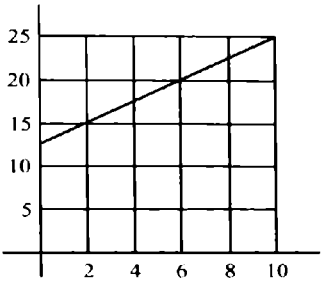
a)



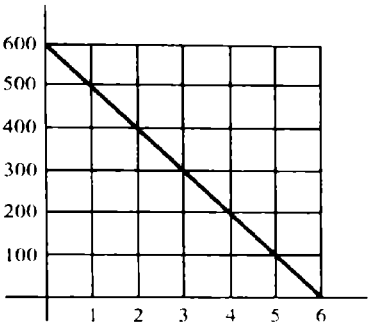
b)



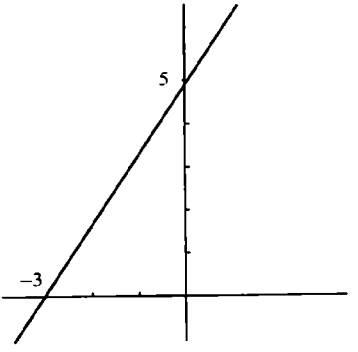
c)



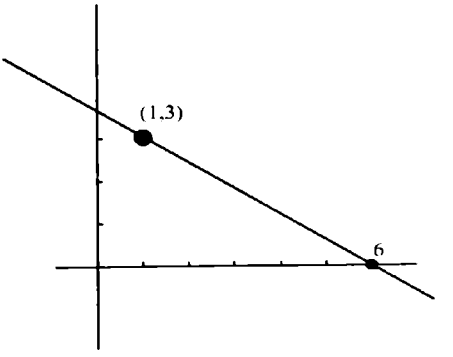
d)



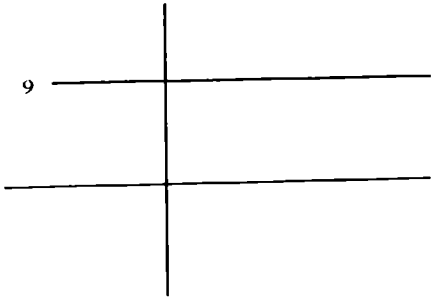
e)



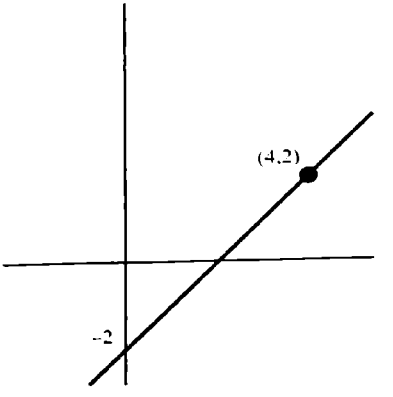
f)



g)



h)



5. Si la gráfica de $2x + 3y = 6$ se da en la siguiente figura, contestar con precisión las siguientes preguntas y justificar su respuesta. No hacer una estimación de la gráfica para contestar.

   a) Obtener $f(0), f(-2), f(4)$.

   b) ¿El punto $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ pertenece a la gráfica?

   c) ¿El punto $\left(-2, \frac{10}{3}\right)$ pertenece a la gráfica?

   d) ¿En qué valores de x cruza al eje de las x?

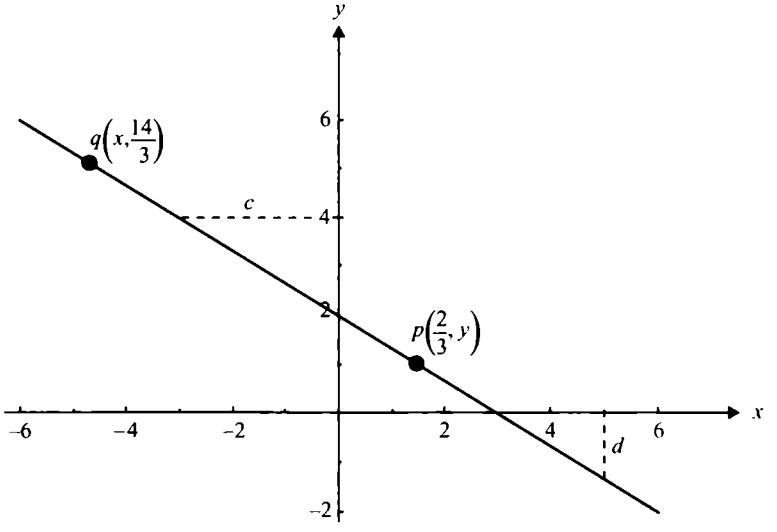
   e) ¿En qué valores de y cruza al eje de las y?

   f) Si el punto $\left(a, \frac{4}{3}\right)$ pertenece a la gráfica de $f(x)$ obtener el valor de a.

   g) Si el punto $(-5, b)$ pertenece a la gráfica de $f(x)$ obtener el valor de b.

   h) ¿Cuál es la distancia marcada por c en la gráfica?

   i) ¿Cuál es la distancia marcada por d en la gráfica?



6. Si la relación que existe entre los grados Fahrenheit (F)y los grados Celsius (C) es una relación lineal y si se sabe que 0 °C son –32 °F y si 100 °C equivale a 212 °F:

   a) Expresar los grados Fahrenheit (F) en función de los grados centígrados.

   b) Si se tiene una temperatura de 28 °C, ¿cuál es su equivalente en grados Fahrenheit.

c) Si se tiene una temperatura de 122 °F, ¿cuál es su equivalente en grados C?
d) Graficar la relación lineal.

7. Una compañía compró un equipo computacional en $15,000 y se supone que tiene un valor de rescate de $3,200 al cabo de 8 años. El valor se deprecia linealmente de $15,000 a $3,200:

a) Encontrar la función lineal $V = f(t)$ que relacione el valor V en dólares con el tiempo t en años.
b) Obtener $f(4)$ y $f(8)$, los valores de la computadora después de cuatro años y ocho años respectivamente. En términos prácticos explicar qué representan estos valores.
c) Obtener la pendiente de la gráfica de f. En términos prácticos, ¿qué representa la pendiente?
d) Graficar f para valores de t entre 0 y 8.
e) ¿A los cuántos años el equipo tendrá la tercera parte de su valor original? ¿A los cuántos años se depreciará totalmente?

8. Una empresa compró un camioneta en $230,000 pesos y se supone que pierde su valor (V), es decir, se deprecia a través de los años. Si la depreciación es lineal y al cabo de tres años el valor de la camioneta es de $120,000 pesos:

a) Obtener la función lineal $V = f(t)$ que relacione V en pesos con el tiempo en años.
b) Obtener $V(2)$, $V(5)$.
c) Como $V = f(t)$ es una función lineal, ¿cuál es la pendiente? En términos prácticos, ¿qué indica la pendiente?
d) ¿A los cuántos años el auto tiene la mitad de su valor? ¿A los cuántos años se deprecia totalmente?

9. Suponga que tiene un presupuesto de $2,500 pesos para comprar refrescos y cervezas, cuyos precios por artículo son $5.00 y $10.00 pesos respectivamente:

a) Escriba una ecuación que exprese la relación entre el número de refrescos y cervezas que se pueden comprar. Se dice que la ecuación que resulte es la "ecuación que restringe el presupuesto".
b) Graficar la relación anterior.
c) Si el presupuesto es el doble, graficar la regla que restringe el presupuesto en el mismo eje de coordenadas.
d) A partir del presupuesto original que es de $2,500, suponga que el precio del refresco sube al doble, graficar la nueva regla que restringe el presupuesto en el mismo eje de coordenadas.

10. Una nutrióloga necesita preparar una dieta especial que proporcione 25 gr de proteína. Si tiene dos tipos de mezclas y una de ellas proporciona el 25% de proteínas y la otra el 18% de proteínas:

    a) ¿Qué combinación de cada mezcla proporcionará los 25 gr que se necesitan?
    b) Graficar la función que resulte del inciso anterior.

11. Una agencia de maquinaria agrícola renta un tractor a $500.00 diarios más $20.00 por km, su competidor más cercano renta el mismo equipo a $550.00 más $15.00 por km.

    a) En cada caso, escriba una fórmula que dé el costo de la renta del tractor por día como una función de la distancia recorrida.
    b) Graficar ambas funciones en el mismo eje de coordenadas.
    c) ¿Cómo se podría decidir cuál agencia conviene elegir?

12. En una empresa se desea lanzar un producto, el departamento de mercadotecnia asegura que el costo variable para producir dicho artículo es de $19.50 y el costo fijo es de $1,250. Expresar el costo de producir dichos artículos en función del número de artículos producidos.

13. En física se sabe que (ley de Hooke) la relación entre el alargamiento S de un resorte y el peso W que lo ocasiona es lineal (principio sobre el cual se construyen las escalas de dinamómetro). Si un peso de 20 libras hace que el resorte se alargue 2 pulgadas (considere que sin carga el alargamiento del resorte es cero):

    a) Escriba una ecuación que exprese la relación entre W y S.
    b) ¿Cuál es la pendiente de la recta? En términos prácticos, qué representa este valor?
    c) Obtener el alargamiento del resorte con cargas de 12 y 35 libras.
    d) Graficar la función.

14. El gerente de una empresa que fabrica molduras para pinturas estima que el costo de sostener la compañía es de $1,200 diarios con producción nula y $650 diarios cuando se producen 1,000 molduras:

    a) Suponiendo que el costo total diario C tiene relación lineal con la producción total diaria, escribir una ecuación que relacione estas dos cantidades.
    b) ¿Cuál es el costo diario de una producción de 4,000 molduras?
    c) Graficar la función.
    d) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica f? En términos prácticos, qué representa esta gráfica?

15. La expresión $W = 5.5\ h - 220$ da una aproximación de peso W en libras de una persona de altura h en pulgadas. considerando que la persona mide 5 pies de alto, graficar esta función para valores de 60 y 80 pulgadas.

16. La siguiente tabla muestra las tarifas para publicar avisos de ocasión por espacio de cinco días, en el periódico *El Clarín*. El precio varía de acuerdo al número de palabras que se utilizan:

Núm. de palabras	5	7	9	11	13	15	17	19
Precio	29.45	36.35	43.25	50.15	57.05	63.95	70.85	77.75

a) ¿Cuánto aumenta el precio a medida que aumentan las palabras?
b) ¿El aumento en el precio es constante?
c) ¿Cuánto es el incremento por palabra?
d) Si p es el precio y n el número de palabras, escriba una ecuación para el precio p como una función de n.
e) Trazar la gráfica del precio p contra el número de palabras n.
f) ¿Cuál será el precio que tiene que pagar una persona si el anuncio que desea colocar es de 25 palabras?

17. En los ejercicios *a*), *b*), *c*) y *d*) se da el valor en dólares de un producto en el 2005 y la razón a la cual se espera que crezca el valor del artículo durante los próximos cinco años. Use esta información para escribir una ecuación lineal que de el valor V en dólares del producto, en función del tiempo t en años. Considere que $t = 0$ represente el año 2005.

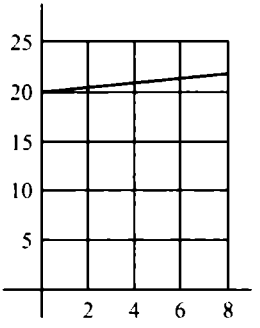
	Valor en el 2005	Razón a la cual crece
a)	\$3,650.00	\$125 / año
b)	\$267.00	\$3.60 / año
c)	\$30,500	\$1,000 / año
d)	\$367,000	\$6,350 / año

18. En los ejercicios *a*), *b*), *c*), y *d*) relacione cada historia con las gráficas dadas y determine la pendiente indicando que interpretación se le puede dar en la situación:

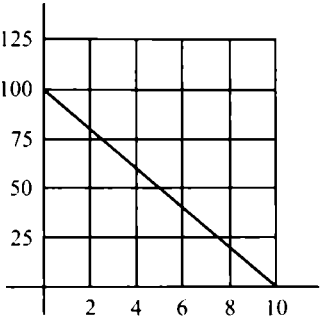
a) Una persona paga \$10.00 por semana a un amigo para liquidar un préstamo de \$100.00.
b) A un empleado se le paga \$12.50 por hora más \$1.25 por cada unidad producida por hora.

c) Un representante de ventas recibe \$20 por día para comidas más \$0.25 por cada km que viaja.

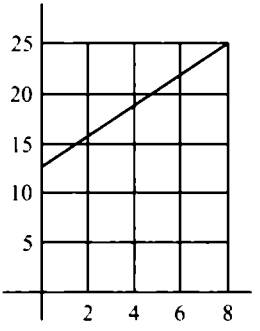
d) Una computadora cuyo valor es de \$600 se deprecia \$100.00 por cada año.



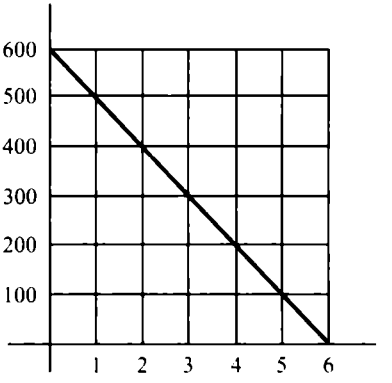
Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4

Sección 11.5

GRÁFICA DE FUNCIONES POLINOMIALES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el alumno deberá ser capaz de:

1. Graficar una función polinomial de grado n, donde $1 \leq x \leq 5$.
2. Dada una gráfica de una función polinomial identificar de qué grado es.
3. Dada la gráfica de una función polinomial dar su ecuación.
4. Definir función creciente y decreciente.
5. Dada la gráfica de una función polinomial identificar en qué intervalos crece y en cuáles decrece.

Definición. Una expresión de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

o

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde n es entero positivo, $a_n \neq 0$ y $a_0, a_1, \ldots a_n$ son números reales, es llamada función polinomial de grado n.

Las siguientes son ejemplos de funciones polinomiales.

$f(x) = 8$ es una función polinomial de grado cero o una función constante.
$f(x) = 3x - 1$ es una función polinomial de grado uno.
$f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ es una función polinomial de grado dos.
$f(x) = x^3 - 1$ es una función polinomial de grado 3.

Función lineal (función polinomial de grado uno)

Una función lineal tiene la forma $y = f(x) = mx + b$
y su gráfica es una línea recta tal que:

m es la pendiente o razón de cambio de y con respecto a x.
b es la intersección de la recta con el eje de las y o el valor de y cuando x es cero.

Observaciones.

a) Intersección con el eje de las y o valor al origen cuando $x = 0$. Son los puntos de la recta donde cruza al eje y, es decir, aquellos valores de y cuando $x = 0$.

$$y = mx + b$$
$$y = m(0) + b$$
$$y = b$$

b) Intersección con el eje de las x o el valor al origen cuando $y = 0$. Son los puntos de la recta donde cruza al eje x, es decir, aquellos valores de x cuando $y = 0$.

$$y = mx + b$$
$$(0) = mx + b$$
$$-b = mx$$
$$x = -b/m$$

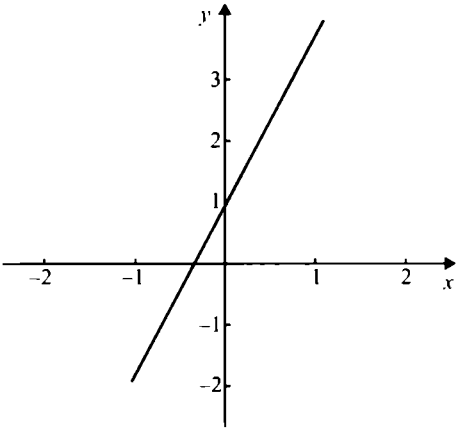
Ejemplos.

Graficaremos las siguientes rectas, para ellos se encontraran los valores al origen.

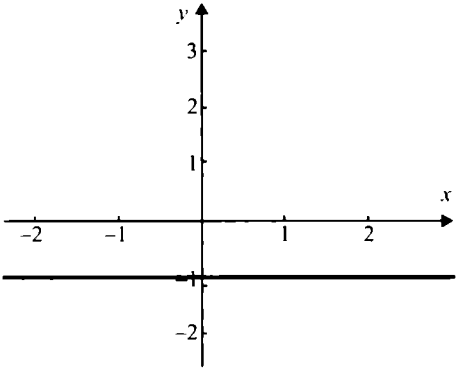
1. $y = 3x + 1$

Valores al origen:

$(0,1), \left(\frac{1}{3},0\right)$

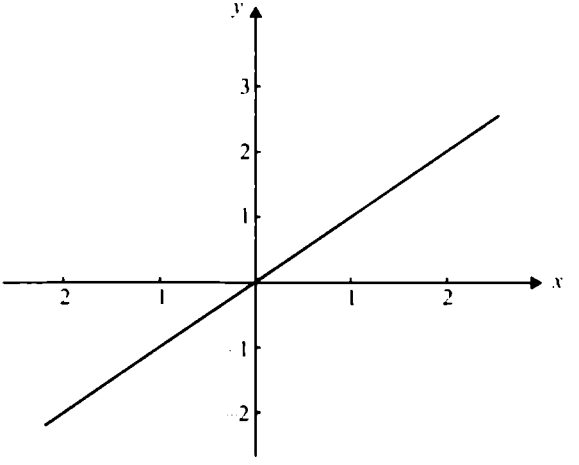


2. $y = -1$ (función constante)



3. $y = x$ (función identidad)

Solamente hay un valor al origen que es el (0,0) y daremos otro valor a x, por ejemplo si $x = 1$ $y = 1$ y otro punto es el (1,1).



Función cuadrática

Sean a, b y c números reales con $a \neq 0$.

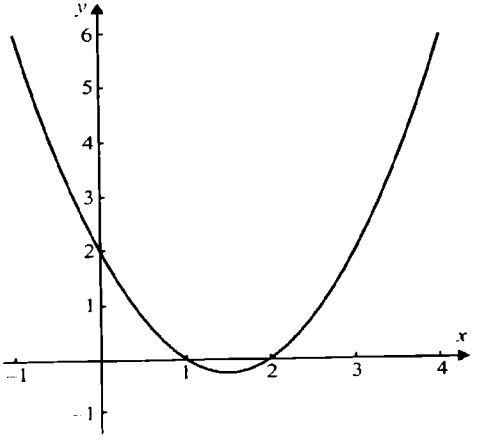
La función $f(x) = ax^2 + bx + c$

o $y = ax^2 + bx + c$

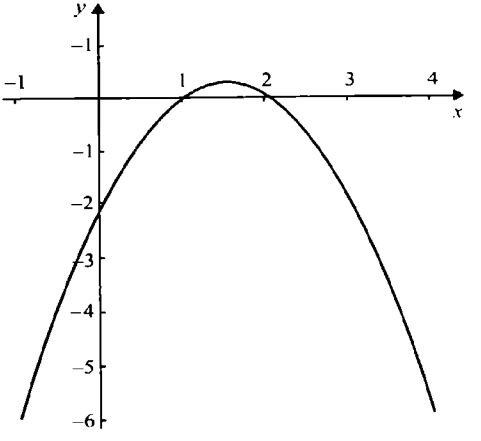
es una función cuadrática y su gráfica es una parábola.

Para graficar una función cuadrática tomaremos en cuenta las siguientes observaciones:

1. Si en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, a > 0, entonces la parábola se abre hacia arriba o si a < 0, la parábola se abre hacia abajo.



$a > 0$



$a < 0$

2. Intersecciones con el eje de las y o valor al origen cuando $x = 0$.
Son los puntos de la parábola donde cruza al eje y, es decir, aquellos valores de y cuando $x = 0$.

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$y = f(0) = a(0)^2 + b(0) + c$$
$$y = f(0) = c$$

3. Intersecciones con el eje x, o valor al origen cuando $y = 0$.

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

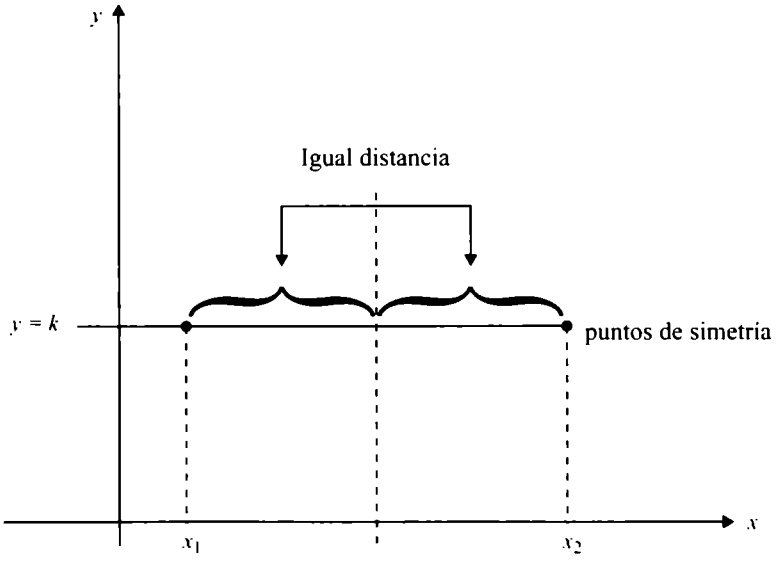
Si $y = 0$, entonces

$$0 = ax^2 + bx + c$$

Si al resolver la ecuación se obtiene:

a) dos valores reales, la parabóla cruzará al eje x en esos valores.
b) una única solución, la parábola tocará en ese valor al eje de las x.
c) dos soluciones complejas, la parábola no tocará ni intersectará al eje de las x.

4. Puntos de simetría, el eje de simetría y el vértice.



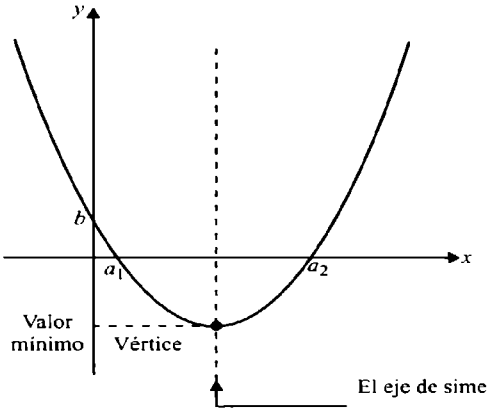
El eje de simetría

La ecuación del eje de simetría de la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es $x = \frac{-b}{2a}$ y su vértice es $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

5. En resumen podemos decir que para graficar la función cuadrática

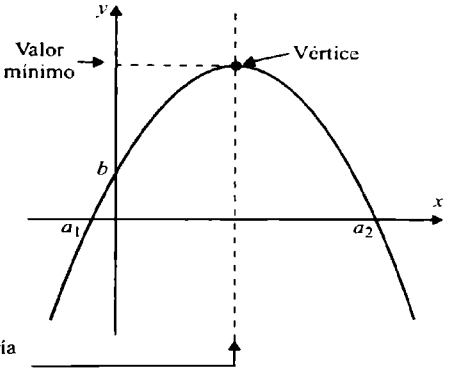
$y = ax^2 + bx + c$, se procederá de la siguiente manera:

a) Determinar si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo.
b) Obtener el punto donde intersectará el eje de las y $(0, c)$.
c) Obtener los puntos donde intersectará al eje de las x.
d) Obtener el vértice y el eje de simetría.
e) Graficar los puntos obtenidos en los incisos *b*) y *c*) de este procedimiento.
f) Graficar la curva.



El eje de simetría

$$x = \frac{-b}{2a}$$



$a > 0$ se abre hacia arriba

$a < 0$ se abre hacia abajo

El valor de b es donde la función cuadrática cruza al eje y, y los valores de a_1 y a_2 son los valores de x donde la gráfica de la función cruza al eje x. También de la gráfica de f se puede observar el dominio y la imagen.

Ejemplo.

4. Se grafica $y = x^2 - 2x + 1$

La función es una parábola que se abre hacia arriba, ya que $a = 1$ y es mayor a cero.
Valores al origen:

Si $x = 0$ entonces

$y = x^2 - 2x + 1$
$y = (0)^2 - (0) + 1$
$y = 1$

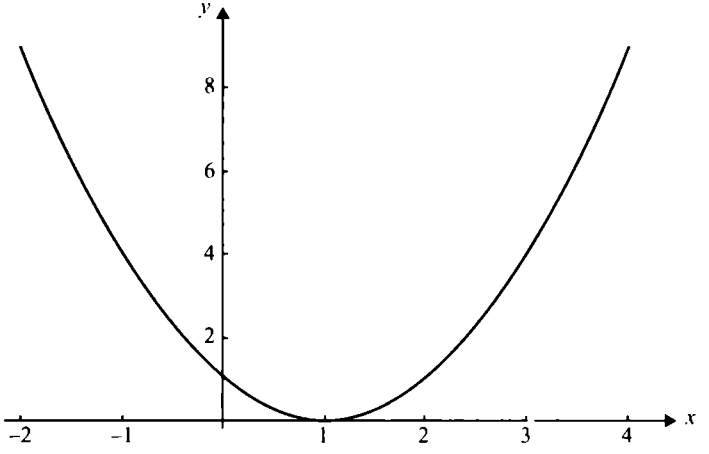
Si $y = 0$ entonces

$y = x^2 - 2x + 1$
$0 = x^2 - 2x + 1$
$0 = (x - 1)(x - 1)$
Por lo que la ecuación tiene un única solución: $x = 1$ y la gráfica de la función cuadrática tocará sólo en un punto al eje de las x, cuando $x = 1$.

Vértice:

$V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ y como $a = 1$ y $b = -2$ entonces $\frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1$

y así $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(1) = (1)2 - 2(1) + 1\ 0$, asi el vértice es $V(\ 1,0)$ y la gráfica es la siguiente.



Dominio = Reales Imagen = $(0, \infty)$

5. Se grafica $y = x^2 - x - 2$ y dar su dominio e imagen.
La función es una parábola que se abre hacia arriba ya que $a = 1$ es positivo.
Valores al origen:

Si $x = 0$ entonces
$y = (0)^2 - (0) - 2$
$y = -2$

Si $y = 0$ entonces $0 = x^2 - x - 2$
$0 = (x - 2)(x + 1)$
Por lo que la ecuación tendrá dos soluciones: $x = 2$ y $x = -1$

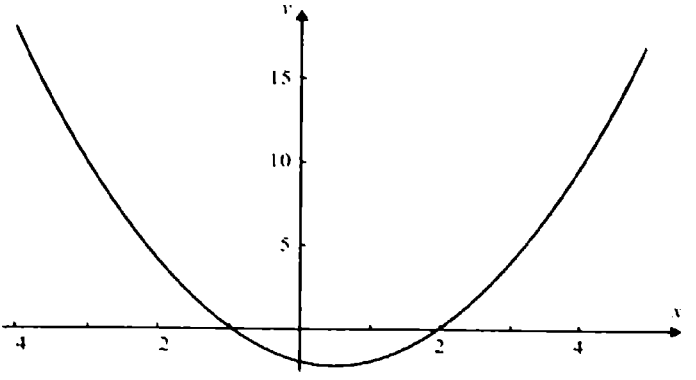
Vértice: $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Como $a = 1$ y $b = -1$ entonces $\frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2(1)} = \frac{1}{2}$

y $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) - 2 = -\frac{9}{4}$

así, el vértice es $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

La gráfica es la siguiente:



Dominio = Reales Imagen = $\left(-\frac{9}{4}, \infty\right)$

6. Se grafica de $y = -x^2 - x - 1$ y dar su dominio e imagen.

Como $a = -1$ y es negativa, entonces la función es una parábola que se abre hacia abajo.
Valores al origen:

Si $x = 0$ entonces
$y = -(0)^2 - (0) - 1$
$y = -1$

Si $y = 0$ entonces $0 = -x^2 - x - 1$
o $0 = x^2 + x + 1$

Esta ecuación tiene solución en los complejos (no tiene soluciones en los números reales) y la gráfica de la función no tocará o no cruzará al eje de las x.

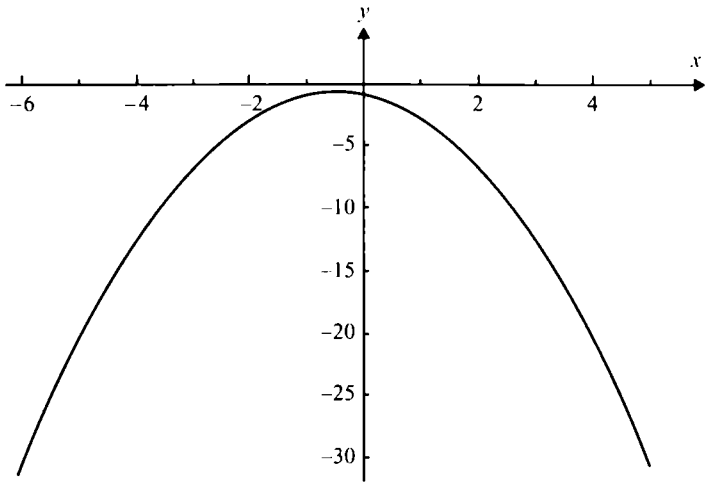
Vértice: $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Como $a = -1$ y $b = -1$ entonces $\frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2(-1)} = -\frac{1}{2}$

y $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{3}{4}$

así el vértice es $V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

La gráfica es la siguiente:



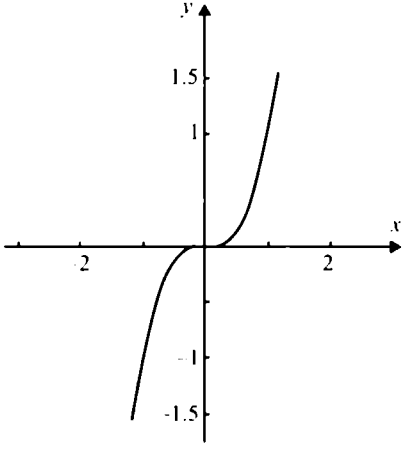
Función cúbica

Sean a, b, c y d números reales con $a \neq 0$

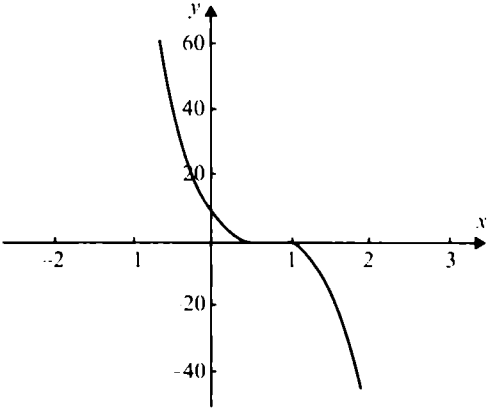
La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
o $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

es una función polinomial de tercer o función cúbica.

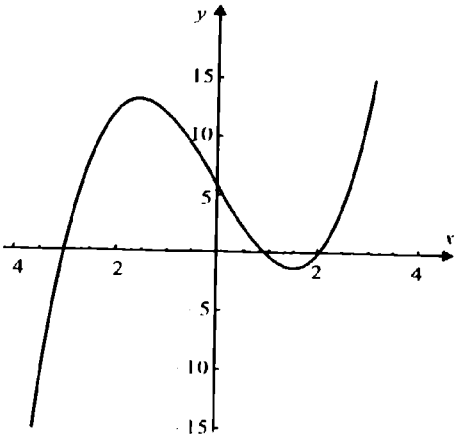
La gráfica de una función cúbica puede tener una de las siguientes formas:



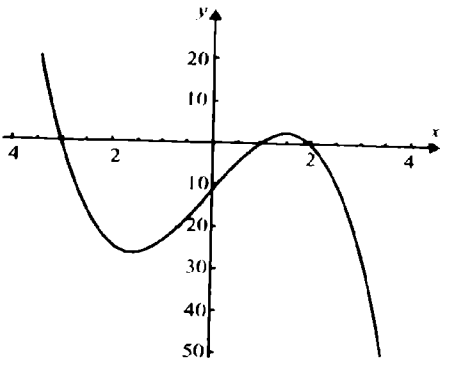
$y = x^3$



$y = -(3x - 2)^3 = -(27x^3 - 52x^2 + 36x - 8)$



$y = x^3 - 7x + 6$



$y = -2x^3 + 14x - 12$

Observaciones.

a) Si el coeficiente de x^3 es positivo entonces los valores de y empezarán desde menos infinito, o si el coeficiente x^3 de es negativo los valores de y empezarán desde más infinito.

b) Intersección con el eje de las y, o valor al origen cuando $x = 0$.
Son los puntos de la función cúbica donde cruza al eje de las y, es decir, son aquellos valores de y cuando $x = 0$.

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$y = f(0) = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d$$
$$y = f(0) = d$$

es decir, la gráfica de $y = f(x)$ cruza al eje de las y en el punto $(0, d)$.

c) Intersecciones con el eje de las x, o valor al origen cuando y = 0.

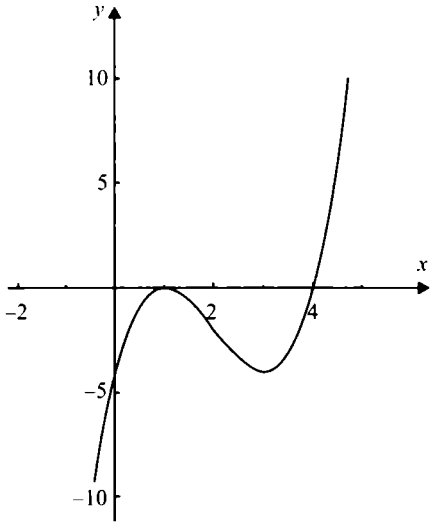
$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f(0) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

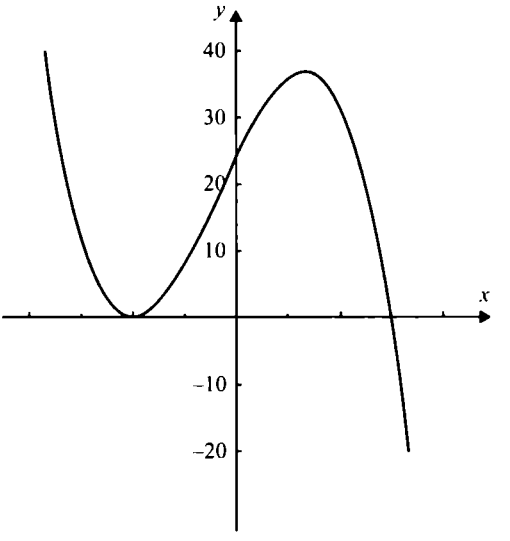
Si al resolver la ecuación cúbica se obtienen tres raíces reales, la gráfica de la cúbica cruzará o intersectará al eje de las x en esos tres valores. Si se obtiene una raíz real y dos complejas, la gráfica cruzará o intersectará en la raíz real. Si la ecuación cúbica tiene un valor de multiplicidad triple cruzará al eje de las x en ese valor.

d) ¿Cómo es la gráfica de una función cúbica si la ecuación cúbica correspondiente tiene una raíz de multiplicidad doble?, ¿y si x es multiplicidad triple?

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ $\quad$ $f(x) = -2x^3 - 2x^2 + 16x + 24$

$f(x) = (x - 1)^2 (x - 4)$ $\quad$ $f(x) = -2(x - 3)(x + 2)^2$

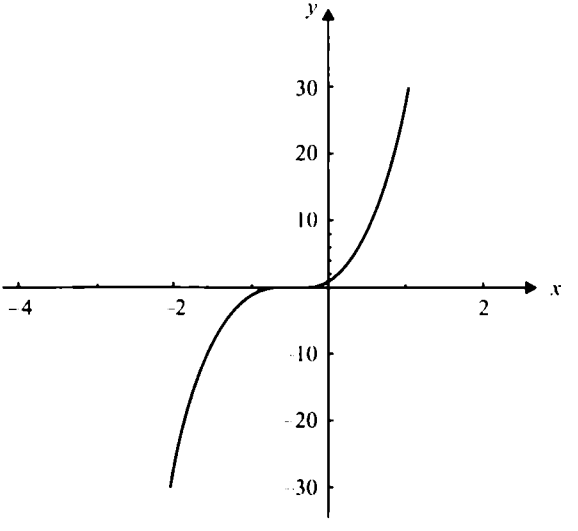




$f(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

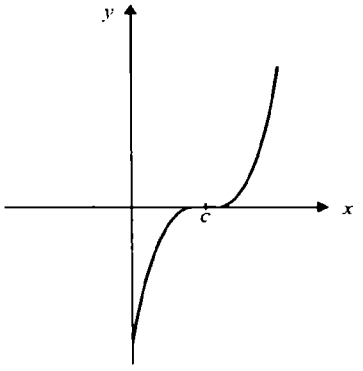
$f(x) = (2x + 1)(2x + 1)(2x + 1)$

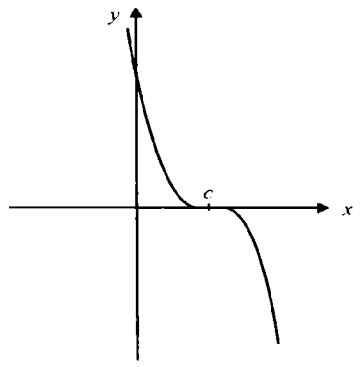
$f(x) = (2x + 1)^3$



e) Si $(x - c)^m$ es un factor de la función $f(x)$, ¿cómo es la gráfica de $f(x)$ cerca del punto $(c, 0)$?

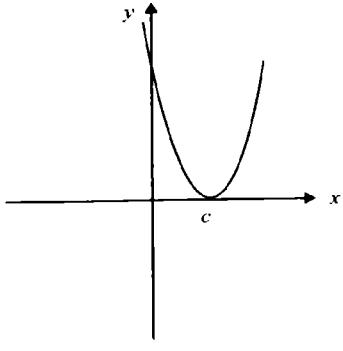
i) Si m es impar con $m \neq 1$, en $(x - c)^m$, la forma de la gráfica de $f(x)$ cerca del punto $(c, 0)$ puede ser de una de las siguientes formas:

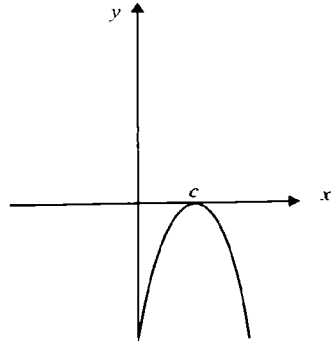




Es decir, cerca del punto $(c, 0)$ la gráfica es como la de $f(x)$ cerca de $x = 0$.

ii) Si m es par en $(x - c)^m$, la forma de la gráfica de $f(x)$ cerca del punto $(c, 0)$ puede ser de una de las siguientes formas:





Ejemplos.

Graficar las siguientes funciones:

7. $y = -(2x^3 - 2x^2 + 4x - 4)$

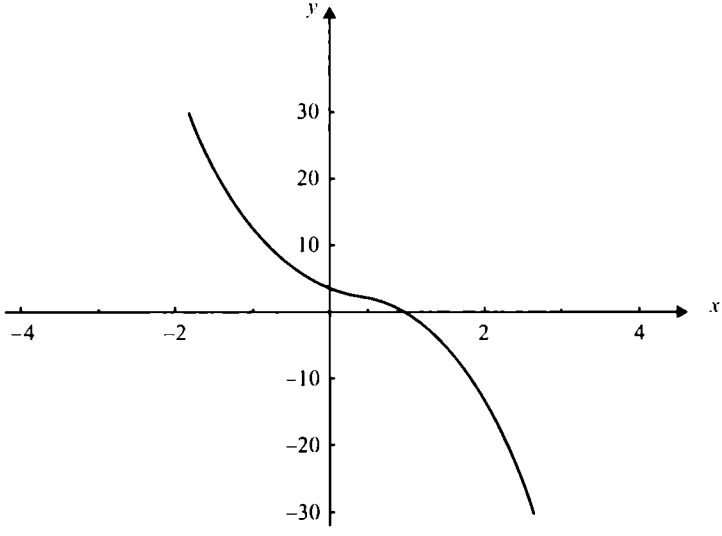
La expresión es una función cúbica y como el coeficiente de x^3 es negativo, los valores de y empezarán en más infinito.
Valores al origen:

Si $x = 0$ entonces
$y = -(2(0)^3 - 2(0)^2 + 4(0) - 4)$

Si $y = 0$ entonces $0 = -(2x^3 - 2x^2 + 4x - 4)$
$0 = -(2x^2(x - 1) + 4(x - 1))$
$0 = -(x - 1)(2x^2 + 4)$

Por lo que la ecuación tiene una solución real: $x = 1$ y dos soluciones complejas. La gráfica de la función cruzará el eje de las x en $x = 1$.

Y la gráfica de la función es:



8. $y = 6x^3 - 21x^2 + 12x + 12$

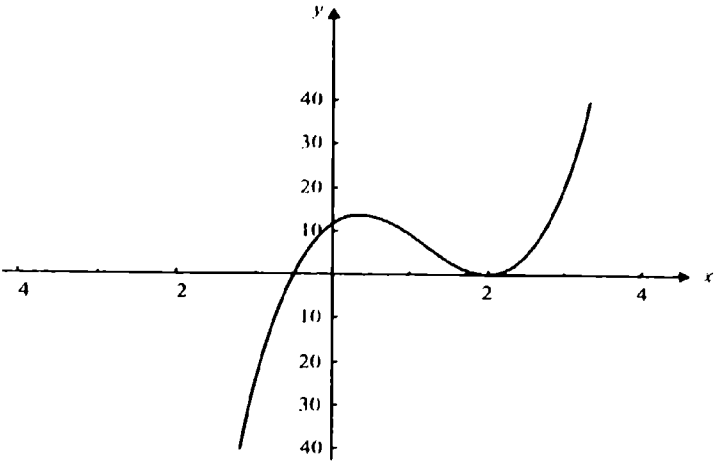
La expresión es una función cúbica cuyos valores de y empezarán en menos infinito, ya que el coeficiente de x^3 es positivo.
Valores al origen:

Si $x = 0$ entonces
$y = 6(0)^3 - 21(0)^2 + 12(0) + 12$
$y = 12$

Si $y = 0$ entonces $0 = 6x^3 - 21x^2 + 12x + 12$
$0 = (6x + 3)(x - 2)(x - 2)$
$0 = (6x + 3)(x - 2)$

Por lo que la ecuación tiene una solución real de multiplicidad doble en $x = 2$ y otra en $x = -\frac{1}{2}$. La gráfica de la función cruzará el eje de las x en $x = -\frac{1}{2}$ la tocará en $x = 2$.

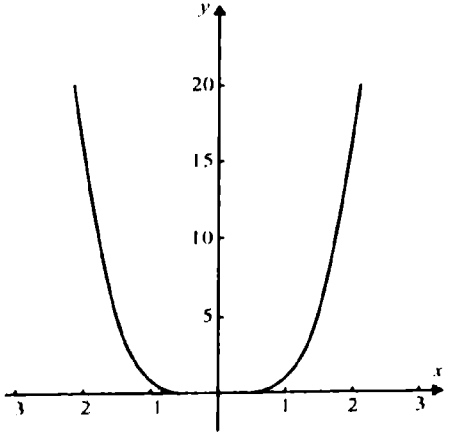
La gráfica es:



Funciones polinomiales de cuarto grado

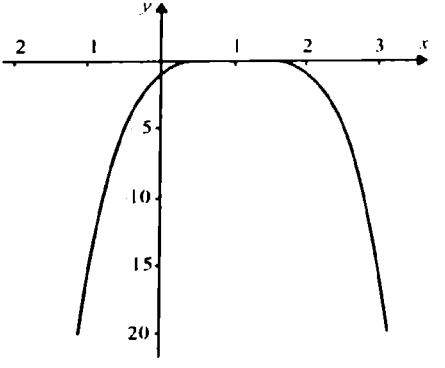
La gráfica de una función de cuarto grado puede tener una de las siguientes formas:

$y = x^4$



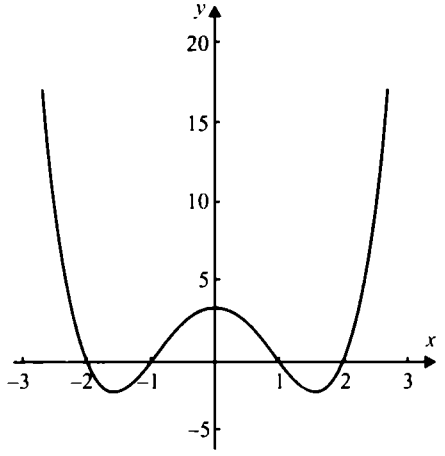
El valor donde toca el eje de las x es aquel donde $x^4 = 0$, es decir en $x = 0$.

$y = -(x - 1)^4$



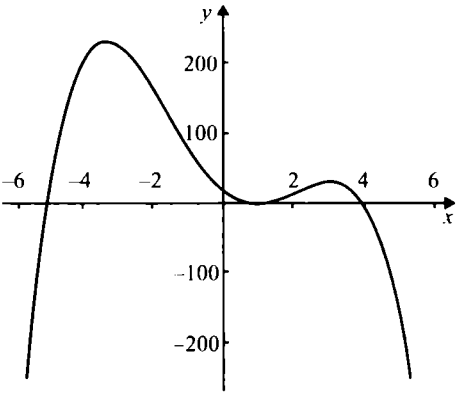
El valor donde toca al eje de las x es aquel donde $-(x - 1)^4 = 0$, es decir, en $x = 1$.

$y = x^4 - 5x^2 + 4$
$y = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$
$y = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$



Los valores donde cruza al eje de las x son aquellos donde
$0 = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$
es decir, en $x = 2$, $x = -2$, $x = 1$, $x = -1$.

$y = -(x - 1)^2 (x - 4)(x + 5)$



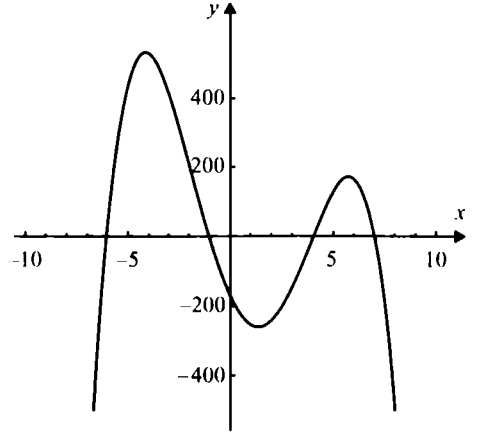
La ecuación $0 = (x - 1)^2 (x - 4)(x + 5)$ tiene como soluciones a $x = -5$, $x = 4$ y $x = 1$, esta última es de multiplicidad doble por lo que cercano al valor de $x = 1$ se tiene la forma de una pequeña parábola.

Observaciones.

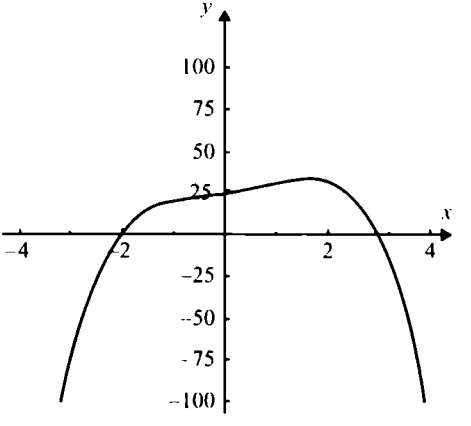
a) Si el coeficiente de x^4 es positivo entonces los valores de y empezarán desde más infinito o si el coeficiente de es negativo los valores de y empezarán en menos infinito.

b) El procedimiento para graficar estas funciones será análoga a las funciones cúbicas, donde se obtendrán los valores al origen para x y para y.

$y = -(x + 1)(x - 4)(x + 6)(x - 7)$



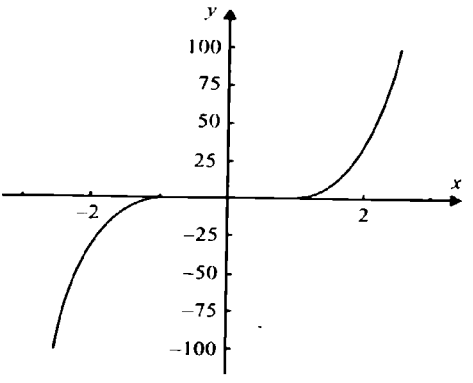
$y = -(x - 3)(x + 2)(x^2 + 4)$



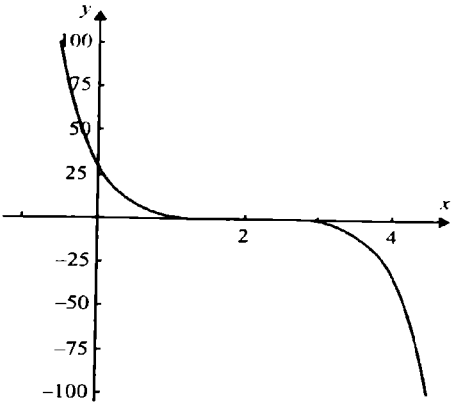
Funciones polinomiales de quinto grado

Si el coeficiente de x^5 es positivo, entonces los valores de y empezarán desde menos infinito, o si es negativo los valores de y empezarán desde más infinito.

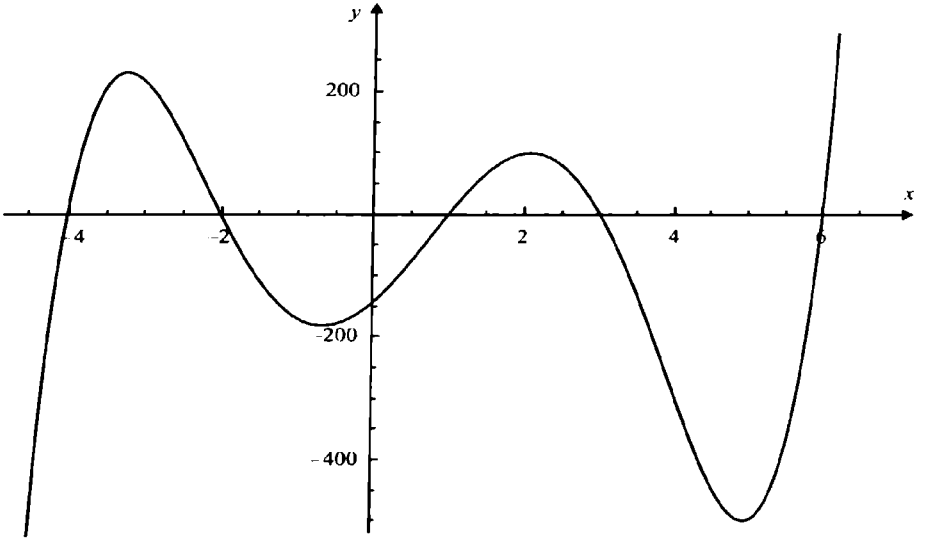
El procedimiento para graficar estas funciones será análoga a las funciones cúbicas o de cuarto grado.



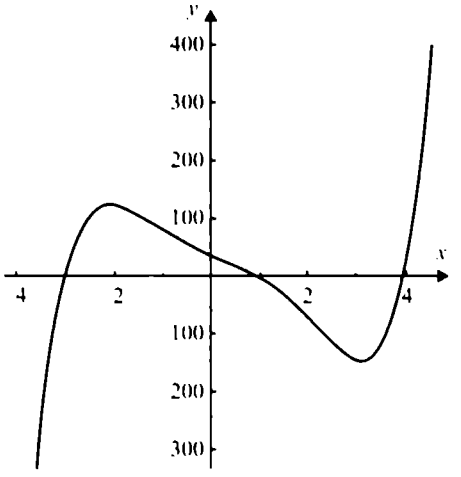
$y = x^3$



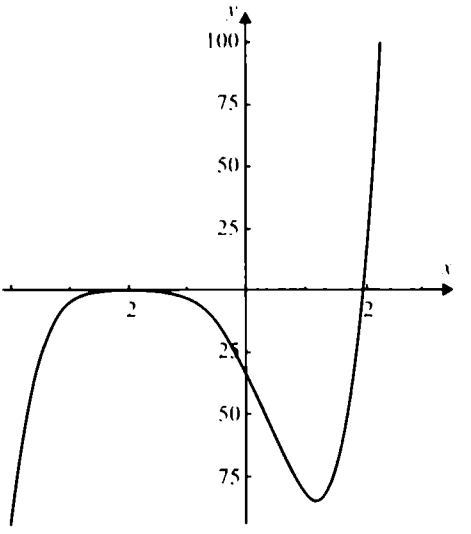
$y = -(x - 2)^5$



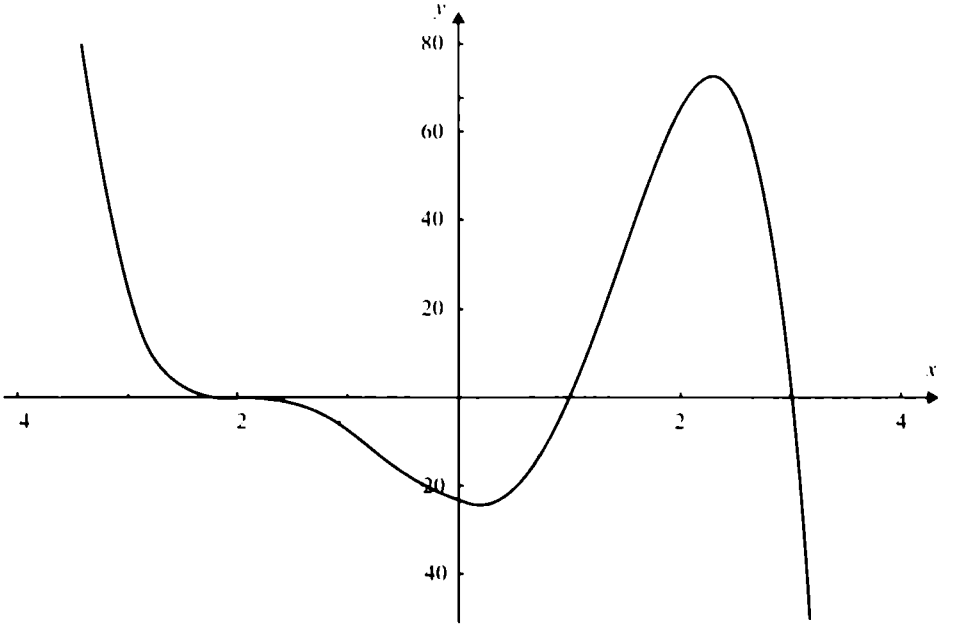
$y = (x - 1)(x + 2)(x - 3)(x - 6)(x + 4)$



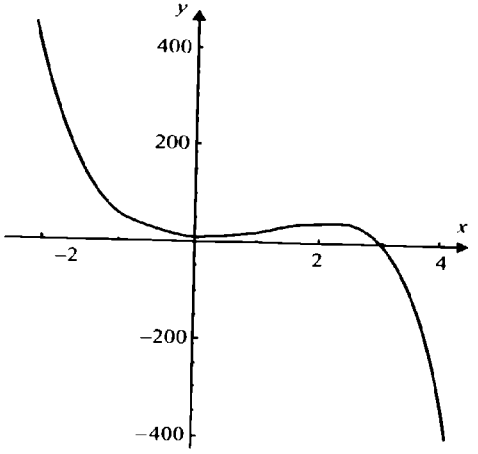
$y = (x^2 + 3)(x - 1)(x + 3)(x - 4)$



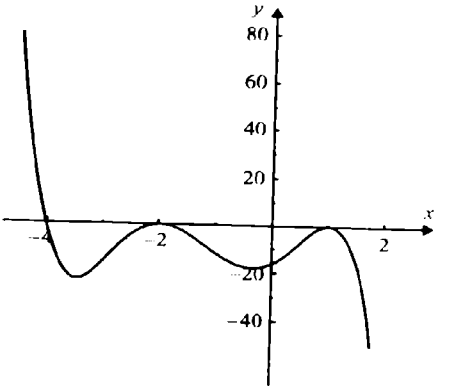
$y = (x + 4)^4(x - 2)$



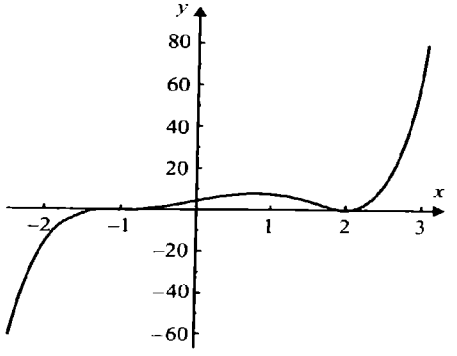
$y = (x + 2)^3(x - 1)(x - 3)$



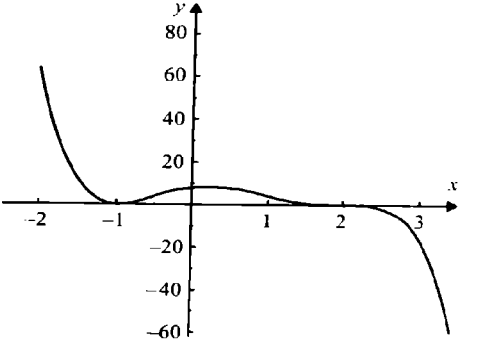
$y = -(x^2 + 1)(x^2 + 4)(x - 3)$



$y = -(x - 1)^2(x + 2)^2(x + 4)$



$y = (x + 1)^3(x - 2)^2$



$y = -(x + 1)^2(x - 2)^3$

Función creciente, decreciente o constante

Una función es creciente en un intervalo si los valores de la función $y = f(x)$ crecen o aumentan cuando la variable x crece o aumenta en el intervalo dado.

Una función es decreciente en un intervalo si los valores de la función $f(x)$ decrecen o disminuyen cuando la variable x crece o aumenta en el intervalo dado.

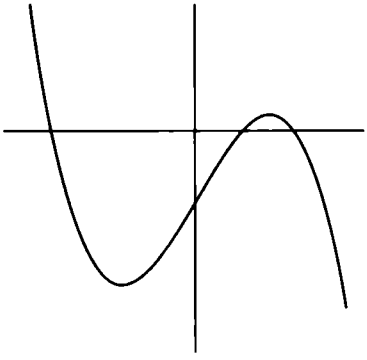
Una función es constante si los valores de $y = f(x)$ permanecen constantes cuando la variable x crece o aumenta.

Ejercicios.

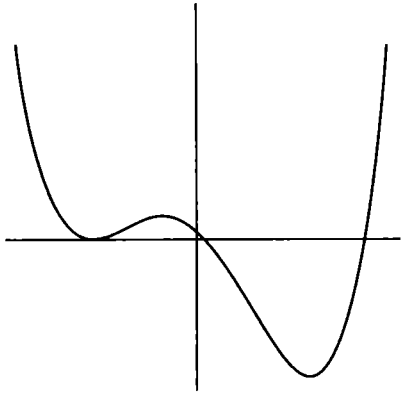
1. Para cada una de las gráficas dadas a continuación asuma que es un polinomio:

   a) Especificar para cada una de las gráficas el menor grado posible del polinomio.
   b) Indicar el signo del coeficiente del término en x de mayor exponente.

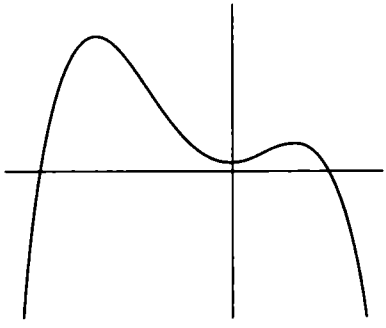
i)



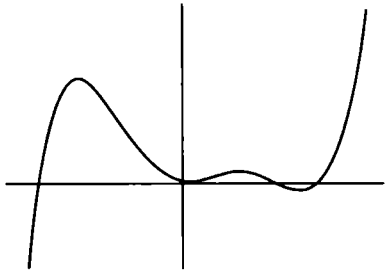
ii)



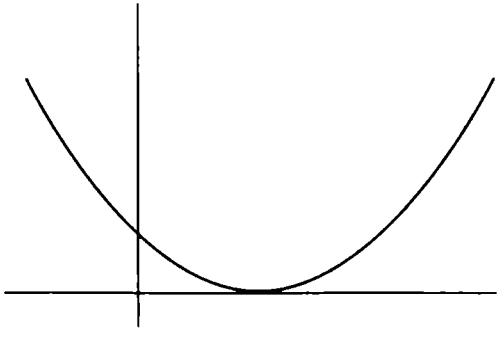
iii)



iv)



v)



2. Describir el comportamiento de las siguientes funciones cuando x crece infinitamente ($x \to +\infty$) o cuando x decrece infinitamente ($x \to -\infty$):

   a) $f(x) = x + 1$
   b) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$
   c) $f(x) = -4x^2 + 2x - 5$
   d) $f(x) = -3x^3 + 70x^2 - 20$
   e) $f(x) = x^4 + x^5$
   f) $f(x) = 20x^4 + 3x^3 - x^2 + 1000$
   g) $f(x) = 4x^4 + 5x^5$
   h) $f(x) = -3x^4 + 20x^3 - 5x^2 + x - 20$

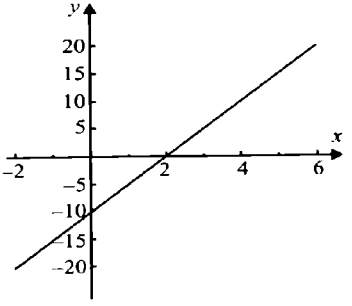
3. Graficar las siguientes funciones polinomiales:

   a) $f(x) = (x - 3)(x - 2)(x - 4)$
   b) $f(x) = 3(x^2 - 4)(x^2 - 16)$
   c) $f(x) = -3(x^2 - 16)(x^2 - 16)$
   d) $f(x) = -3(x^2 - 4)(16 - x^2)$
   e) $f(x) = 4(x - 3)^2(x^2 - 1)$
   f) $f(x) = 20x^2 - 5x + 1$

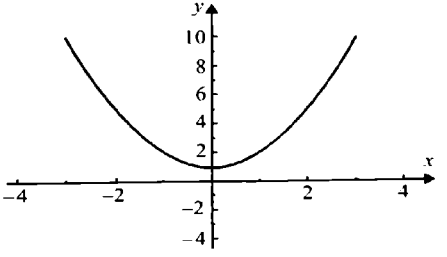
4. Para cada una de las siguientes funciones polinomiales que están dadas gráficamente, indicar con precisión (no hacer una estimación de la gráfica para contestar la pregunta):

   a) En qué valores de x cruza al eje de las x.
   b) En qué valores de y cruza al eje de las y.
   c) Dibuja con color rojo la función en donde es creciente y con azul en donde es decreciente.

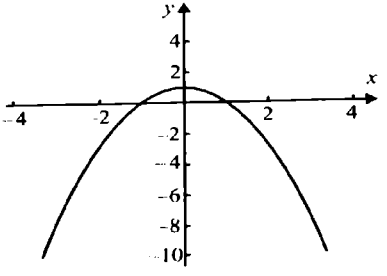
i) $y = 5x - 10$



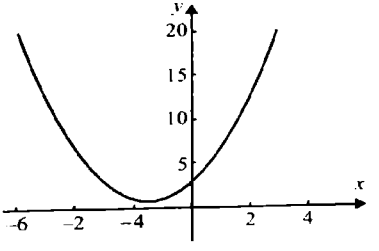
ii) $y = x^2 + 1$



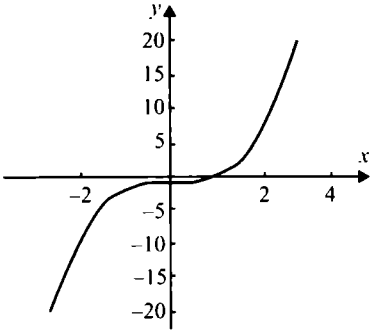
iii) $y = -x^2 + 1$



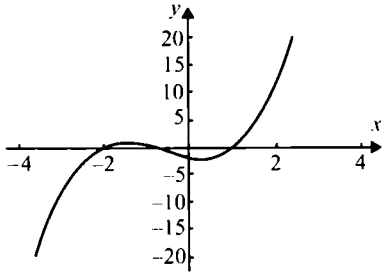
iv) $y = x^2 + 3x + 2$



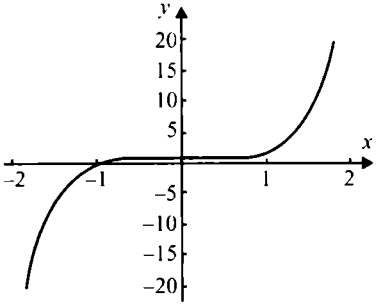
v) $y = x^3 - 1$



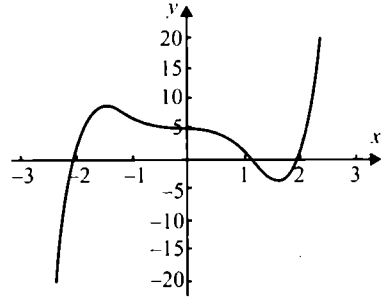
vi) $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$



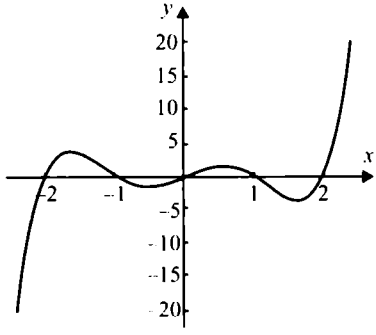
vii) $y = x^5 + 1$



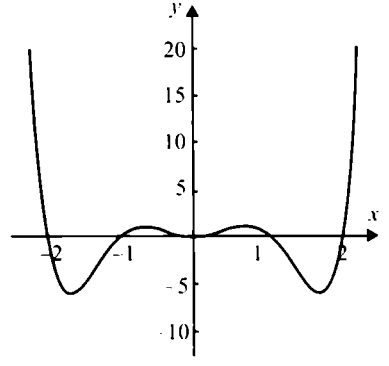
viii) $y = x^5 - 4x^3 - x^2 + 4$



ix) $y = x^5 - 5x^3 + 4x$



x) $y = (x^5 - 5x^3 + 4x)x$

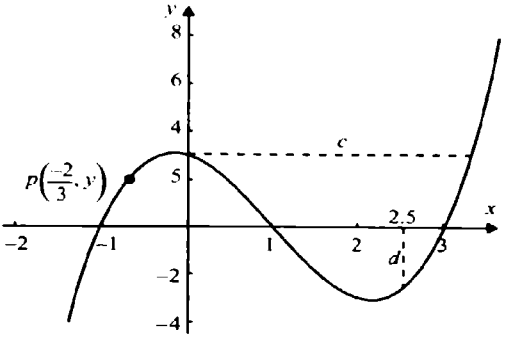


5. La gráfica de $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ se da en la siguiente figura. Contestar las siguientes preguntas con precisión. No hacer estimaciones de la gráfica para contestar las preguntas. (Justificar tu respuesta.)

   a) ¿El punto (1.5,-2) pertenece a la gráfica?

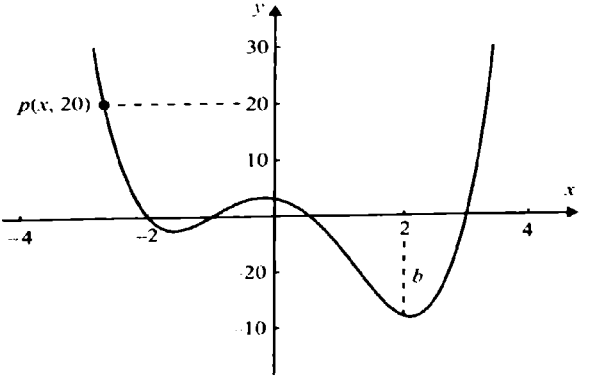
   b) ¿El punto $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$ pertenece a la gráfica?

c) ¿Cuál es la distancia marcada con *c*?
d) ¿Cuál es la distancia marcada con *d*?
e) ¿Cuál es la ordenada del punto marcado con *p*?
f) ¿En qué valores de *x* cruza la gráfica de $f(x)$ el eje de las *x*?
g) ¿En qué valores de *y* cruza la gráfica de $f(x)$ al eje de las *y*?



6. La gráfica de la función $y = x^4 - \left(\frac{1}{2}\right)x^3 - 7x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)x + 3$ se da en la siguiente figura. Contestar con precisión las siguientes preguntas. No hacer una estimación de la gráfica para contestar la pregunta. (Justifica tu respuesta.)

a) ¿El punto (1,−5) pertenece a la gráfica?
b) ¿El punto (−2.5,12) pertenece a la gráfica?
c) ¿Cuál es la distancia marcada por *b*?
d) ¿Cuál es la abcisa del punto marcado con *P*?
e) ¿En qué valores de *x* cruza la gráfica de $f(x)$ al eje de las *x*?
f) ¿En qué valores de *y* cruza la gráfica de $f(x)$ al eje de las *y*?



Sección 11.6

GRÁFICA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el alumno deberá ser capaz de:

1. Definir la función algebrica y racional.
2. Definir y graficar las siguientes funciones:
   a) Que formen parte de una cónica.
   b) Valor absoluto.
   c) Racionales reducibles a lineales.
   d) Seccionadas.
   e) Escalón unitaria.
   f) Signo.
   g) Entero mayor.
   h) Seno y coseno.
3. Para las funciones dadas en el punto anterior, analizar los siguientes comportamientos:
   a) creciente y decreciente.
   b) cuando x crece o decrece infinitamente.

Definición. Una función algebraica es una función formada por un número finito de operaciones (suma, resta, producto, cociente, potencia o raíz) de la función identidad y la constante.

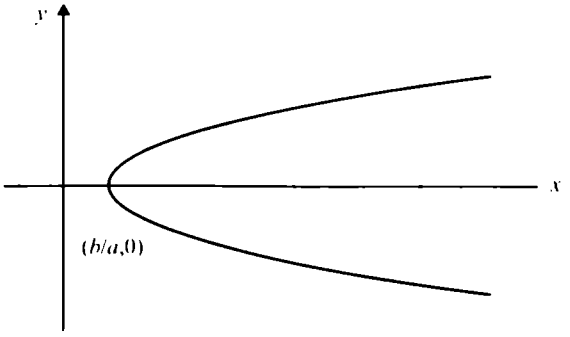
Observación. Las funciones polinomiales son funciones algebráicas.

Funciones algebraicas que son parte de una cónica

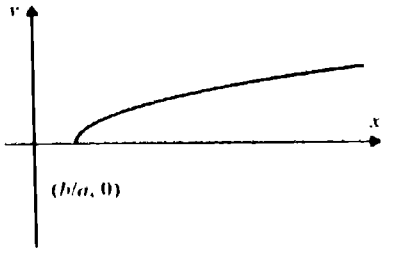
I. Gráficas de funciones que son parte de una parábola horizontal

Si consideramos la ecuación $y^2 = ax + b$

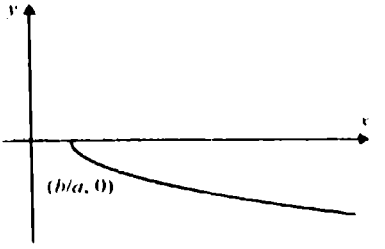
a) Si $a > 0$, esta ecuación representa una parábola que se abre hacia la derecha con vértice el punto $(b/a,0)$. Su gráfica es la que se muestra enseguida, en la cual se observa que no es una función, ya que para cada valor de x permisible, se tienen dos valores de la variable y.



Sin embargo, si en esta gráfica consideramos sólo los valores de y positivos, tendremos una función cuya ecuación es $y = +\sqrt{ax + b}$ y si consideramos los valores de y negativos, también tendremos una función cuya ecuación es $y = -\sqrt{ax + b}$. Las gráficas de estas dos funciones las presentamos a continuación.

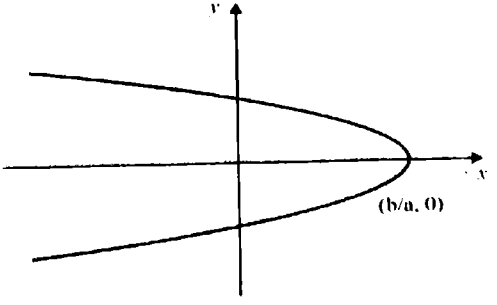


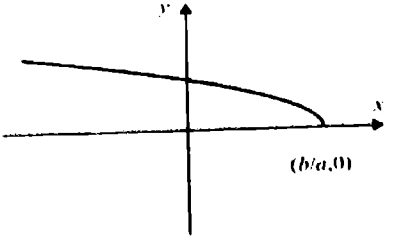
$y = +\sqrt{ax + b}$



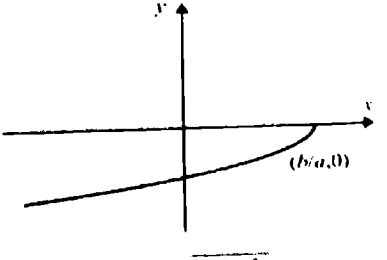
$y = -\sqrt{ax + b}$

b) Si $a < 0$, la ecuación $y^2 = ax + b$ representa una parábola que se abre hacia la izquierda. Su gráfica es la siguiente, en la cual se observa que no es una función, ya que para cada valor de x permisible, se tienen dos valores de la variable y.





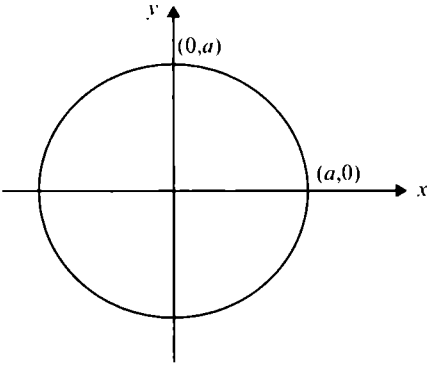
$y = +\sqrt{ax + b}$



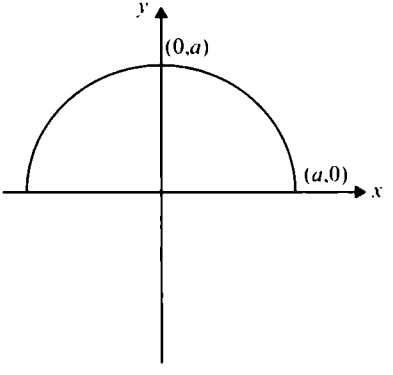
$y = -\sqrt{ax + b}$

II. Gráficas de funciones que son parte de una circunferencia

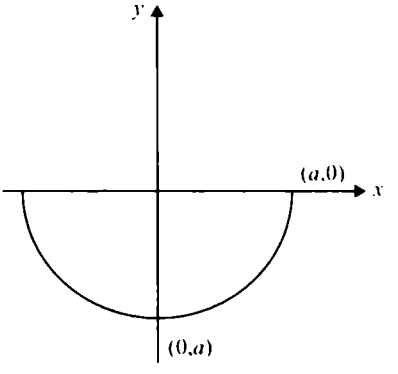
Si consideramos la ecuación $y^2 + x^2 = a^2$ que representa una circunferencia con su centro en el origen y radio a.
Su gráfica se presenta a continuación, y se observa que no es una función, ya que para cada valor de x permisible se tienen dos valores de la variable y.



Sin embargo, si en esta gráfica consideramos solamente los valores de y positivos, tendremos una función cuya ecuación es $y = +\sqrt{a^2 - x^2}$ y si consideramos los valores de y negativos, también tendremos una función cuya ecuación es $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$. Las gráficas de esta dos funciones se presentan a continuación:



$y = +\sqrt{a^2 - x^2}$

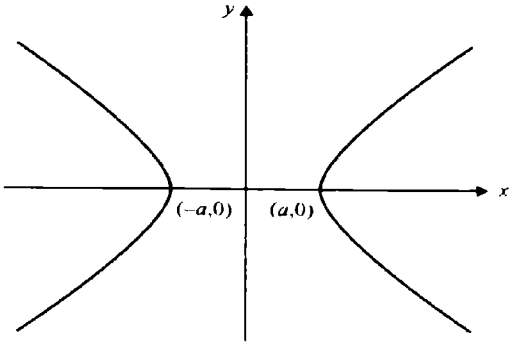


$y = -\sqrt{a^2 - x^2}$

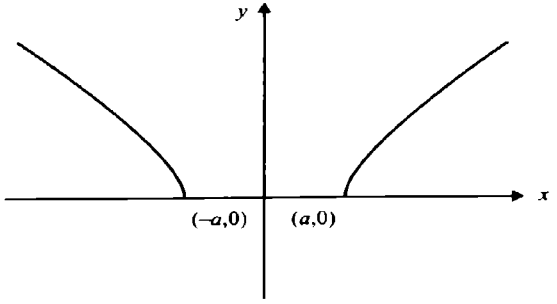
II. Gráficas que son parte de una hipérbola

Si consideramos la ecuación de la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ sabemos que es una hipérbola horizontal con centro en el origen y vértices $V(a,0)$ y $V(-a,0)$.

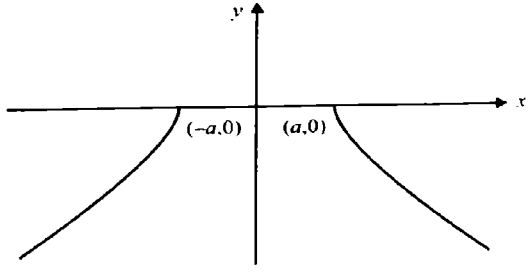
Su gráfica se muestra a continuación, en la cual se observa que no es una función, ya que para cada valor de x permisible, se tienen dos valores de la variable y.



Sin embargo, si en esta gráfica consideramos solo los valores de y positivos, tendremos una función cuya ecuación es $y = +\sqrt{x^2 - a^2}$. Y si consideramos los valores de y negativos también tendremos una función cuya ecuación es $y = -\sqrt{x^2 - a^2}$. Las gráficas de estas dos ecuaciones se presentan a continuación:



$y = +\sqrt{x^2 - a^2}$



$y = -\sqrt{x^2 - a^2}$

Observación. Dada la función con un radical, podemos identificar si es parte de una cónica si al elevar al cuadrado la función, a ambos lados de la ecuación resulta una de las ecuaciones de las cónicas.

Ejemplos.

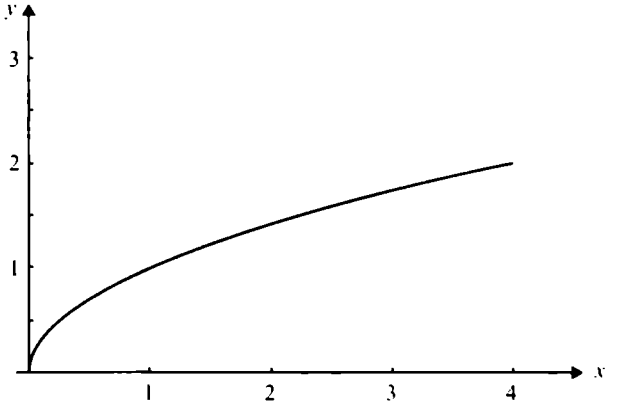
Se grafica cada una de las siguientes funciones:

1. $y = \sqrt{x}$

Primero analizaremos que representa esta función, y para ello elevaremos la ecuación al cuadrado a ambos lados para observar el resultado e indicar qué cónica representa.

$$y = \sqrt{x}$$
$$(y)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2$$
$$y^2 = x$$

Como lo vimos en el capítulo de Geometría, esta ecuación representa una parábola que se abre hacia la derecha con vértice (0,0).
Por lo que la ecuación dada $y = \sqrt{x}$ es la parte positiva de la parábola de ecuación $y^2 = x$.
Y su gráfica es la siguiente:

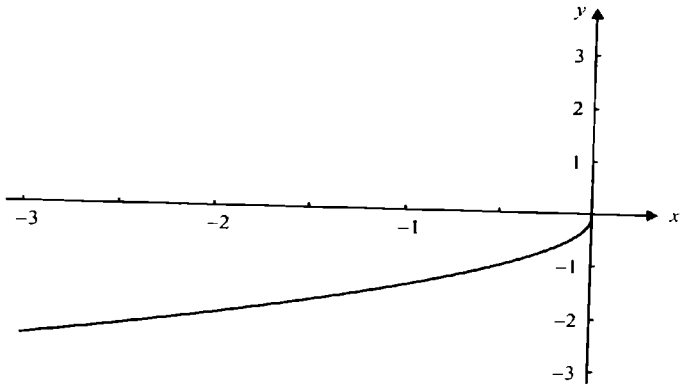


2. $y = -\sqrt{-2x}$

Haremos algo similar que en el ejemplo anterior.

$$y = -\sqrt{-2x}$$
$$(y)^2 = \left(-\sqrt{-2x}\right)^2$$
$$y^2 = -2x$$

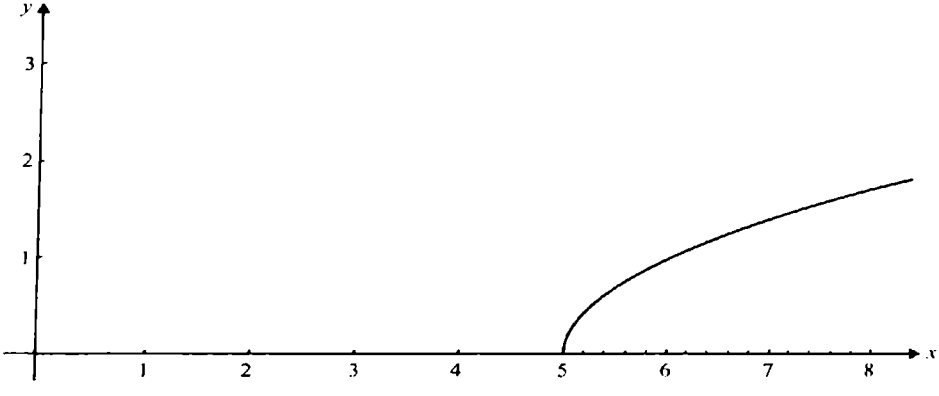
Por lo que la función $y = -\sqrt{-2x}$ es la parte negativa de la parábola, cuya ecuación es $y^2 = -2x$, su vértice está en (0,0) y se abre hacia la izquierda.



3. $y = \sqrt{x - 5}$

$$y = \sqrt{x - 5}$$
$$(y)^2 = \left(\sqrt{x - 5}\right)^2$$
$$y^2 = x - 5$$

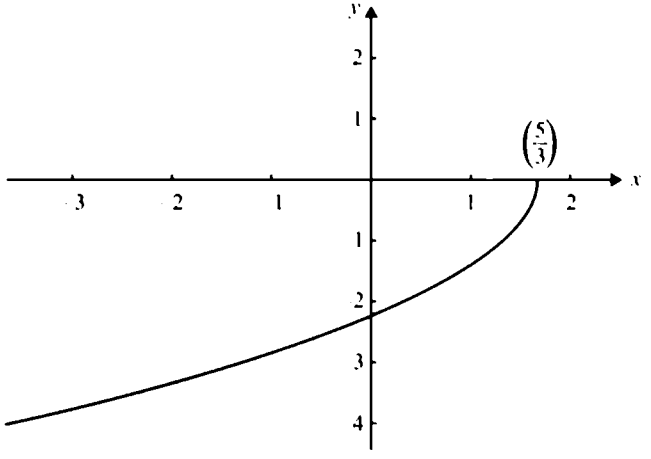
Por lo que la función $y = \sqrt{x - 5}$ es la parte positiva de parábola, cuya ecuación es $y^2 = x - 5$, su vértice está en (5,0) y se abre hacia la derecha.



4. $y = -\sqrt{5 - 3x}$

$$y = -\sqrt{5 - 3x}$$
$$(y)^2 = \left(-\sqrt{5 - 3x}\right)^2$$
$$y^2 = 5 - 3x$$
$$y^2 = -3x + 5$$
$$y^2 = -3\left(x - \frac{5}{3}\right)$$

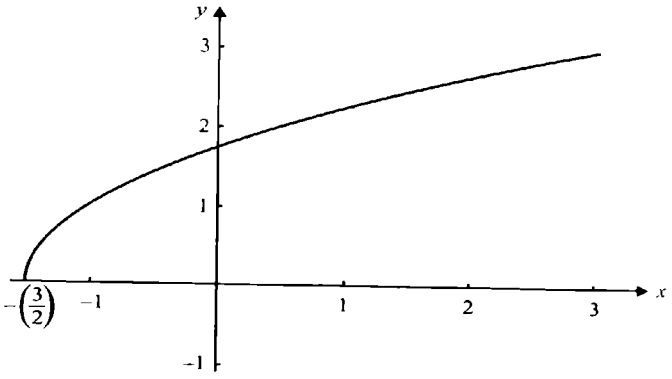
Por lo que la función $y = -\sqrt{5 - 3x}$ es la parte negativa de la parábola, cuya ecuación es $y^2 = -3\left(x - \frac{5}{3}\right)$, su vértice es el punto $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ y se abre hacia la izquierda.



5. $y = \sqrt{2x + 3}$

$$y = \sqrt{2x + 3}$$
$$y^2 = \left(\sqrt{2x + 3}\right)^2$$
$$y^2 = 2x + 3$$
$$y^2 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Por lo que la función $y = \sqrt{2x + 3}$ es la parte positiva de la parábola, cuya ecuación es $y^2 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$, su vértice está en $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y se abre hacia la derecha.



6. $y = -\sqrt{4 - x^2}$

$(y)^2 = \left(-\sqrt{4 - x^2}\right)^2$

$y^2 = 4 - x^2$

$x^2 + y^2 = 4$

Por lo que la función $y = -\sqrt{4 - x^2}$ es la parte negativa de una circunferencia con centro en (0,0) y radio 2.

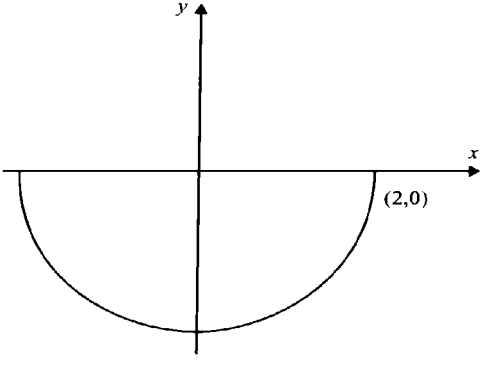
7. $y = \sqrt{1 - x^2}$

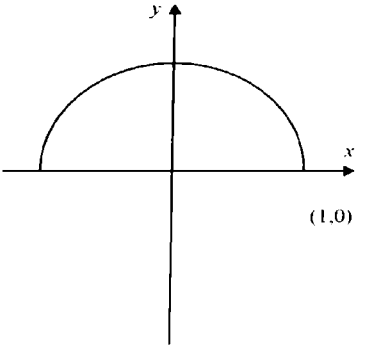
$(y)^2 = \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2$

$y^2 = 1 - x^2$

$x^2 + y^2 = 1$

Por lo que la función $y = \sqrt{1 - x^2}$ es la parte positiva de una circunferencia de centro (0,0) y radio 1.





8. $y = \sqrt{x^2 - 4}$

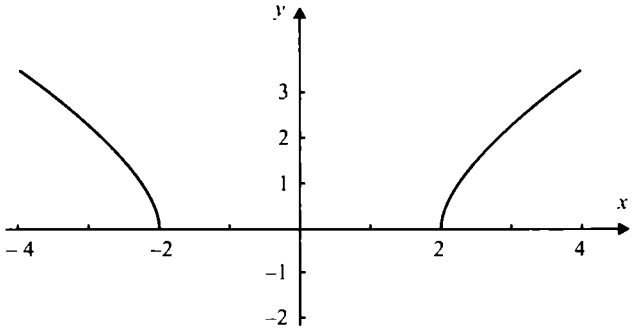
$y = \sqrt{x^2 - 4}$

$(y)^2 = \left(\sqrt{x^2 - 4}\right)^2$

$y^2 = x^2 - 4$

$x^2 - y^2 = 4$

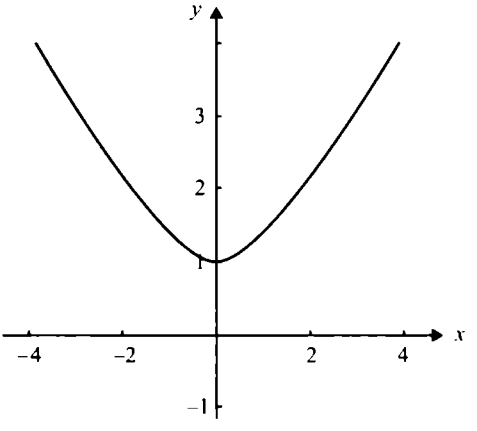
Por lo que la función $y = \sqrt{x^2 - 4}$ es la parte positiva de una hipérbola horizontal, cuya ecuación es $x^2 - y^2 = 4$, centro (0,0) y vértices (2,0) y (–2,0).



9. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

$$y = \sqrt{x^2 + 1}$$
$$(y)^2 = \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^2$$
$$y^2 = x^2 + 1$$
$$y^2 - x^2 = 1$$

Por lo que la función $y = \sqrt{x^2 + 1}$ es la parte positiva de la hipérbola vertical, cuya ecuación es $y^2 - x^2 = 1$, con centro (0,0) y vértices (0,–1) y (0,1).



Funciones racionales que se reducen a lineales o cuadráticas

Una función racional es el cociente de dos funciones polinomiales y su dominio cuyo dominio son los números reales, excepto aquellos valores de x donde el denominador se hace cero.

La gráfica de una función racional será la de su simplificación (considerando que se puede simplificar), eliminando aquellos valores de x donde la función racional no esté definida.

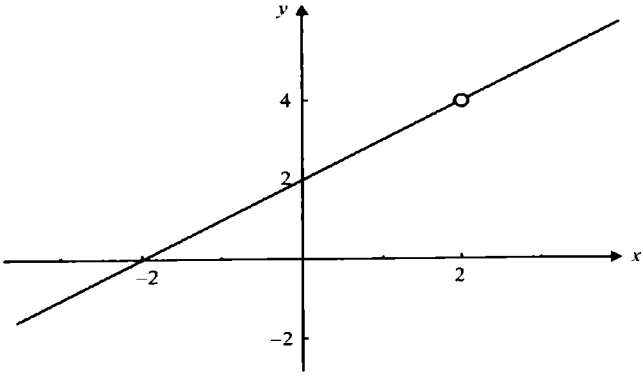
Ejemplos.

10. Se grafica $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Simplificando esta función tenemos:

$y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$, así tenemos que $y = x + 2$ con $x \neq 2$.

Por lo que la gráfica del cociente $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ es la de la recta $y = x + 2$ quitando los valores donde el denominador $(x - 2)$ se hace cero que es $x = 2$.



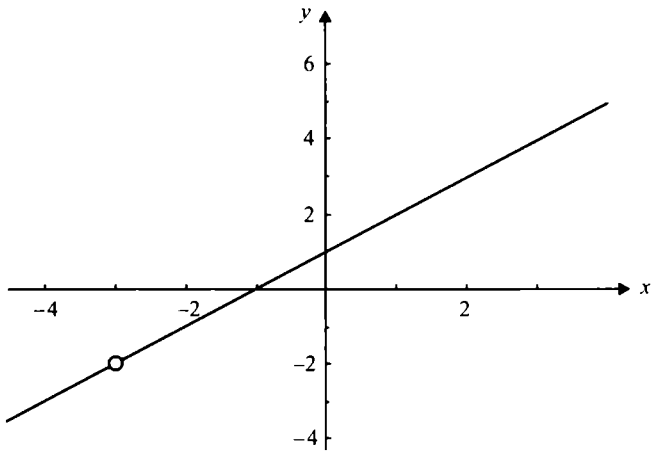
Dominio $= \{x \in R / x \neq 2\}$ Imagen $= \{y \in R / y \neq 4\}$

11. Se grafica $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 3}$

Simplificando esta función tenemos:

$y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 3} = \dfrac{(x + 3)(x + 1)}{x + 3} = x + 1$ con $x \neq -3$.

Es decir la gráfica de $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 3}$ es la recta $y = x + 1$, quitando el valor de $x = -3$.



Dominio = $\{x \in R / x \neq -3\}$ Imagen = $\{y \in R / y \neq -2\}$

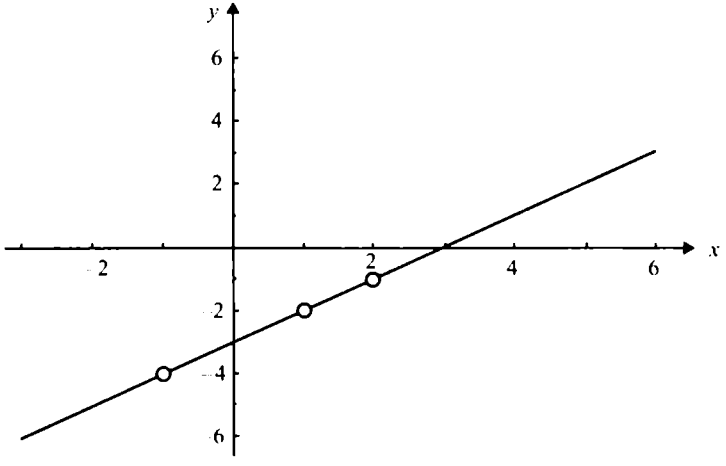
12. Se grafica $y = \dfrac{(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 3x + 2)(x + 1)}$

Simplificando tenemos que:

$y = \dfrac{(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 3x + 2)(x + 1)} = \dfrac{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x - 1)(x + 1)} = x - 3$; si $x \neq 2$, $x \neq 1$, $x \neq -1$.

O sea que la gráfica de $y = \dfrac{(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 3x + 2)(x + 1)}$ es la gráfica de la recta $y = x - 3$.

Excepto los valores donde $x = 2$, $x = 1$ y $x = -1$.



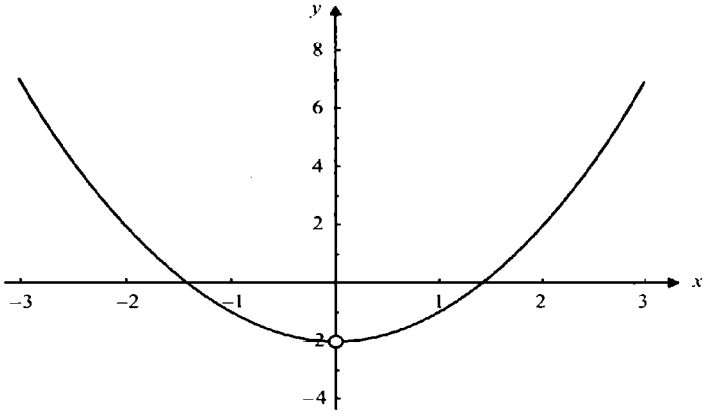
Dominio = $\{x \in R / x \neq -1, x \neq 1, x \neq 2\}$ Imagen = $\{y \in R / y \neq -4, y \neq -1, y \neq -2\}$

13. Se grafica $y = \dfrac{x^3 - 4x}{x}$

Simplificando tenemos:

$$y = = \frac{x^3 - 2x}{x} = \frac{x(x^2 - 2)}{x} = x^2 - 2,\ x \neq 0.$$

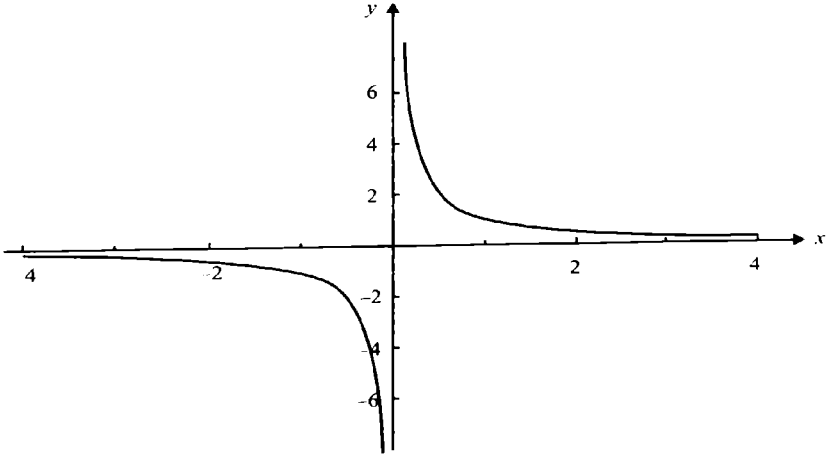
Dominio = $\{x \in R / x \neq 0\}$ Imagen = $\{y \in R / y \neq -2\}$ y su gráfica es



Otro tipo de funciones racionales que no se reducen a lineales o cuadráticas son las siguientes:

$$f(x) = \frac{1}{x + b} \text{ o } f(x) = \frac{1}{x^n} \text{ donde } n \text{ es entero positivo}$$

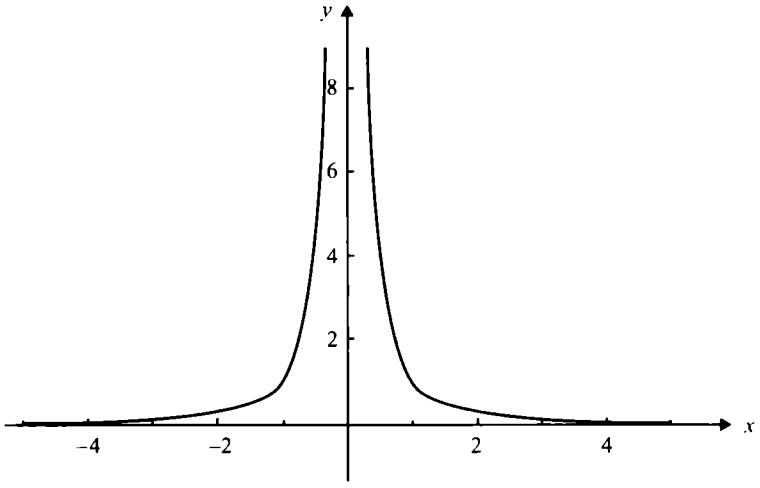
Por ejemplo, la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ $x \neq 0$, es



Observaciones.

a) El dominio de la función son los números reales excepto el cero.
b) La imagen de la función son los números reales excepto el cero.
c) Los valores de la función y se aproximan a cero cuando x toma valores mucho muy grandes ($x \to \infty$).
d) Los valores de la función también se aproximan a cero cuando toma valores muy pequeños y negativos ($x \to -\infty$).
e) Los valores de la función y se hacen cada vez más grandes ($y \to \infty$) cuando x se aproxima a cero por la derecha ($x \to 0^+$).
f) Los valores de la función y se hacen cada vez más pequeños ($y \to -\infty$) cuando x se aproxima cero por la izquierda ($x \to 0^-$).

La gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ es



Funciones seccionadas

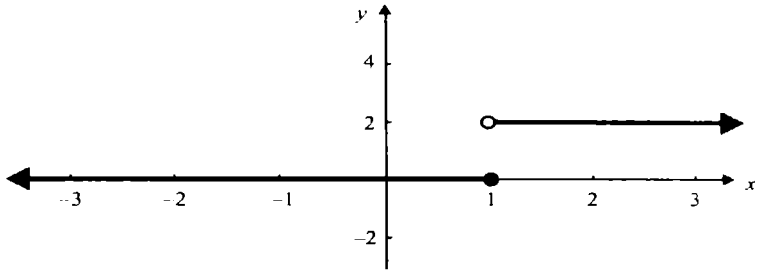
Hasta este momento hemos graficado funciones del tipo $y = f(x)$ donde una misma expresión nos describe el comportamiento de la función en todo el dominio, sin embargo, podemos tener funciones que tengan diferente comportamiento en secciones distintas de su dominio.

Ejemplos.

Se grafica cada una de las siguientes funciones y se da su dominio e imagen:

14. $y = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

El dominio se ha dividido en dos subconjuntos, valores de x menores o iguales a 1 y valores de x mayores que 1.
Para los valores de $x = 1$ tenemos la función $y = 0$, que es la gráfica de una recta paralela al eje x, y para los valores de $x > 1$, la función $y = 2$ que también es una recta paralela al eje de las x.
La gráfica que se pide es:

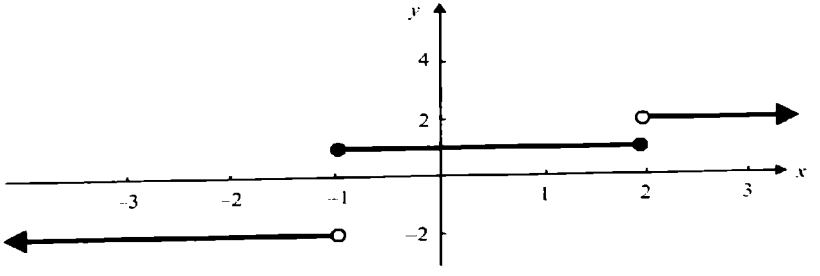


15. $y = \begin{cases} -2 \text{ si } x < -1 \\ 1 \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

El dominio se ha dividido en tres subconjuntos:

$$(-\infty, -1), (-1,2) \text{ y de } (2,\infty)$$

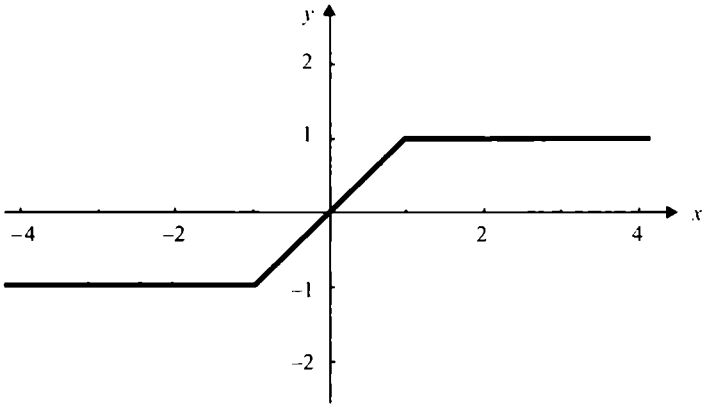
Y en cada sección tenemos una función distinta, cuyas gráficas son rectas paralelas al eje de las x.
La gráfica que se pide es:



Dominio = Reales Imagen = $\{-2, 1, 2\}$

16. $y = \begin{cases} -1 \text{ si } x < -1 \\ x \text{ si } -1 \le x \le 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

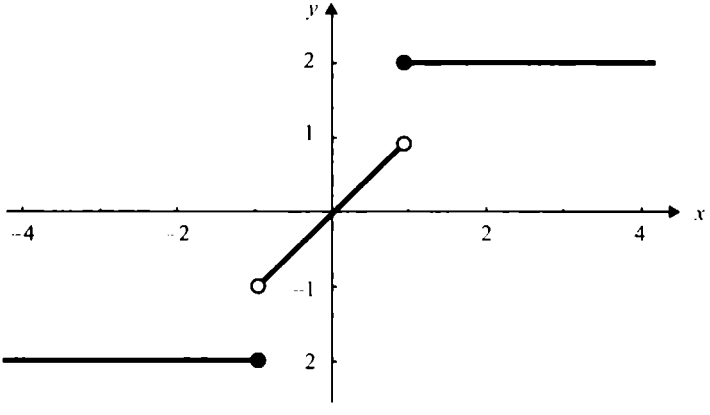
Su gráfica es:



Dominio = Reales Imagen = $[-1, 1]$

17. $y = \begin{cases} -2 \text{ si } x \le -1 \\ x \text{ si } -1 < x < 1 \\ 1 \text{ si } x \ge 1 \end{cases}$

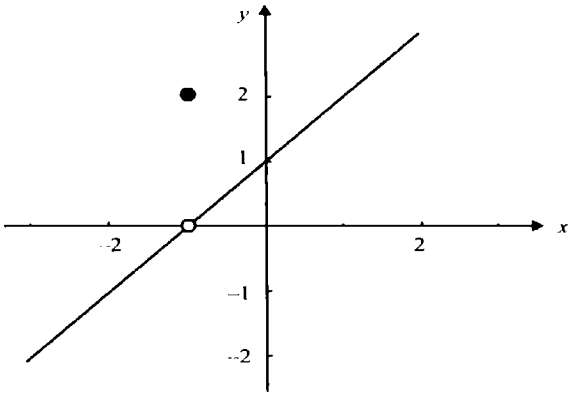
Su gráfica es:



Dominio = Reales Imagen = $\{-2, 2\} \cup (-1, 1)$

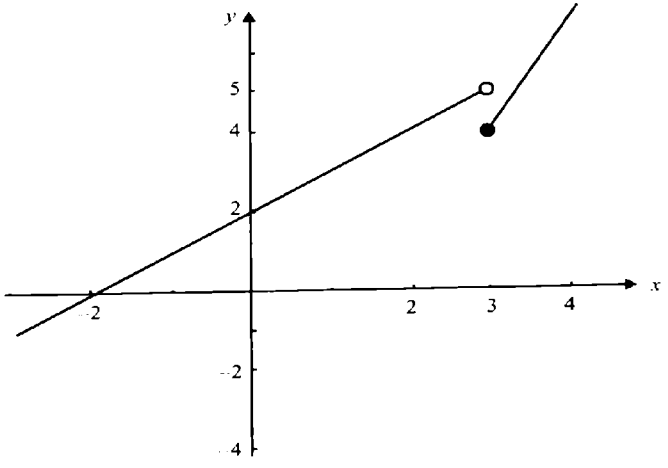
18. $y = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

Su gráfica es:



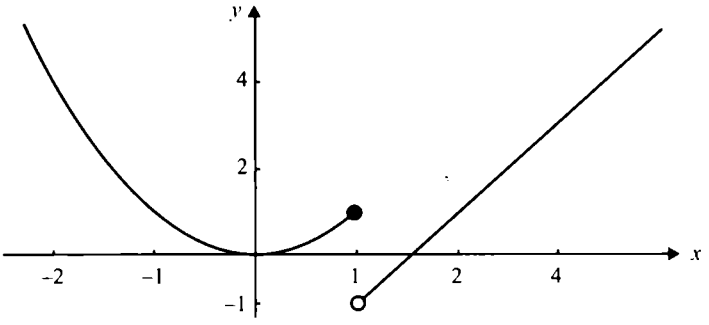
Dominio = Reales Imagen = Reales $-\{0\}$

19. $y = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 3 \\ 3x - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



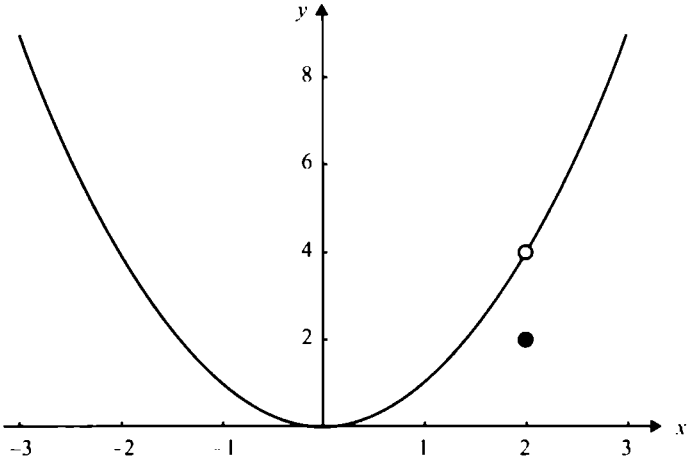
Dominio = Imagen = Reales

20. $y = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \leq 1 \\ 2x - 3 \text{ si } x > 1 \end{cases}$



Dominio = Reales Imagen = $(-1,\infty)$

21. $y = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \neq 1 \\ 2 \text{ si } x = 1 \end{cases}$



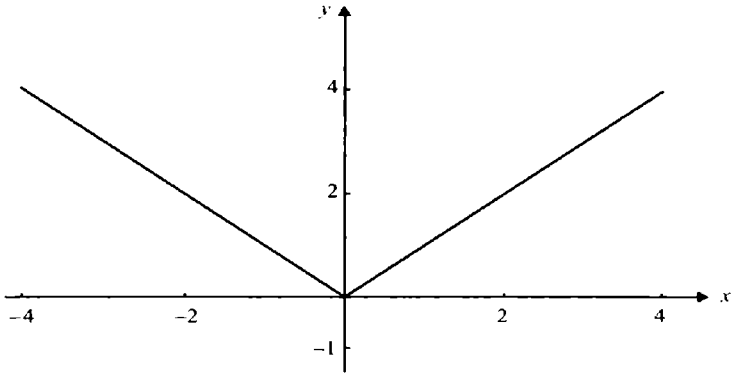
Dominio = Reales Imagen = $(0,\infty)$

Las funciones que se asemejan a las anteriores son llamadas funciones seccionadas. Algunas de éstas reciben un nombre en especial, como la función valor absoluto, signo y unitaria.

La función valor absoluto

La función valor absoluto expresada por $y = |x|$, se define por

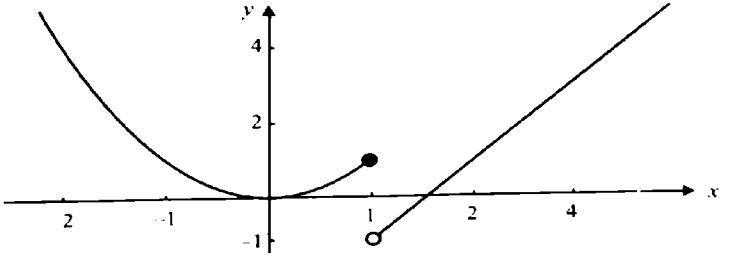
$$y = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Dominio = Reales Imagen = $(0,\infty)$

22. Se grafica $y = |x + 1|$

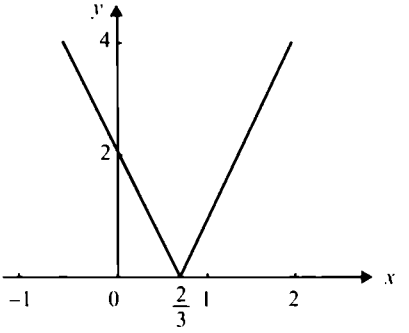
$$y = |x + 1| = \begin{cases} -(x+1) & \text{si } x + 1 < 0 \\ x + 1 & \text{si } x + 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$



Dominio = Reales Imagen = $(0,\infty)$

23. Se grafica $y = |\, 3x - 2 \,|$

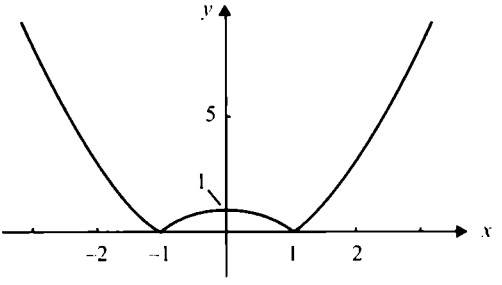
$$y = |\, 3x - 2 \,| = \begin{cases} -(3x - 2) & \text{si } 3x - 2 < 0 \\ 3x - 2 & \text{si } 3x - 2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -3x + 2 & \text{si } x < \frac{2}{3} \\ 3x - 2 & \text{si } x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$



Dominio = Reales Imagen = $(0,\infty)$

24. Se grafica $y = |\, 1 - x^2 \,|$

$$y = |\, 1 - x^2 \,| = \begin{cases} -(1 - x^2) & \text{si } 1 - x^2 < 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \\ 1 - x^2 & \text{si } x \in [-1,1] \end{cases}$$



Dominio = Reales Imagen = $(0,\infty)$

Observación. En la sección de valor absoluto se mencionó la siguiente relación entre la raíz cuadrada de un número y el valor absoluto del mismo:

$$|\, x \,| = \sqrt{x^2}$$

y como $y = |\, x \,|$ es una función entonces $\sqrt{x^2}$ es una función que la podemos expresar como:

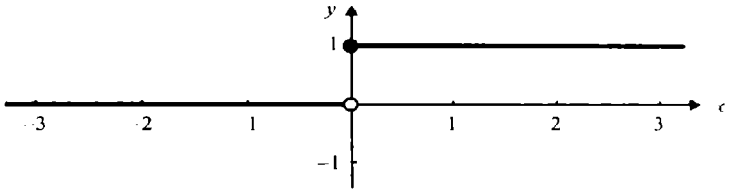
$$y = \sqrt{x^2} = |\, x \,| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Función escalón unitaria

La función escalón unitaria denotada por $U(x)$ está definida por:

$$f(x) = U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

y su gráfica es:



Dominio = Reales, Imagen = $\{0,1\}$

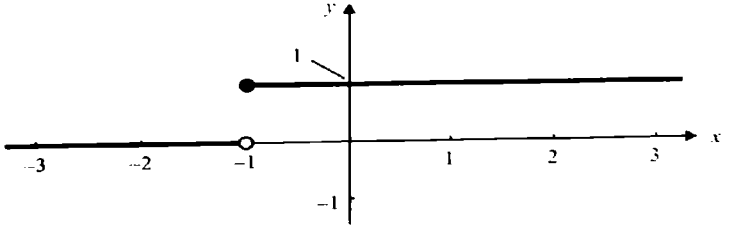
Ejemplos.

Se grafican las funciones que se indican.

25. $y = U(x + 1)$

$$f(x) = U(x + 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

su gráfica es:

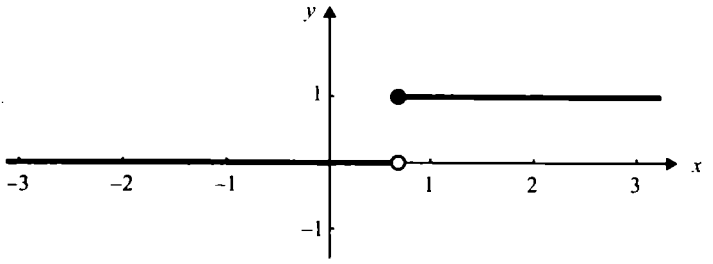


Dominio = Reales Imagen = $\{0,1\}$

26. $y = U(3x - 2)$

$$f(x) = U(3x - 2) = \begin{cases} 0 & \text{si } 3x - 2 < 0 \\ 1 & \text{si } 3x - 2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{2}{3} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

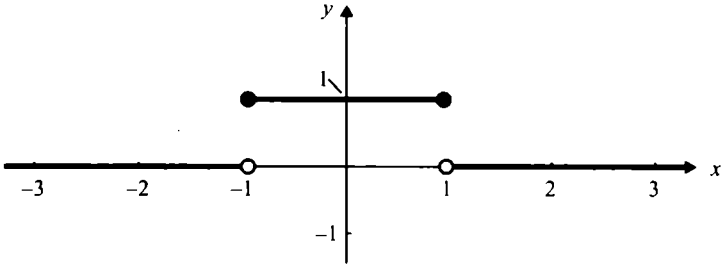
Y su gráfica es



Dominio = Reales Imagen = {0,1}

27. $y = U(1 - x^2)$

$$f(x) = U(1 - x^2) = \begin{cases} 0 \text{ si } 1 - x^2 < 0 \\ 1 \text{ si } 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \\ 1 \text{ si } x \in [-1,1] \end{cases}$$



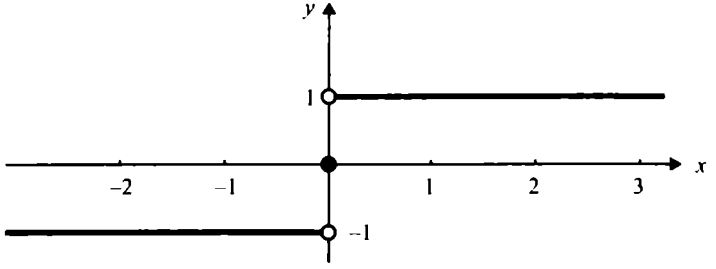
Dominio = Reales Imagen = {0,1}

Función signo

La función signo de x denotada por sgn (x) está definida por:

$$f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Y su gráfica es:



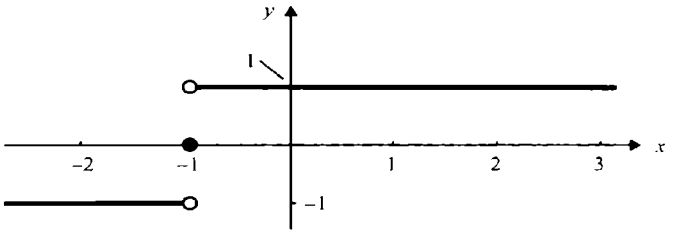
Ejemplos.

Se grafican las siguientes funciones:

28. $y = \operatorname{sgn}(x + 1)$

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x+1) = \begin{cases} -1 & \text{si } x+1 < 0 \\ 0 & \text{si } x+1 = 0 \\ 1 & \text{si } x+1 > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Y su gráfica es:

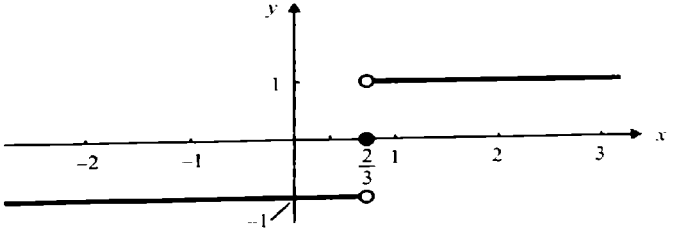


Dominio = Reales Imagen = $\{-1,0,1\}$

29. $y = \operatorname{sgn}(3x - 2)$

$$f(x) = \operatorname{sgn}(3x-2) = \begin{cases} -1 & \text{si } 3x-2 < 0 \\ 0 & \text{si } 3x-2 = 0 \\ 1 & \text{si } 3x-2 > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < \frac{2}{3} \\ 0 & \text{si } x = \frac{2}{3} \\ 1 & \text{si } x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Y su gráfica es:

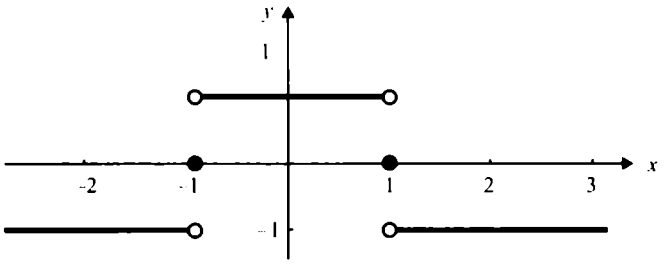


Dominio = Reales Imagen = $\{-1,0,1\}$

30. $y = \operatorname{sgn}(1 - x^2)$

$$f(x) = \operatorname{sgn}(1 - x^2) = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 - x^2 < 0 \\ 0 & \text{si } 1 - x^2 = 0 \\ 1 & \text{si } 1 - x^2 > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \\ 0 & \text{si } x = 1 \text{ o } x = -1 \\ 1 & \text{si } x \in (-1,1) \end{cases}$$

Y su gráfica es:



Dominio = Reales Imagen = $\{-1,0,1\}$

Función entero mayor

> La expresión $[\,|\,x\,|\,]$ se define como el mayor entero que es mejor o igual a x.

Ejemplos.

$[\,|\,1\,|\,] = 1$, $[\,|\,5\,|\,] = 5$, $[\,|\,-2\,|\,] = -2$, $[\,|\,-6\,|\,] = -6$

es decir, el entero mayor de un número entero es el mismo entero.

$[\,|\,1.5\,|\,] = 1$ $[\,|\,0.18\,|\,] = 0$ $[\,|\,2.7\,|\,] = 2$ $[\,|\,-7.1\,|\,] = -8$

$[\,|\,-5.3\,|\,] = -6$ $[\,|\,-9.9\,|\,] = -10$ $[\,|\,0.999\,|\,] = 0$ $[\,|\,-0.999\,|\,] = -1$

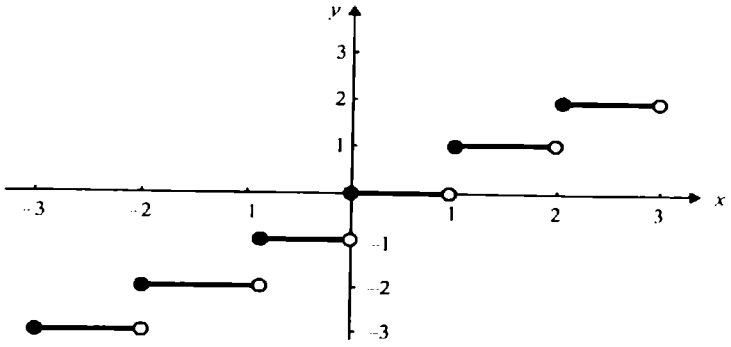
Es decir, el entero mayor de un número que no es entero, es el entero inmediato que está a la izquierda del número en la recta numérica.

> La función entero mayor se define por $y = f(x) = [\,|\,x\,|\,]$.

Para graficar $f(x) = [\,|\,x\,|\,]$ haremos el siguiente análisis por intervalos de números:

Si $-3 \leq x < -2$ entonces $y = [\,|\,x\,|\,] = -3$ Si $-2 \leq x < -1$ entonces $y = [\,|\,x\,|\,] = -2$
Si $-1 \leq x < 0$ entonces $y = [\,|\,x\,|\,] = -1$ Si $0 \leq x < 1$ entonces $y = [\,|\,x\,|\,] = 0$
Si $1 \leq x < 2$ entonces $y = [\,|\,x\,|\,] = 1$ Si $2 \leq x < 3$ entonces $y = [\,|\,x\,|\,] = 2$

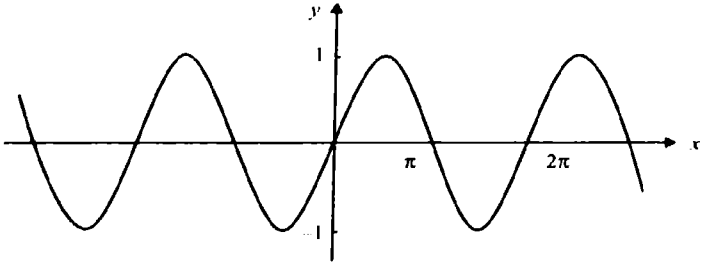
Y su gráfica es:



Dominio = Reales Imagen = Enteros

VI. Funciones trigonométricas

La gráfica de $y = \text{sen}\,(x)$ es



Observaciones.

a) La función $y = \text{sen}\,x$ es una función periódica con periodo 2π, ya que la gráfica se repite cada 2π.

b) Los valores de la función $y = \text{sen}\,x$ están comprendidos entre -1 y 1.

c) La gráfica en el periodo de 0 a 2π cruza al eje de las x cuando el ángulo x es $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$, o sea que $y = \text{sen}\ (0) = 0$, $y = \text{sen}\ (\pi) = 0$, $y = \text{sen}\ (2\pi) = 0$.

d) La gráfica de y = sen x en el periodo de 0 a 2π, toma su valor máximo de $y = 1$ cuando $x = \frac{\pi}{2}$, o sea que $y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

e) La gráfica de $y = \text{sen}\ x$ en el periodo de 0 a 2, toma su valor mínimo de $y = -1$ cuando $x = 3\frac{\pi}{2}$, o sea que $y = \text{sen}\left(3\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

f) La gráfica de $y = \text{sen}\ x$ tiene una amplitud de una unidad.

Gráfica de $y = k\ \text{sen}\ x$

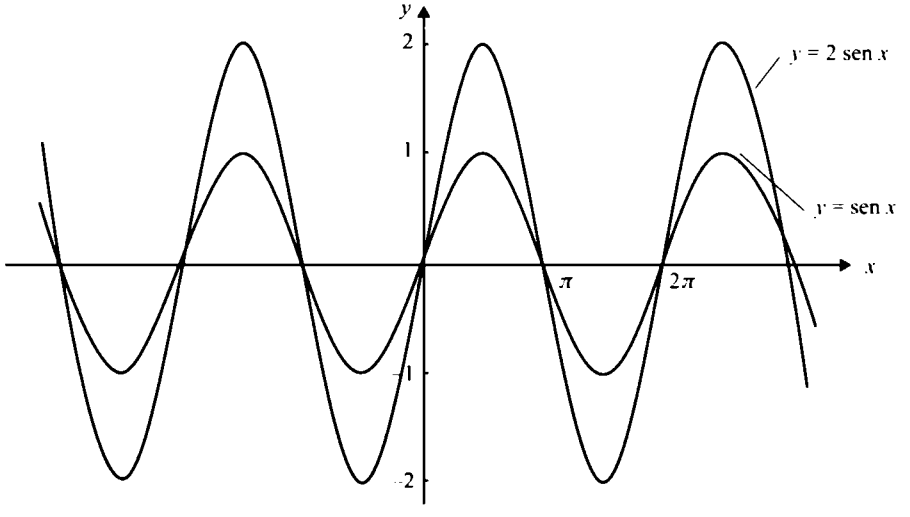
En la función $y = k\ \text{sen}\ x$ el valor de k será la amplitud de la función. Los valores de y (las ordenadas) en $y = k\ \text{sen}\ x$ son k veces los valores de $y = \text{sen}\ x$.

La gráfica de $y = k\ \text{sen}\ x$ cruzará al eje de las x en $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2$; tomará un valor máximo de k cuando $x = \frac{\pi}{2}$ y un valor mínimo de $-k$ en $x = 3\frac{\pi}{2}$.

Ejemplos.

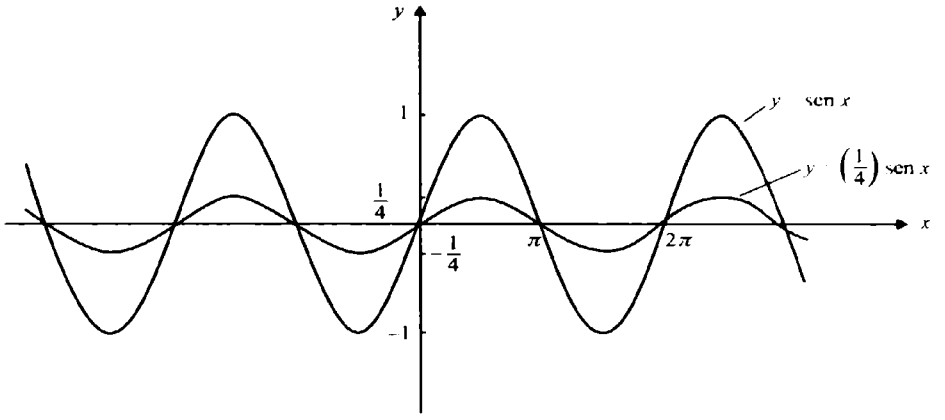
31. $y = 2\ \text{sen}\ x$

La gráfica cruza al eje de las x cuando $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$; toma su valor máximo de 2 cuando $x = \frac{\pi}{2}$ y su valor mínimo de -2 cuando $x = 3\frac{\pi}{2}$.



32. $y = \left(\frac{1}{4}\right) \text{sen } x$

La gráfica cruza al eje de las x cuando $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2$; toma su valor máximo de $\left(\frac{1}{4}\right)$ cuando $x = \frac{\pi}{2}$ y su valor mínimo de $\left(-\frac{1}{4}\right)$ cuando $x = 3\frac{\pi}{2}$.



Gráfica de $y = \text{sen } bx$

La gráfica de $y = \text{sen } bx$ es de la misma naturaleza senoidal, donde (bx) es el ángulo o argumento de la función. Para la gráficas tendremos las mismas consideraciones que para la gráfica de $y = \text{sen } x$ respecto a dónde cruza el eje de las x, en qué valores de x alcanza la función y el valor máximo o mínimo.

a) La gráfica cruza al eje de las x, cuando el ángulo:

$bx = 0$	$bx = \pi$	$bx = 2$
$x = 0$	$x = \frac{\pi}{b}$	$x = 2\frac{\pi}{b}$

b) Toma su valor máximo cuando el ángulo o argumento:

$$bx = \frac{\pi}{b}$$
$$x = \frac{\pi}{2b}$$

c) Toma su valor mínimo cuando el ángulo o argumento:

$$bx = \frac{3\pi}{2}$$
$$x = \frac{3\pi}{2b}$$

Ejemplos.

33. $y = \text{sen } 2x$

a) La gráfica cruza al eje de las x cuando el ángulo:

$2x = 0$ $\qquad$ $2x = \pi$ $\qquad$ $2x = 2\pi$

$x = 0$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $x = \pi$

b) Toma su valor máximo de 1 cuando el ángulo o argumento:

$$2x = \frac{\pi}{2}$$

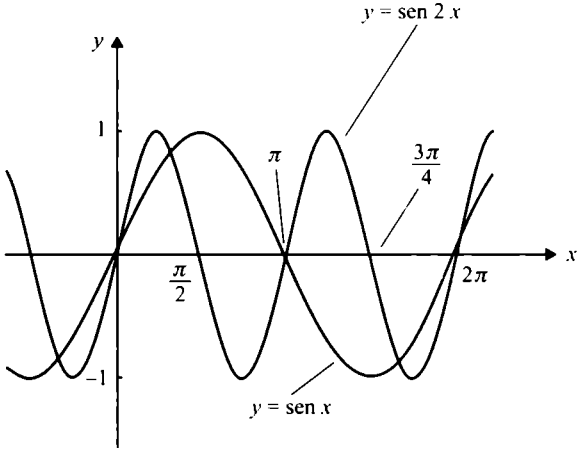
$$x = \frac{\pi}{4}$$

c) Toma su valor mínimo de -1 cuando el ángulo o argumento:

$$2x = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{4}$$

Y la gráfica es:



34. $y = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

a) La gráfica cruza al eje de las x cuando el ángulo $\left(\frac{x}{2}\right)$:

$\frac{x}{2} = 0$ $\qquad$ $\frac{x}{2} = \pi$ $\qquad$ $\frac{x}{2} = 2\pi$

$x = 0$ $\qquad$ $x = 2\pi$ $\qquad$ $x = 4\pi$

b) Toma su valor máximo de 1 cuando el ángulo o argumento:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$$

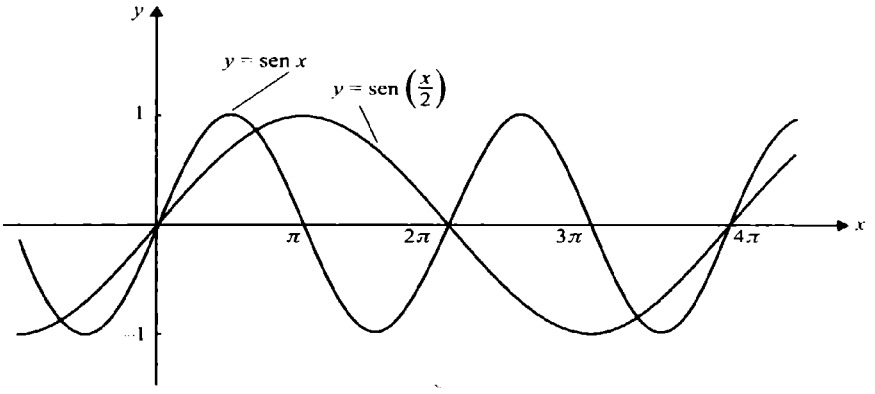
$$x = \pi$$

c) Toma su valor mínimo de –1 cuando el ángulo o argumento:

$$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = 3\pi$$

Y la gráfica es:



35. $y = 3 \text{ sen } 3x$

a) La gráfica cruza al eje de las x cuando el ángulo:

$3x = 0$ $\qquad$ $3x = \pi$ $\qquad$ $3x = 2\pi$

$x = 0$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $x = \frac{2\pi}{3}$

b) Toma su valor máximo de 3 cuando el ángulo o argumento:

$$3x = \frac{\pi}{2}$$

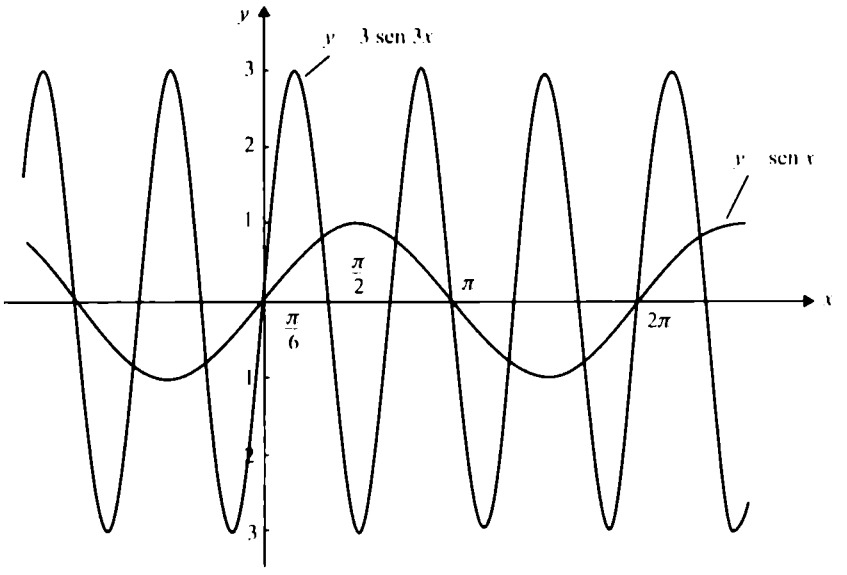
$$x = \frac{\pi}{6}$$

c) Toma su valor mínimo de –3 cuando el ángulo o argumento:

$$3x = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

Y la gráfica es:



36. $y = \left(\frac{1}{3}\right) \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

a) La gráfica cruza al eje de las x cuando el ángulo:

$2x + \frac{\pi}{2} = 0$ $\quad 2x + \frac{\pi}{2} = \pi$ $\quad 2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi$

$x = -\frac{\pi}{4}$ $\quad x = \frac{\pi}{4}$ $\quad x = \frac{3\pi}{4}$

b) Toma su valor máximo de $\frac{1}{3}$ cuando el ángulo o argumento:

$2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

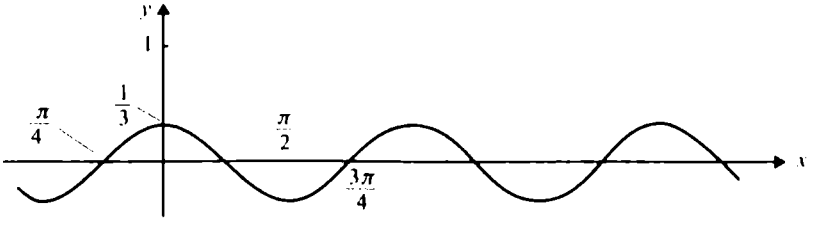
$x = 0$

c) Toma su valor mínimo de $-\frac{1}{3}$ cuando el ángulo o argumento:

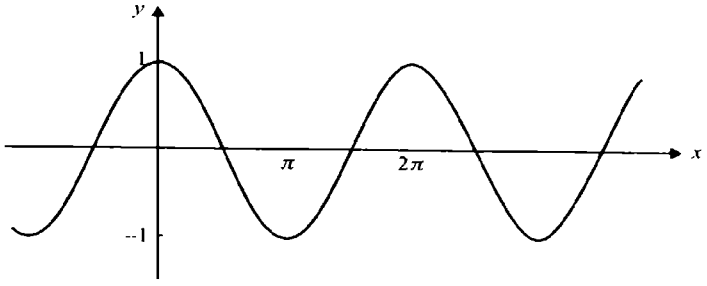
$2x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}$

Y la gráfica es:



Gráfica de $y = \cos x$



Observaciones.

a) La función $y = \cos x$ es una función periódica con periodo 2π, ya que la gráfica se repite cada 2π.

b) Los valores de la función $y = \cos x$ están comprendidos entre -1 y 1.

c) La gráfica en el periodo de 0 a 2π cruza al eje de las x cuando el ángulo x es $x = \frac{\pi}{2}$ y en $x = \frac{3\pi}{2}$, o sea que $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $y = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

d) La gráfica de $y = \cos x$ en el periodo de 0 a 2π, toma su valor máximo de $y = 1$ cuando $x = 0$ y en $x = 2\pi$, o sea que $y = \cos(0) = 1$ $y = \cos(2\pi) = 1$.

e) La gráfica de $y = \cos x$ en el periodo de 0 a 2π, toma su valor mínimo de $y = -1$ cuando $x = \pi$, o sea que $y = \text{sen}(\pi) = -1$.

f) La gráfica de $y = \cos x$ tiene una amplitud de una unidad.

Gráfica de $y = k \cos x$

En la función $y = k \cos x$, el valor de k será la amplitud de la función. Los valores de y (las ordenadas) en $y = k \cos x$ son k veces los valores de $y = \cos x$.

La gráfica de $y = k \cos x$ cruzará al eje de las x en $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$ tomará un valor máximo de k cuando $x = 0$ y $x = 2\pi$ y un valor mínimo de $-k$ en $x = \pi$.

37. $y = 2 \cos x$

a) La gráfica cruza al eje de las x cuando el ángulo:

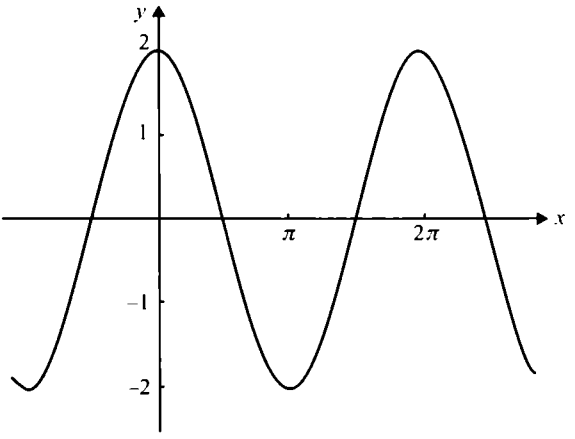
$x = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{3\pi}{2}$

b) Toma su valor máximo de 2 cuando el ángulo o argumento:

$x = 0$ $\qquad$ $x = 2\pi$

c) Toma su valor mínimo de -2 cuando el ángulo o argumento:

$x = \pi$



38. $y = \left(\frac{1}{2}\right) \cos 2x$

a) La gráfica cruza al eje de las x cuando el ángulo:

$2x = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $2x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $x = \frac{3\pi}{4}$

b) Toma su valor máximo de $\frac{1}{2}$ cuando el ángulo o argumento:

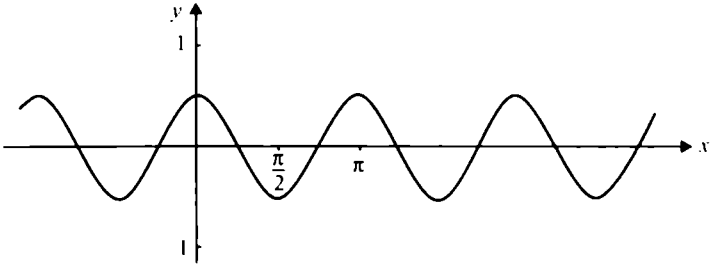
$2x = 0$ $\qquad$ $2x = 2\pi$

$x = 0$ $\qquad$ $x = \pi$

c) Toma su valor mínimo de $-\frac{1}{2}$ cuando el ángulo o argumento:

$2x = \pi$

$x = \frac{\pi}{2}$



39. $y = 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

a) La gráfica cruza al eje de las x cuando el ángulo:

$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{8}$ $\qquad$ $x = \frac{5\pi}{8}$

b) Toma su valor máximo de $\frac{1}{2}$ cuando el ángulo o argumento:

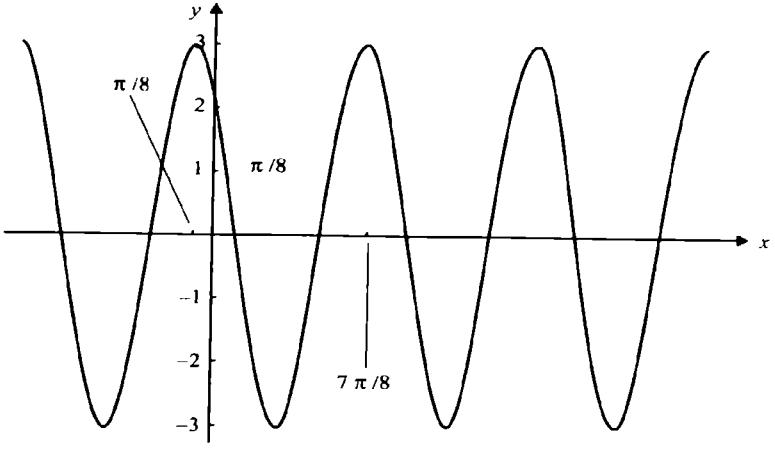
$$2x + \frac{\pi}{4} = 0 \qquad 2x + \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{8} \qquad x = \frac{7\pi}{8}$$

c) Toma su valor mínimo de $-\frac{1}{2}$ cuando el ángulo o argumento:

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pi$$

$$x = \frac{3\pi}{8}$$



Ejercicios.

Para cada una de las siguientes funciones dar:

a) Dominio e imagen
b) Graficarla
c) Los puntos donde la gráfica de $f(x)$ intersecta al eje de las y.
d) Los puntos donde la gráfica de $f(x)$ intersecta al eje de las x.
e) Marcar con color rojo los intervalos donde $f(x)$ es creciente.
f) Marcar con color azul los intervalos donde $f(x)$ es decreciente.
g) En caso de ser parte de una cónica, indicar qué cónica es.

1. $2x + y = 0$
2. $y = 2x$
3. $y = 5 - 2x$
4. $y = -x^2$
5. $y = -x^3$
6. $y = x^4$
7. $y = \sqrt{x}$
8. $y = -\sqrt{x - 1}$
9. $y = \sqrt{5 - x}$
10. $y = -\sqrt{4 - 3x}$
11. $y = \sqrt{16 - x^2}$
12. $y = \sqrt{25 - x^2}$
13. $y = \sqrt{x^2 - 5}$
14. $y = -\sqrt{x^2 - 2}$
15. $y = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{4}x^2}$

16. $y = \sqrt{x^2 + 1}$ 17. $y = \sqrt{4 + x^2}$ 18. $3y = -6$

19. $y = -\frac{x}{3}$ 20. $y = 1 - x^2$ 21. $y = 2x^3$

22. $y = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ 23. $y = \frac{2x + 3x - 2}{x + 2}$ 24. $y = \frac{4x^3 - 25}{2x - 5}$

25. $y = \frac{x^2 - 9/4}{x + 3/2}$ 26. $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + x}$ 27. $y = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 + 3x + 2}$

28. $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x \le -3 \\ 0 & \text{si } -3 < x < 3 \\ 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ 29. $y = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

30. $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ x & \text{si } -2 \le x < 2 \\ 2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ 31. $y = \begin{cases} 2x + 7 & \text{si } x < 1 \\ 2 - 5x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

32. $y = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } x \le 0 \\ 8 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ 33. $y = \begin{cases} 8 - x & \text{si } x \ne 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

34. $y = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$ 35. $y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le -3 \\ 3 & \text{si } x > -3 \end{cases}$

36. $y = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } -1 \le x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

37. $y = |x + 2|$ 38. $y = |x - 1|$ 39. $y = |2x + 5|$

40. $y = |5 - 2x|$ 41. $y = |4 - x^2|$ 42. $y = |x^2 - 4|$

43. $y = U(x + 2)$ 44. $y = U(x - 1)$ 45. $y = U(2x + 5)$

46. $y = U(5 - 2x)$ 47. $y = U(4 - x^2)$ 48. $y = U(x^2 - 4)$

49. sgn $(x + 2)$ 50. $y = \text{sgn}\,(x - 1)$ 51. $y = \text{sgn}\,(2x - 5)$

52. sgn $(5 - 2x)$ 53. $y = \text{sgn}\,(4 - x^2)$ 54. $y = \text{sgn}\,(x^2 - 4)$

55. $y = [|x + 1|]$ 56. $y = [|2x|]$ 57. $y = \left[\left|\frac{x}{2}\right|\right]$

Sección 11.7

EFECTOS EN LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES

Objetivos

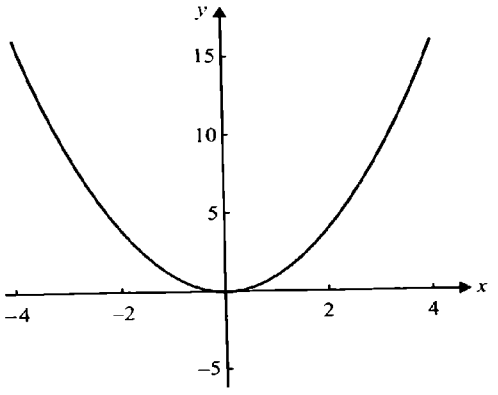
Después de estudiada esta sección, el alumno deberá ser capaz de:

1. Indicar si una función es par o impar.
2. Dada la gráfica de una función $f(x)$, graficar $f(x)$, $f(x) + a$, $f(x) - a$, $f(x + a)$ y $f(x - a)$.

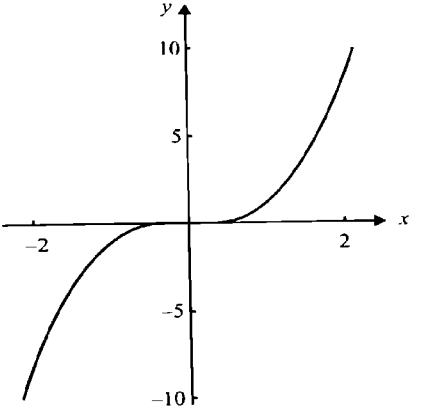
Definición. Una función es par si para cada valor de la variable x se satisface que $f(-x) = f(x)$.

Una función es impar si para cada x se satisface que $f(-x) = -f(x)$.

$f(x)$ es par:



$f(x)$ es impar:



Ejemplos.

Se determina si las siguientes funciones son pares o impares:

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$
   $f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = 3x^4 - 2x^2 + 5 = f(x)$
   y como $f(-x) = f(x)$, entonces $f(x)$ es par.

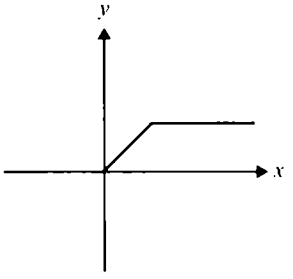
2. $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$
   $f(-x) = 2(-x)^5 - 7(-x)^3 + 4(-x) = -2x^5 + 7x^3 - 4x = -(2x^5 - 7x^3 + 4x) = -f(x)$
   y como $f(-x) = -f(x)$, entonces $f(x)$ es impar.

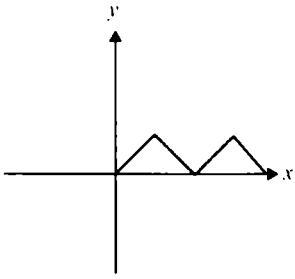
3. $f(x) = x^3 + x^2$
   $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2$ y observamos que $f(x) \neq f(-x)$
   entonces $f(x)$ no es par.
   $-f(x) = -(x^3 + x^2) = -x^3 - x^2$ y también se observa que $-f(x) \neq f(-x)$, por lo que tampoco $f(x)$ es impar.

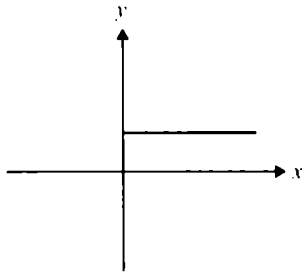
Ejercicios.

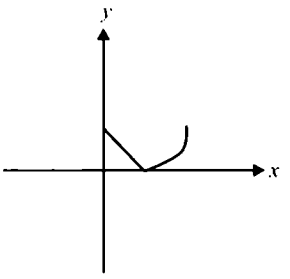
1. Una parte de la gráfica de una función $f(x)$ se da en cada una de las siguientes figuras, completarla si:

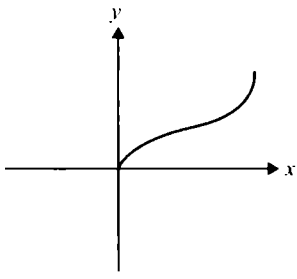
   i) $f(x)$ es par



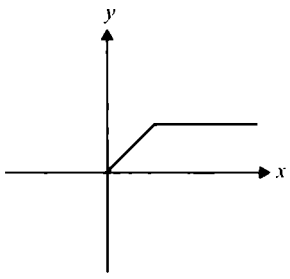


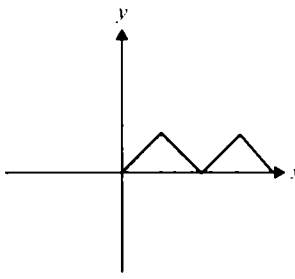


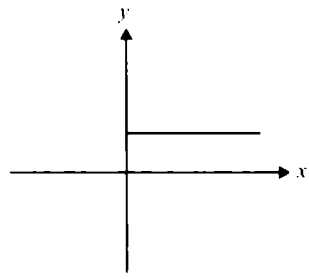


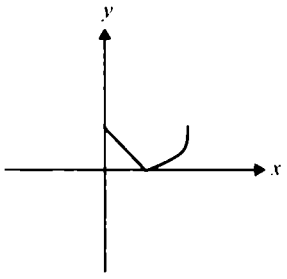


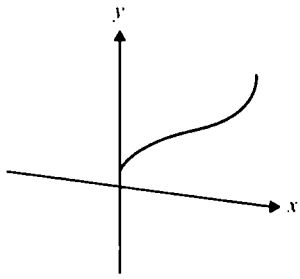
   ii) $f(x)$ es impar





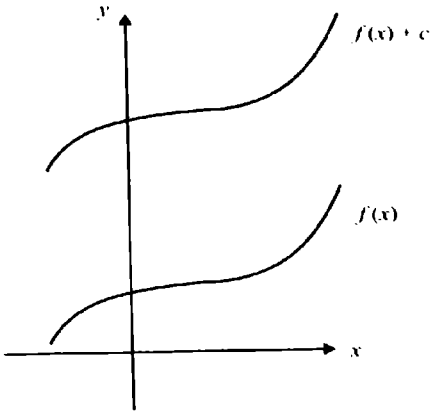


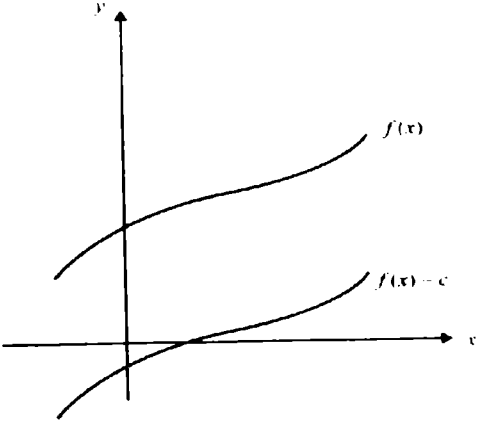




Si $y = f(x) + c$ y si $c > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ se trasladará c unidades hacia arriba.

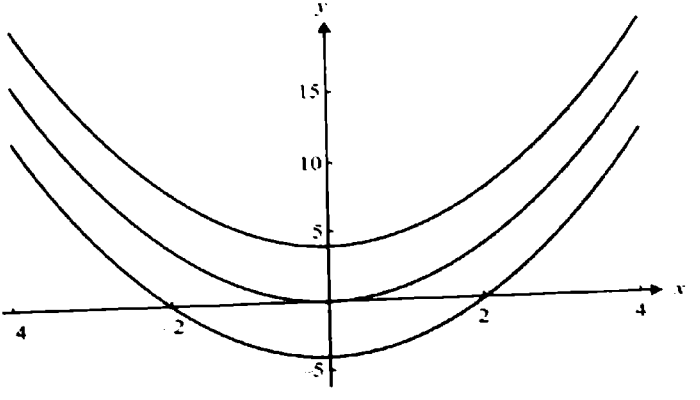
Si $y = f(x) - c$ y si $c > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ se trasladará c unidades hacia abajo.





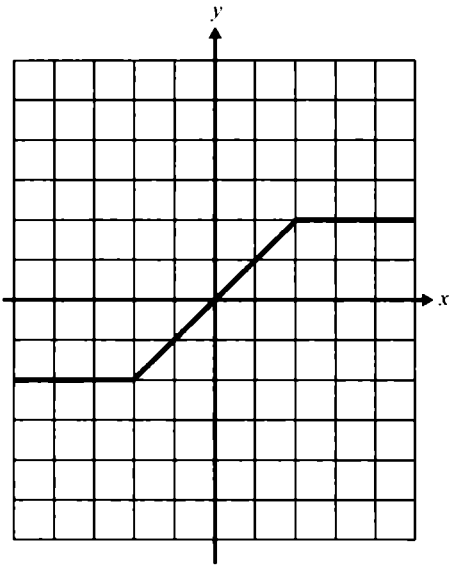
Ejemplo.

4. La gráfica de $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 + 4$ y $f(x) = x^2 - 4$ se presentan a continuación:

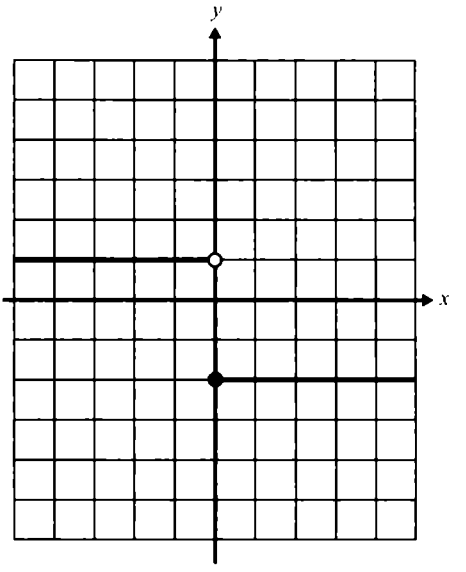


2. Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se presentan a continuación:

$y = f(x)$

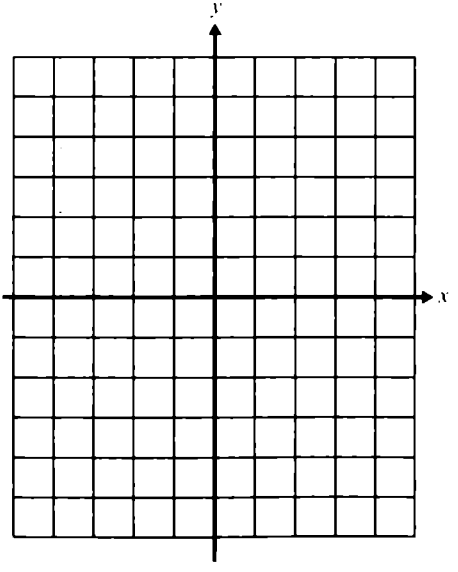


$y = g(x)$

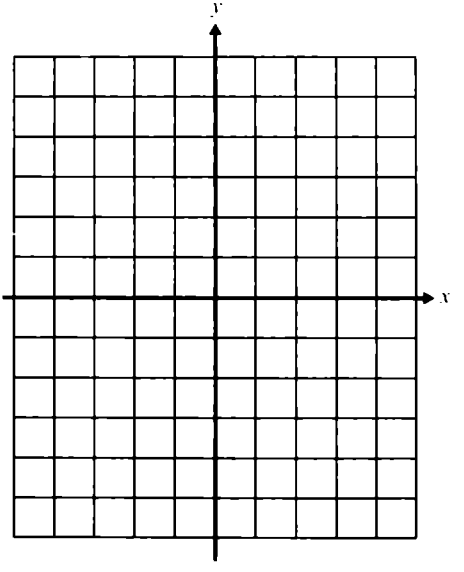


i) Graficar:

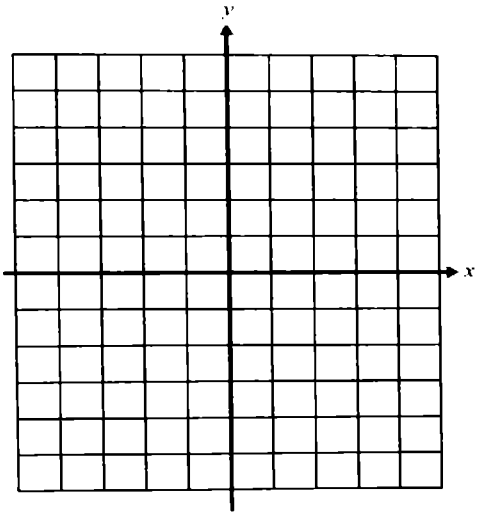
$y = f(x) + 4$



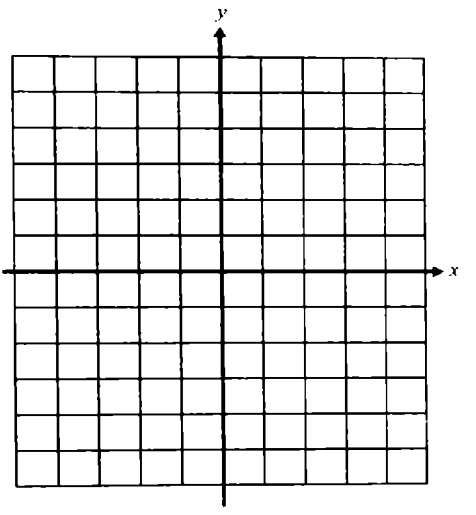
$y = g(x) - 4$



$y = f(x) - 3$

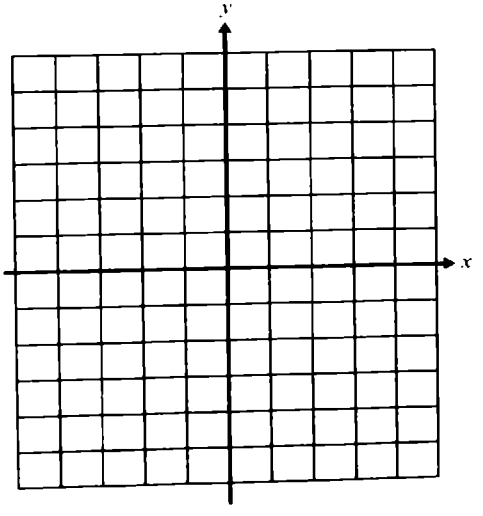


$y = g(x) - 3$

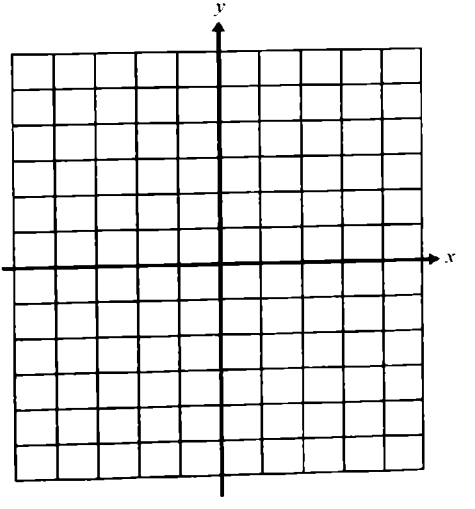


3. Graficar cada una de las siguientes funciones:

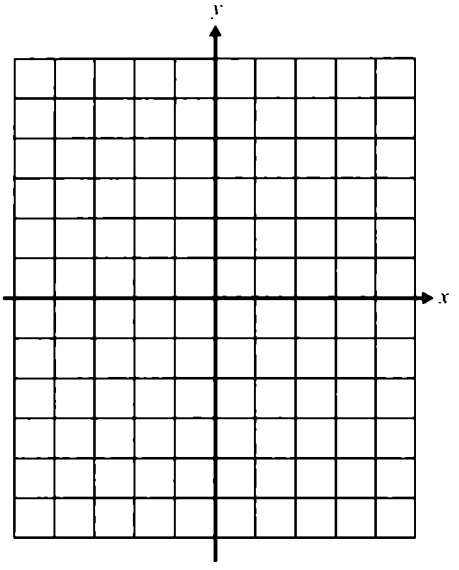
$f(x) = x^3 - 1$



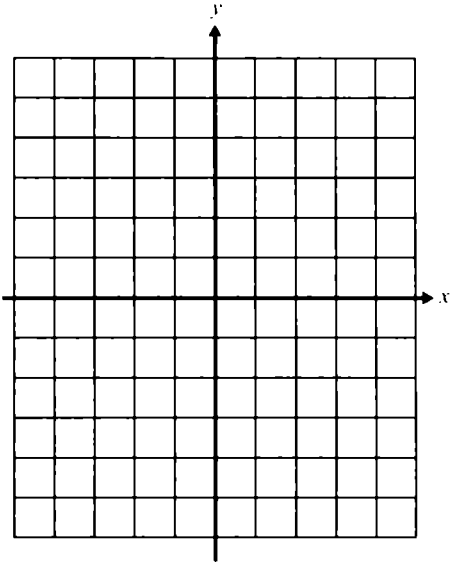
$f(x) = x^4 + 3$



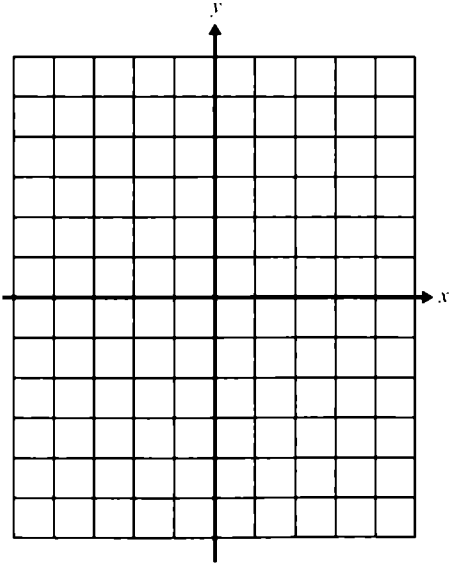
$f(x) = |x| + 4$



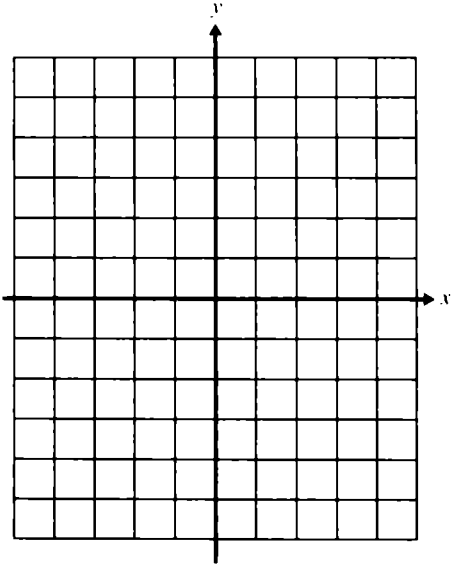
$f(x) = \sqrt{x} - 2$



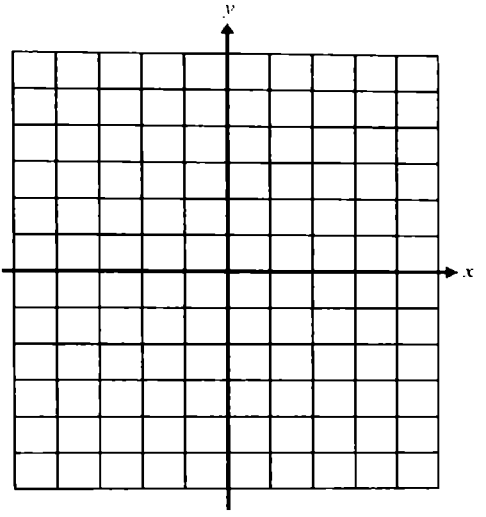
$f(x) = x + 5$



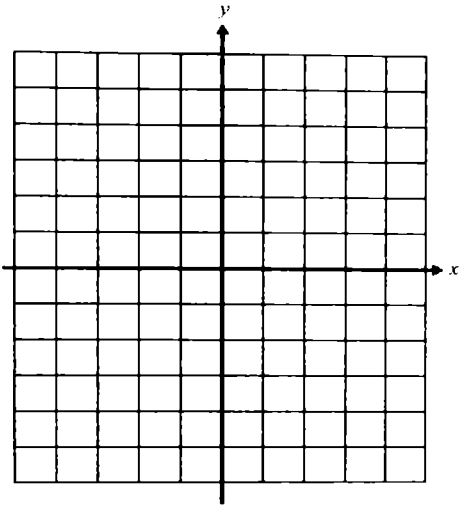
$y = f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$



$y = \cos x - 1$

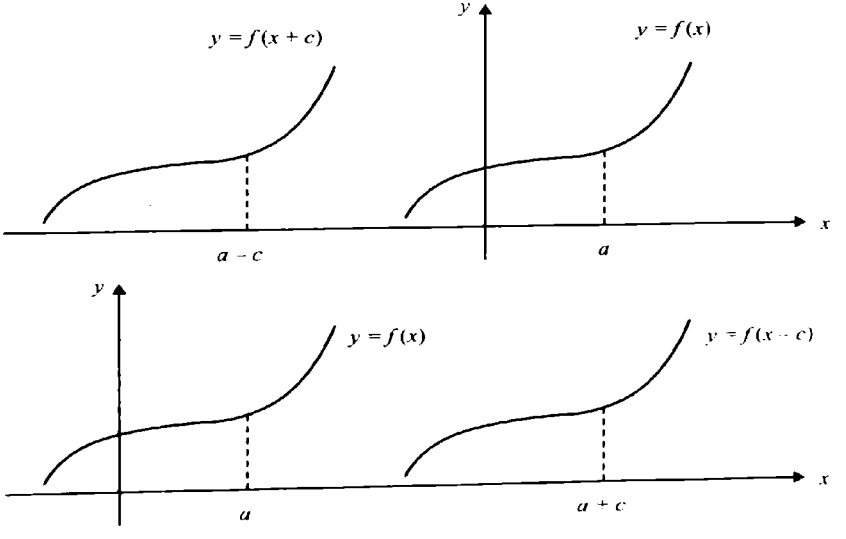


$y = f(x) = x^2 - 3$



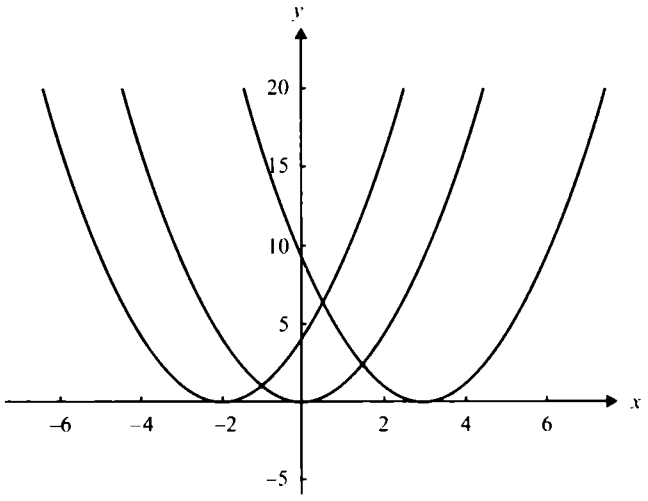
Si $y = f(x + c)$ y si $c > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ se trasladará c unidades hacia la izquierda.

Si $y = f(x - c)$ y si $c > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ se trasladará c unidades hacia la derecha.

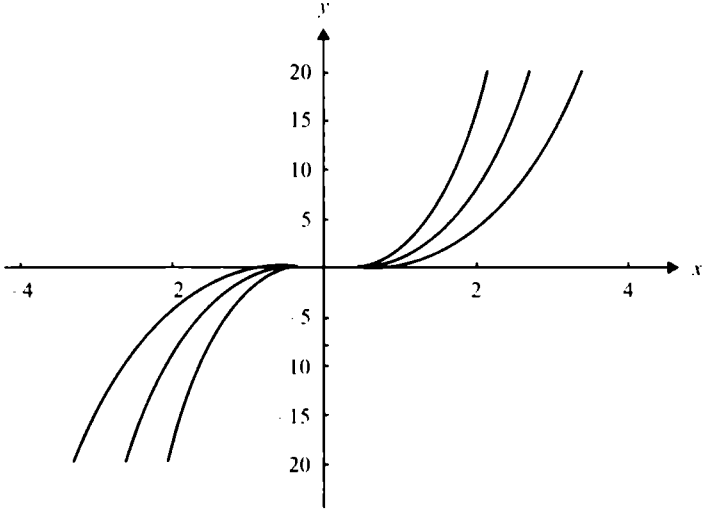


Ejemplos.

5. Las gráficas de $f(x) = x^2$, $f(x) = (x + 2)^2$ y $f(x) = (x - 3)$ se muestran a continuación:



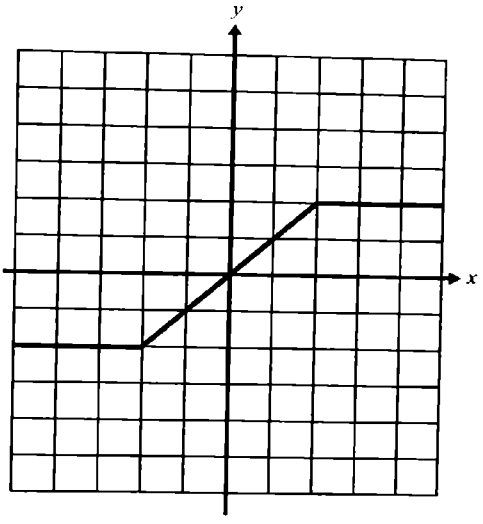
6. Las gráficas de $f(x) = 2x^3$, $f(x) = x^3$ y $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)x^3$ se presentan a continuación:



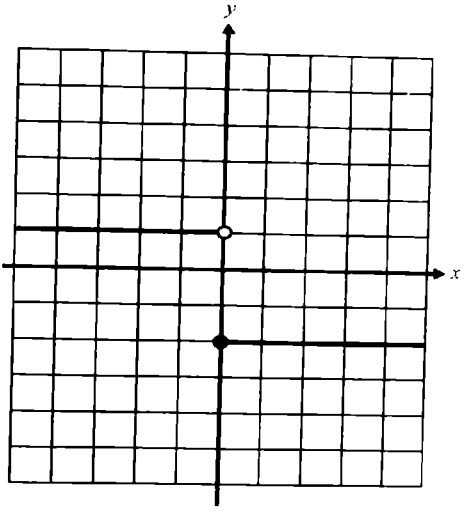
Ejercicios.

1. Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se presentan a continuación:

$y = f(x)$

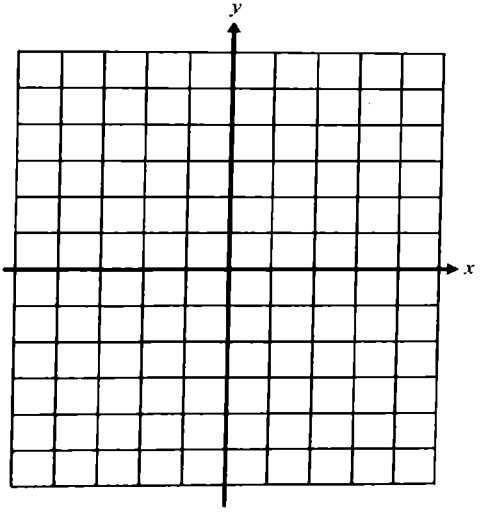


$y = g(x)$

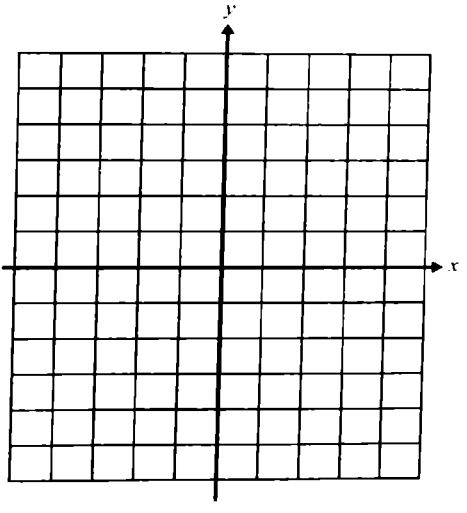


i) Graficar:

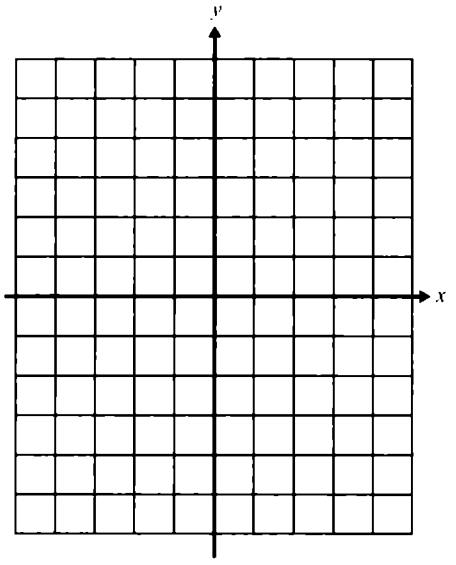
$y = f(x + 1)$



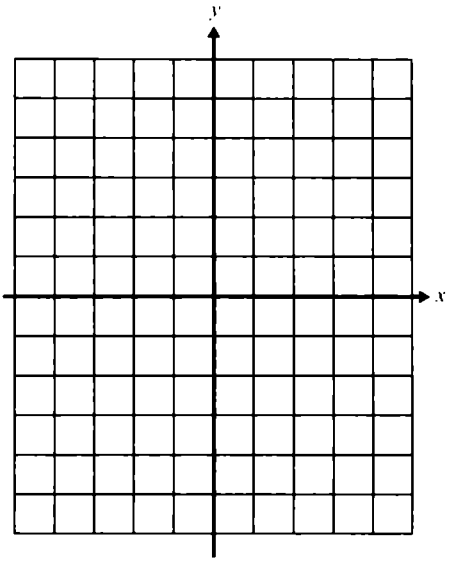
$y = g(x + 2)$



$y = f(x - 3)$

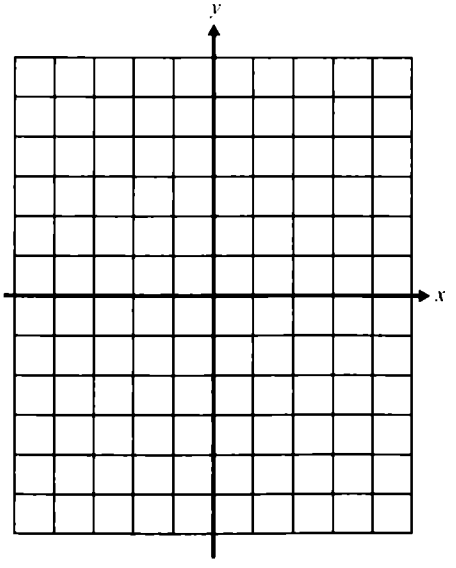


$y = g(x - 1)$

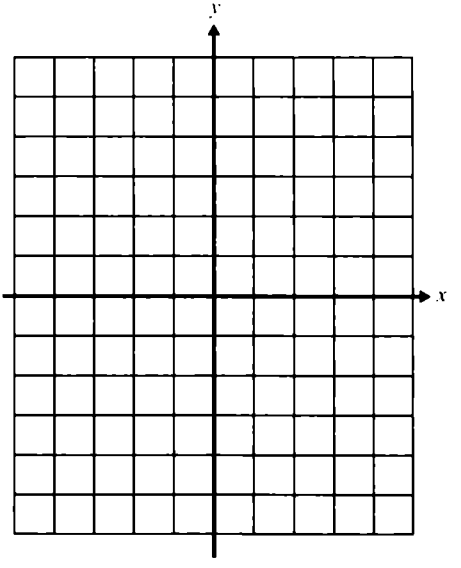


2. Graficar cada una de las siguientes funciones.

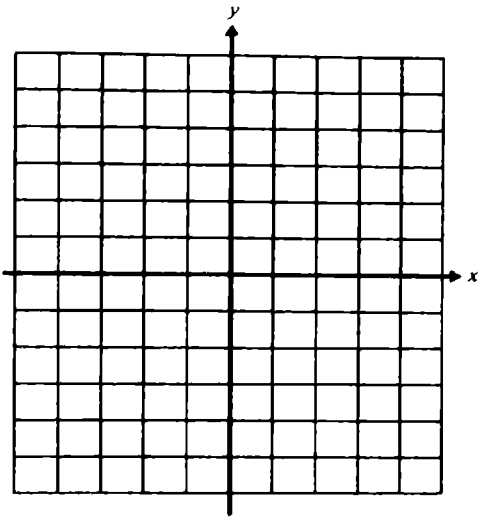
$f(x) = (x - 1)^3$



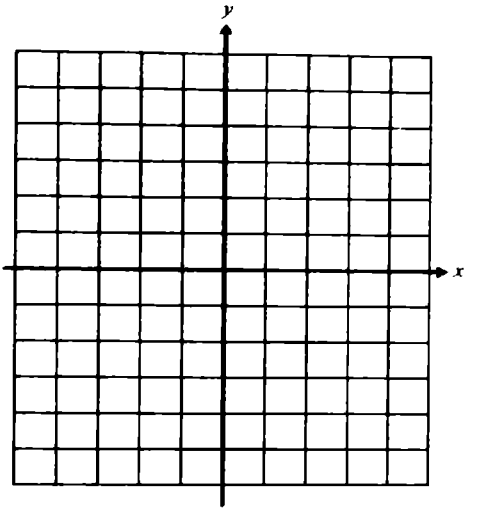
$f(x) = |x - 1|$



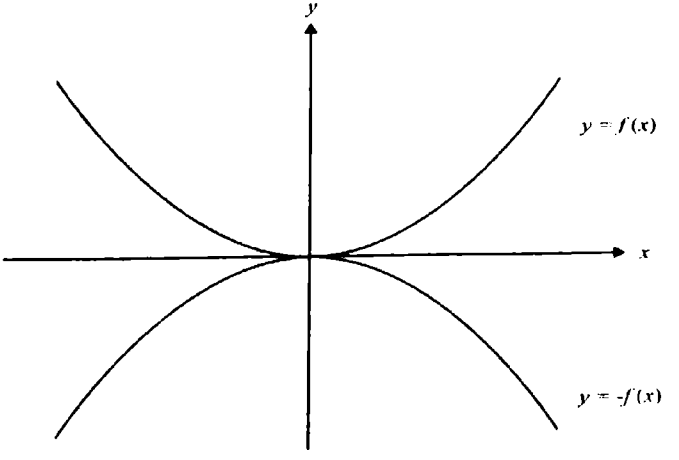
$f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



$f(x) = \sqrt{x-2}$



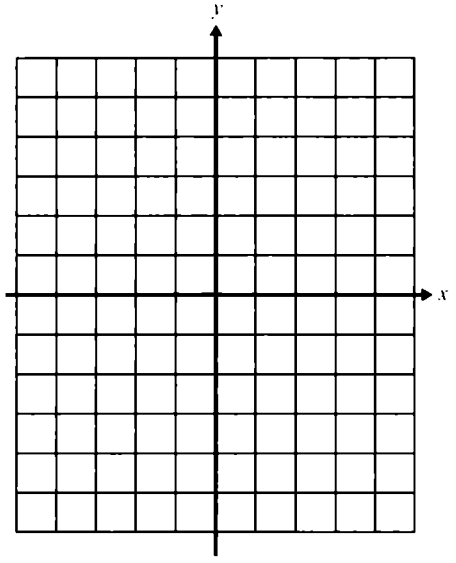
La gráfica de $y = -f(x)$ será una reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje de las x.



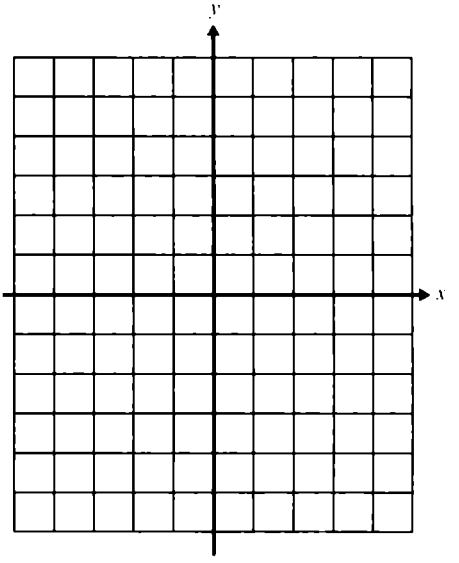
Ejemplos.

3. Graficar cada una de las siguientes funciones.

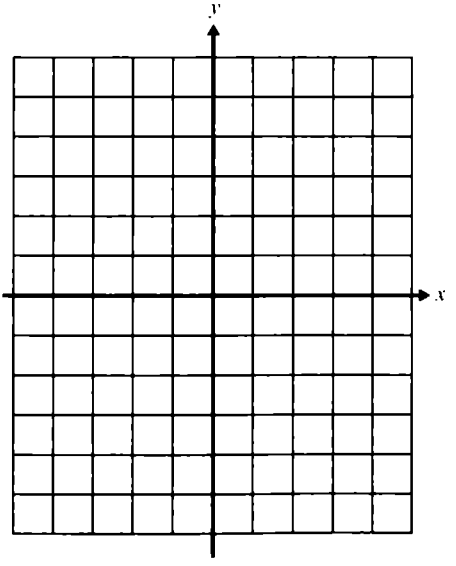
$f(x) = 2x^2 - 1$



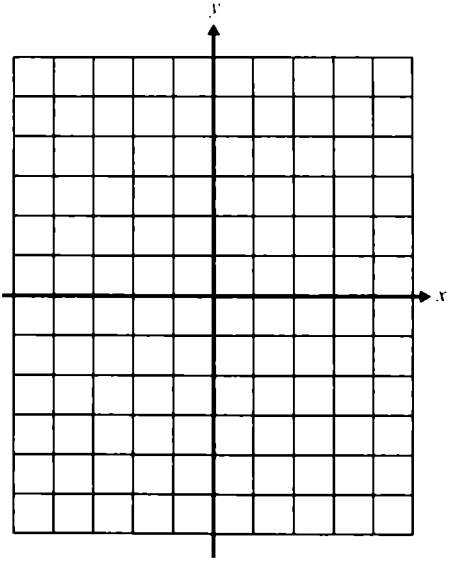
$f(x) = 2 - 3x^3$



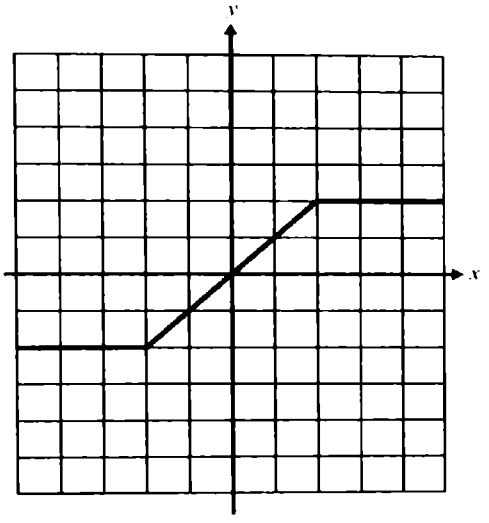
$f(x) = \sqrt{x + 2} - 2$

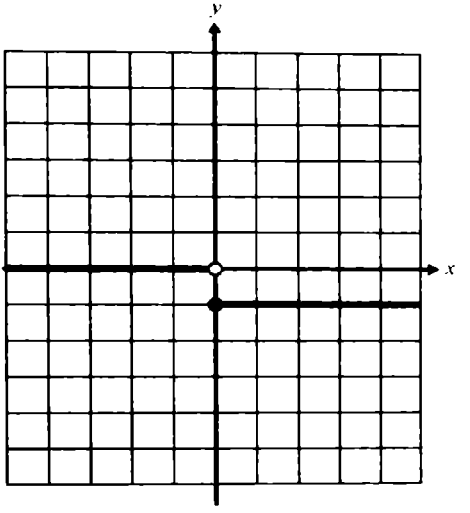


$f(x) = 2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$



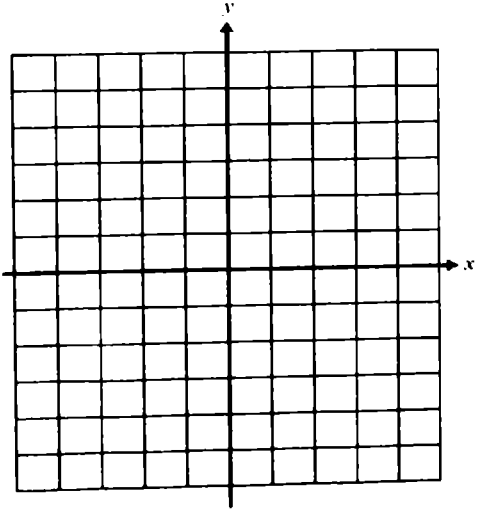
4. Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se presentan a continuación:

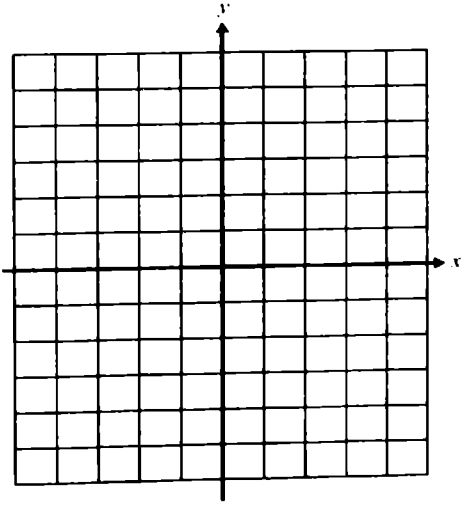




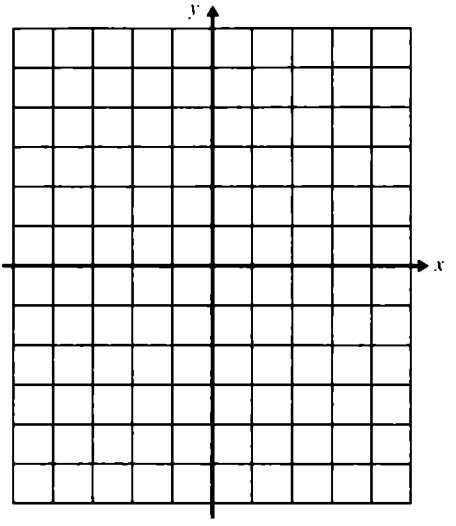
i) Graficar las siguientes funciones:

$y = f(x) - 1$ $\qquad\qquad$ $y = -4g(x)$

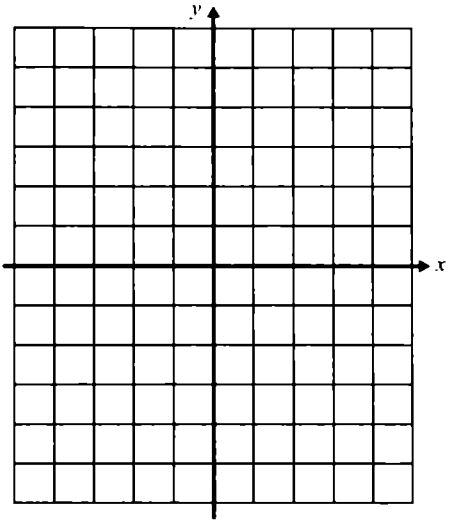




$y = -2f(x - 1)$



$y = -2g(x - 1) + 2$



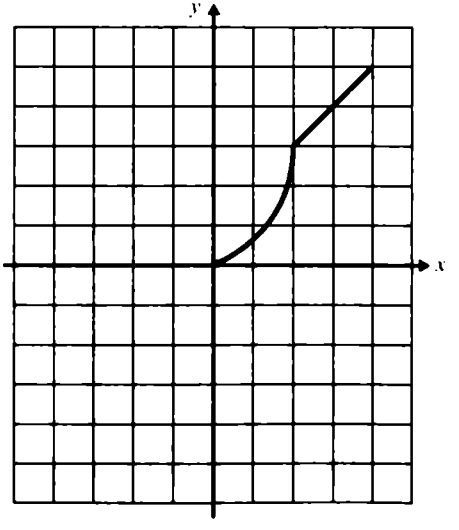
Ejercicios.

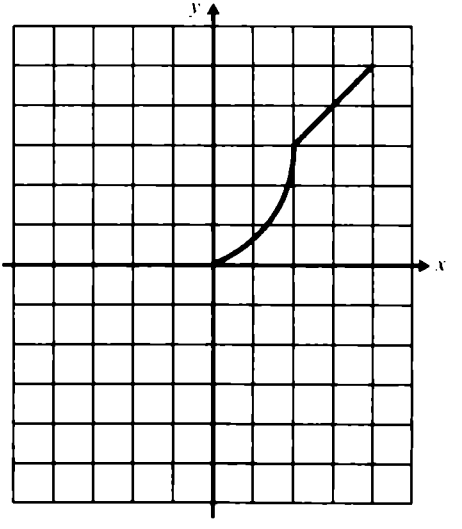
Determinar si las siguientes funciones son pares o impares:

1. $f(x) = 5x^3 + 2x$
2. $f(x) = |x - 3|$
3. $f(x) = x^4 - x^2 - 1$
4. $f(x) = 5x^5 - 4x^3$
5. $f(x) = \sqrt{x}$
6. $f(x) = 5$
7. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

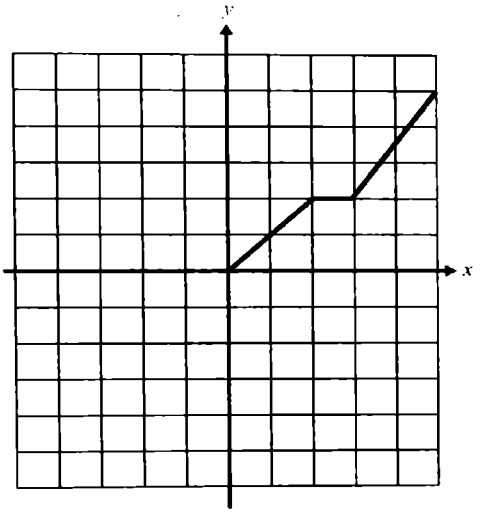
Completar las gráficas dadas en los siguientes problemas si:

8. $f(x)$ es par
9. $f(x)$ es impar

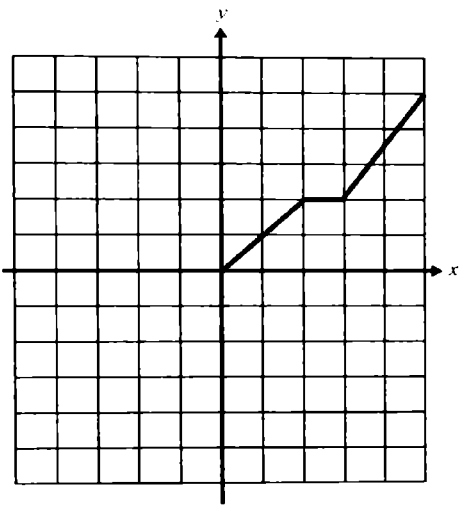




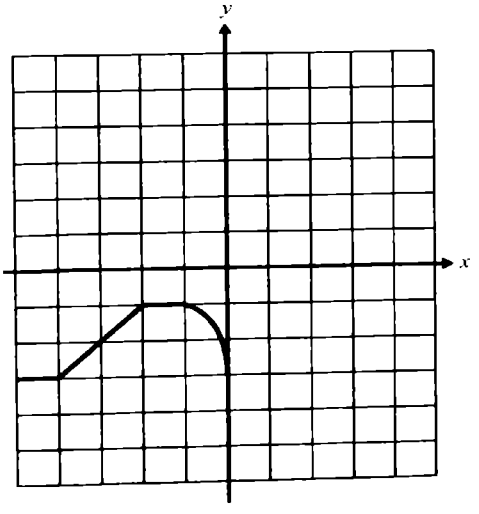
10. $f(x)$ es par



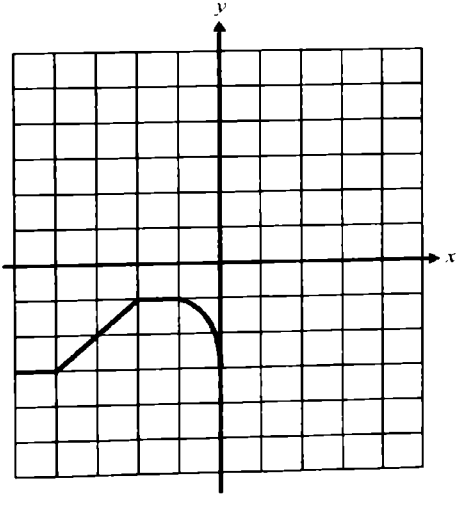
11. $f(x)$ es impar



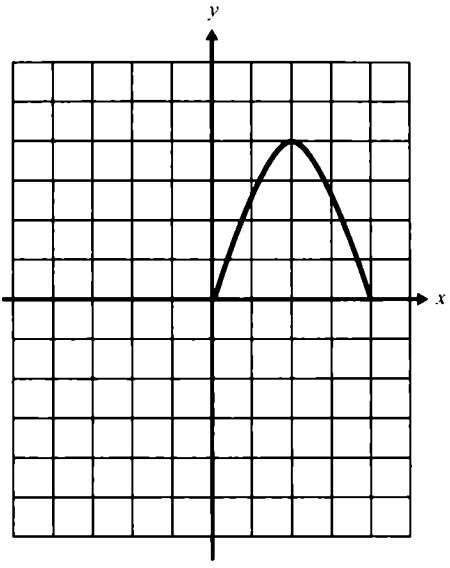
12. $f(x)$ es par



13. $f(x)$ es impar



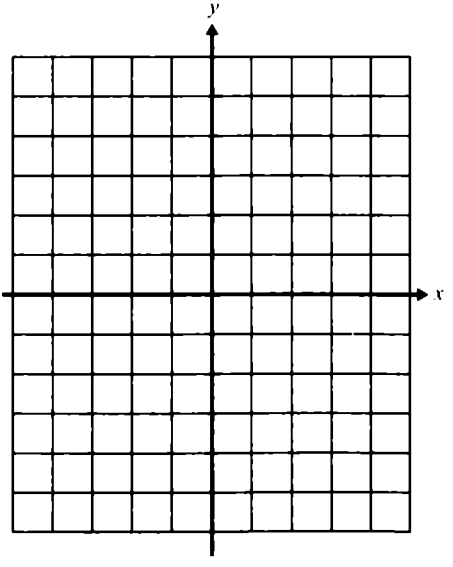
La gráfica de $y = f(x)$, cuyo dominio es el intervalo [0,4] se muestra a continuación:

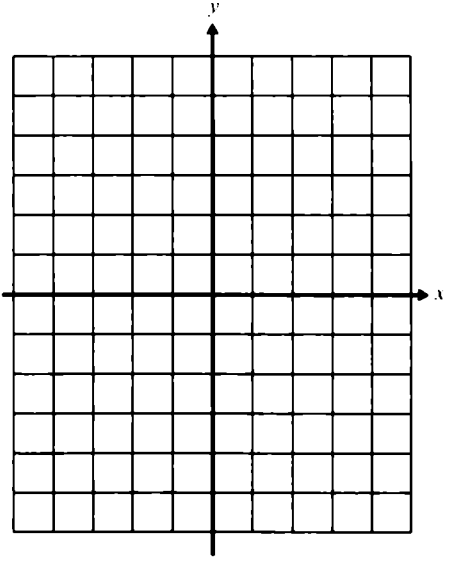


Realizar las gráficas de cada una de las siguientes funciones:

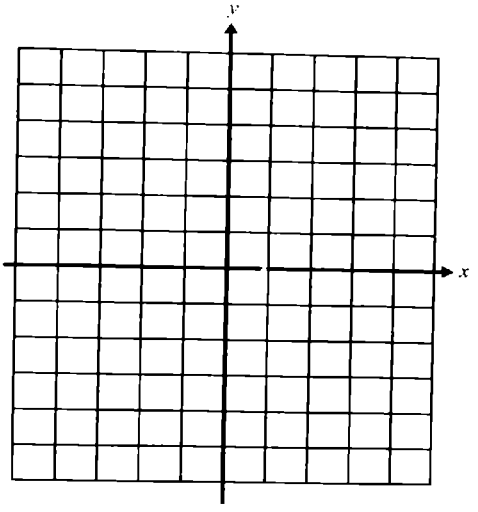
14. $y = f(x + 3)$

15. $y = f(x - 1)$

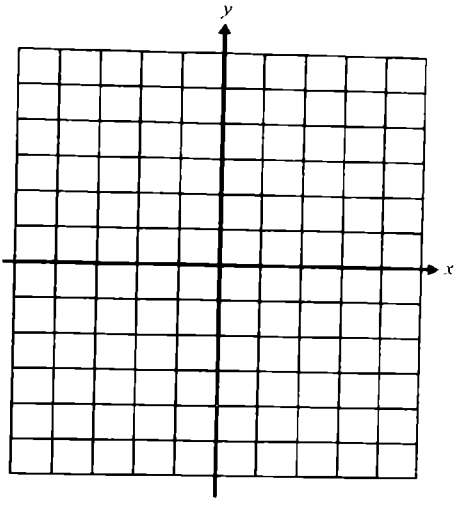




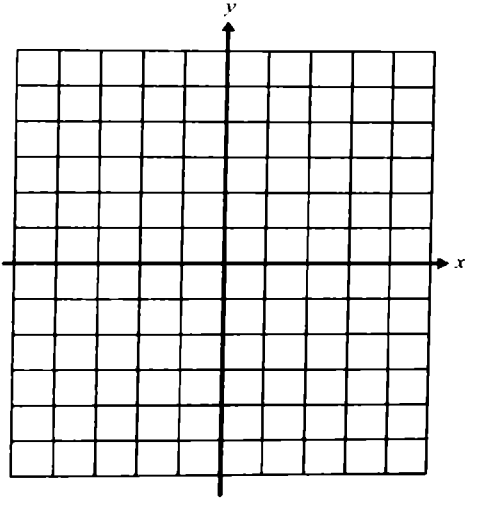
16. $y = f(x) + 2$



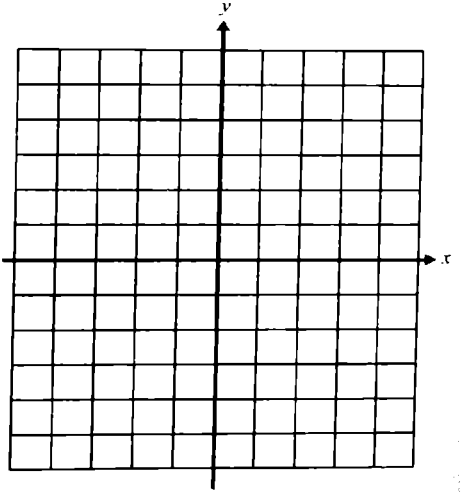
17. $y = f(x) - 3$



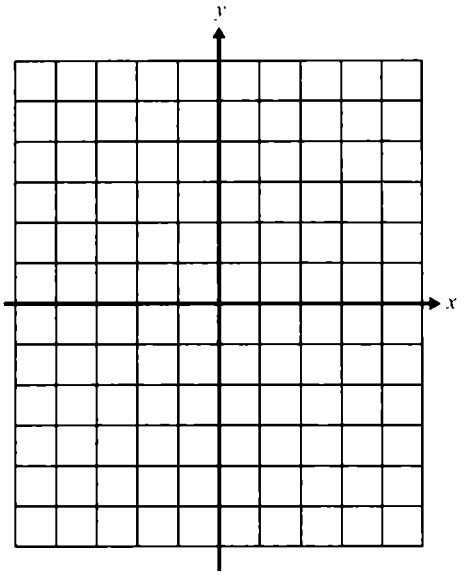
18. $y = -2f(x)$



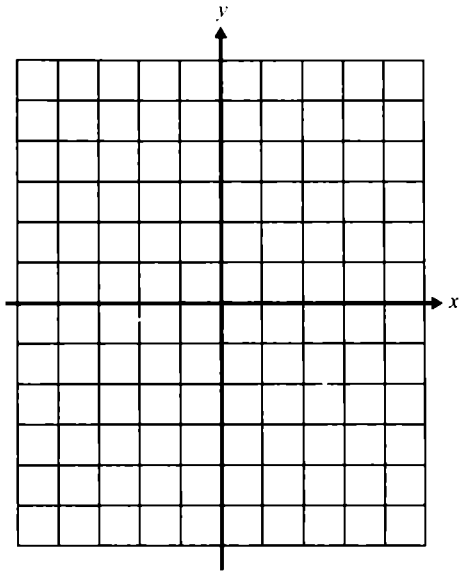
19. $y = \left(\frac{1}{3}\right) f(x)$



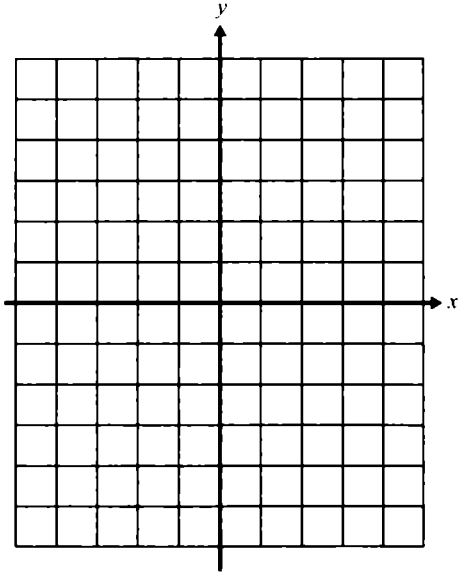
20. $y = f(x + 2) - 2$



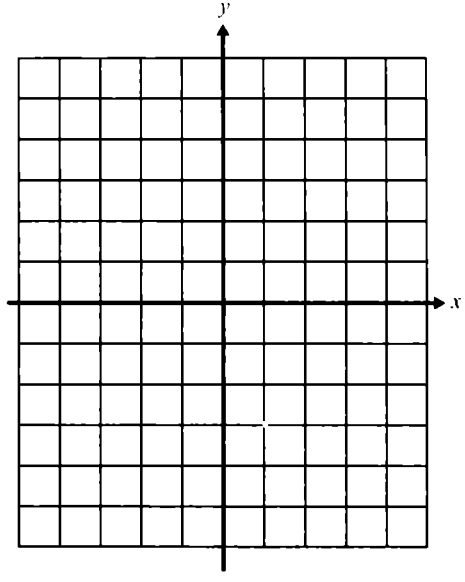
21. $y = f(x - 2) + 1$



22. $y = -f(x + 2) - 2$

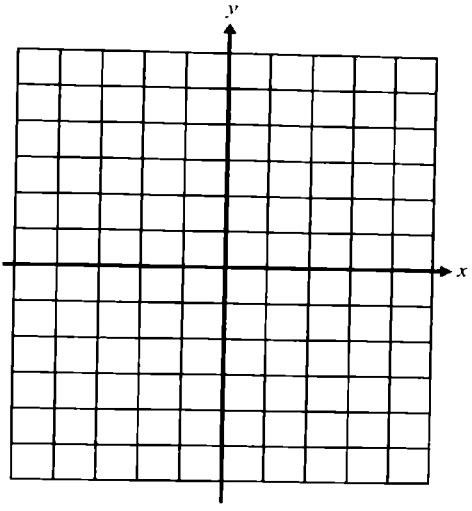


23. $y = f(x - 2) + 1$

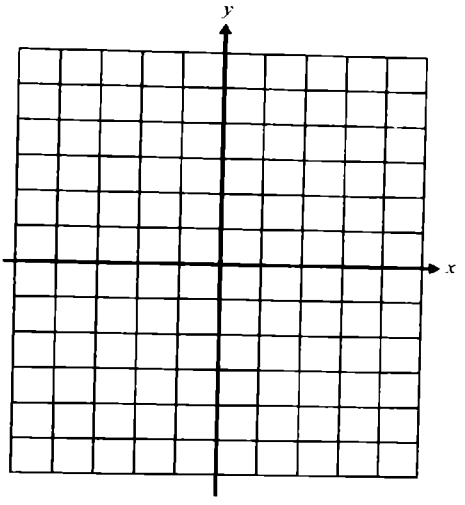


Graficar cada una de las siguientes funciones:

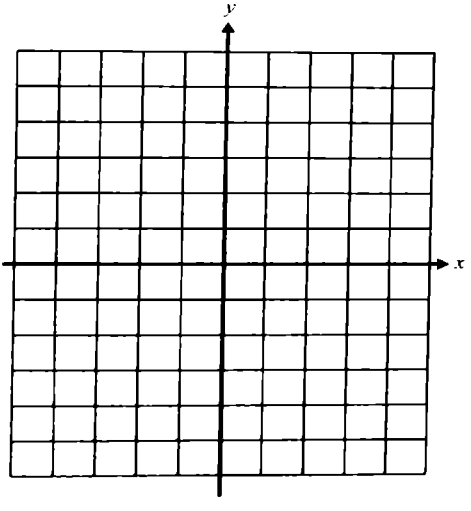
24. $y = |x| - 4$



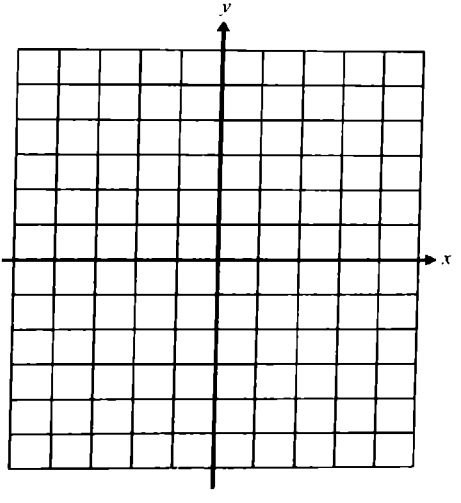
25. $y = |x + 3|$



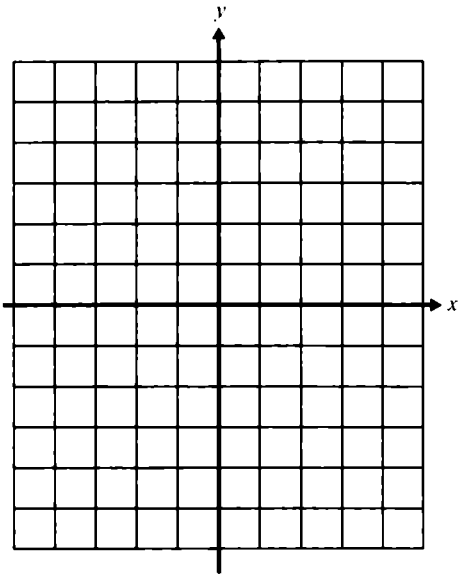
26. $y = -x^2 + 4$



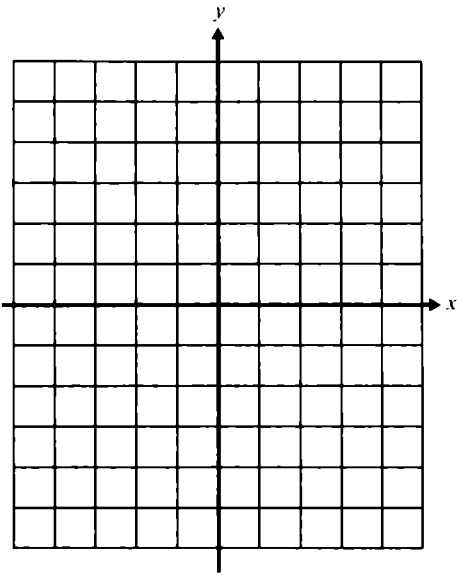
27. $y = 2\sqrt{x - 1} + 2$



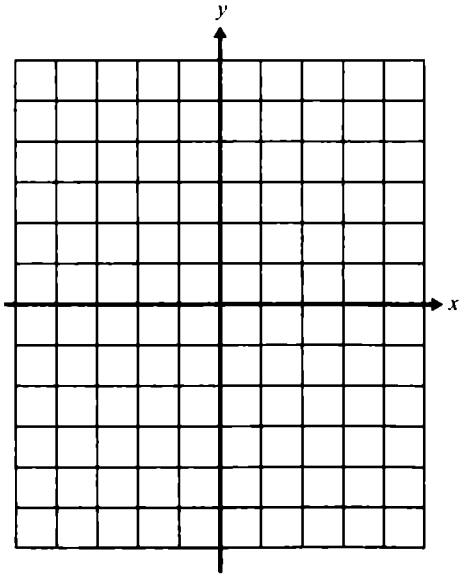
28. $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



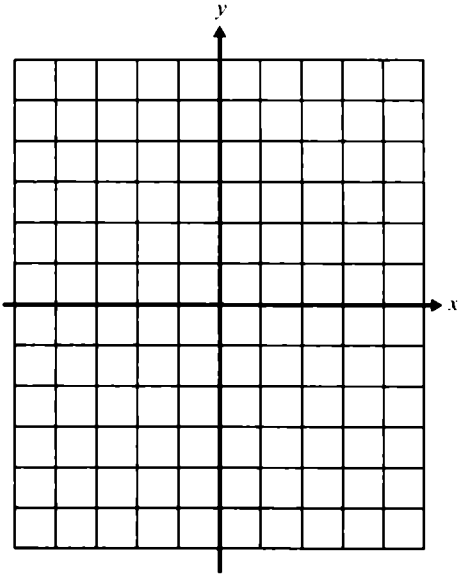
29. $y = \text{U}(x - 1)$



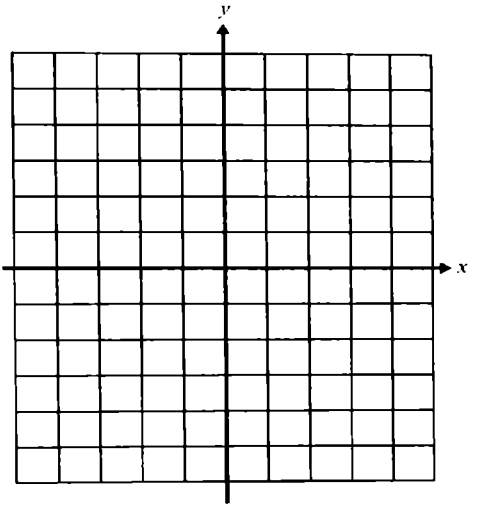
30. $y = \text{sgn}(x) + 2$



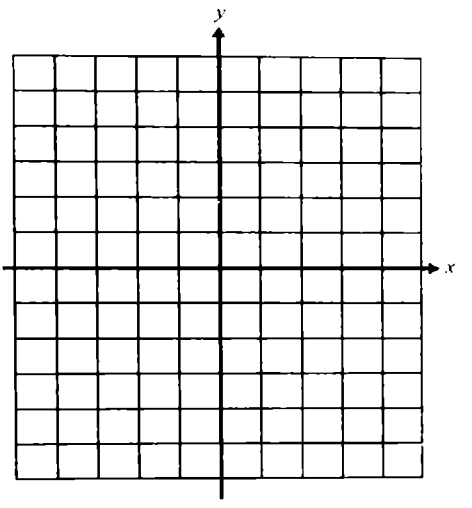
31. $y = [\,|\,x - 2\,|\,] - 1$



32. $y = 2 - \cos x$



33. $y = 2 - \operatorname{sen}(x - \pi)$



Sección 11.8

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el alumno deberá ser capaz de:

1. Dadas dos funciones cualesquiera, definir y obtener la función:
   a) suma
   b) resta
   c) producto
   d) cociente
2. Definir y obtener el dominio de cada una de las funciones del objetivo anterior.
3. Definir y obtener la función compuesta de dos funciones dadas.
4. Definir y obtener el dominio de una función compuesta de dos funciones dadas.
5. Realizar operaciones con funciones especiales.

Cuando estudiamos conjuntos, hicimos operaciones con ellos, como la unión, intersección, diferencia. En lógica, los conectivos, disyunción, conjunción y otros, se usaron para realizar operaciones entre las proposiciones. De igual manera, en

el conjunto de los números reales y de los complejos, se realizaron operaciones con ellos. Ahora tenemos un nuevo conjunto, que es el conjunto de las funciones, cuyo dominio y codominio son los números reales, así que es lógico tratar de definir operaciones en este conjunto.

Definición. Sean f y g dos funciones que van de los Reales a los Reales y cuyos dominios son respectivamente D_f y D_g.

Se definen las cuatro operaciones fundamentales de la siguiente manera:

Función Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Función Diferencia: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
Función Producto: $(fg)(x) = f(x)\, g(x)$
Función Cociente: $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$

El dominio de la suma, diferencia, producto y cociente denotado por D_{f+g}, D_{f-g}, D_{fg}, $D_{f/g}$ respectivamente, se define por:

$D_{f+g} = D_f$ intersección D_g
$D_{f-g} = D_f$ intersección D_g
$D_{fg} = D_f$ intersección D_g
$D_{f/g} = D_f$ intersección D_g, excepto los valores de x donde $g(x) = 0$

También se puede definir la función que resulta de multiplicar un número (c) por una función.

$$y = cf(x)$$

y el dominio de $y = cf(x)$ es el dominio de f.

Ejemplos

Obtener para las funciones $f(x)$ y $g(x)$ dadas en cada problema, la suma, resta, producto y cociente y dar en cada caso D_f, D_g, D_{f+g}, D_{f-g}, D_{fg}, $D_{f/g}$.

1. $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + 1$

$f(x) + g(x) = (x^2 - 1) + (x + 1) = x^2 + x$

$f(x) - g(x) = (x^2 - 1) - (x + 1) = x^2 - x - 2$

$f(x)\, g(x) = (x^2 - 1)(x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1$

$f(x) / g(x) = (x^2 - 1) / (x + 1) = x - 1$

D_f = Reales, D_g = Reales

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \text{ intersección } D_g$$
$$= \{\text{Reales}\} \text{ intersección } \{\text{Reales}\}$$
$$= \text{Reales}$$

$D_{f/g}$ = D_f intersección D_g, quitando aquel o aquellos valores donde $g(x) = 0$

es decir: $D_{f/g} = \{x \in R / x \neq -1\}$

2. $f(x) = 1/x$, $g(x) = 2x - 1$

$$f(x) + g(x) = 1/x + (2x - 1) = 1/x + 2x - 1$$
$$f(x) - g(x) = 1/x - (2x - 1) = 1/x - 2x + 1$$
$$f(x)\,g(x) = (1/x)(2x - 1) = 2 - 1/x$$

$$f(x)/g(x) = \frac{1/x}{2 - x}$$

$D_f = \{x \in R / x \neq 0\}$, D_g = Reales

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \text{ intersección } D_g$$
$$= \{x \in R / x \neq 0\}$$

$D_{f/g}$ = D_f intersección D_g = quitando aquel o aquellos valores donde $g(x) = 0$

es decir: $D_{f/g} = \{x \in R / x \neq 0 \text{ y } x \neq -1\}$

3. $f(x) = 1/(x^2 - 1)$, $g(x) = (x^2 - 4)/x^2$

$$f(x) + g(x) = [1/(x^2 - 1)] + [(x^2 - 4)/x^2]$$
$$f(x) - g(x) = [1/(x^2 - 1)] - [(x^2 - 4)/x^2]$$

$$f(x)g(x) = \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)\left(\frac{x^2 - 4}{x^2}\right)$$

$$f(x)/g(x) = \frac{\dfrac{1}{x^2 - 1}}{\dfrac{x^2 - 4}{x^2}}$$

$$D_f = \{x \in R / x \neq 1, x \neq -1\},\ D_g = \{x \in \text{Reales} / x \neq 0\}$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \text{ intersección } D_g$$
$$= \{x \in R / x \neq 1, x \neq -1, x \neq 0\}$$

$D_{f/g} = D_f$ intersección D_g = quitando aquel o aquellos valores donde $g(x) = 0$

es decir: $D_{f/g} = \{x \in R / x \neq 1, x \neq -1, x \neq 0, x \neq 2, x \neq -2\}$

4. $f(x) = x^{-1} + x^0 + x^2,\ g(x) = x^{-1} + 4$

$$f(x) + g(x) = (1/x + 1 + x^2) + (1/x + 4)$$
$$= 2/x + 5 + x^2$$
$$f(x) - g(x) = (1/x + 1 + x^2) - (1/x + 4)$$
$$= x^2 - 3$$
$$f(x)\,g(x) = (1/x + 1 + x^2)(1/x + 4)$$

$$f(x)/g(x) = \frac{(1/x) + 1 + x^2}{(1/x) + 4}$$

$$D_f = \{x \in R / x \neq 0\},\ D_g = \{x \in R / x \neq 0\}$$
$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \text{ intersección } D_g$$
$$= \{x \in R / x \neq 0\}$$

$D_{f/g} = D_f$ intersección D_g = quitando aquel o aquellos valores donde $g(x) = 0$

es decir: $D_{f/g} = \{x \in R / x \neq 0, x \neq -1/4\}$

5. $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = x^2 - 4$

$$f(x) + g(x) = \sqrt{x} + (x^2 - 4)$$
$$f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x^2 - 4) = \sqrt{x} - x^2 + 4$$
$$f(x)\,g(x) = (\sqrt{x})(x^2 - 4)$$

$$f(x)/g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4}$$

$$D_f = \{x \in R / x \geq 0\},\ D_g = \text{Reales}$$
$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \text{ intersección } D_g$$
$$= \{x \in R / x \geq 0\}$$

$D_{f/g} = D_f$ intersección D_g = quitando aquel o aquellos valores donde $g(x) = 0$

es decir: $D_{f/g} = \{x \in R / x \geq 0 \text{ con } x \neq 2\}$

6. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$f(x) + g(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$

$f(x) - g(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{1 - x^2}$

$f(x)\, g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\sqrt{1 - x^2}$

$$f(x)/g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, $D_g = [-1, 1]$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f$ intersección D_g

$= \{-1, 1\}$

$D_{f/g} = D_f$ intersección D_g = quitando aquel o aquellos valores donde $g(x) = 0$

es decir: $D_{f/g} = \phi$

7. $f(x) = \sqrt{x + 3}$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$

$f(x) + g(x) = \sqrt{x + 3} + \sqrt{x - 1}$

$f(x) - g(x) = \sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 1}$

$f(x)\, g(x) = \sqrt{x + 3}\sqrt{x - 1}$

$$f(x)/g(x) = \frac{\sqrt{x + 3}}{\sqrt{x - 1}}$$

$D_f = \{x \in R / x \geq -3\}$, $D_g = \{x \in \text{Reales} / x \geq 1\}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f$ intersección D_g

$= \{x \in R / x \geq 1\}$

$D_{f/g} = D_f$ intersección D_g = quitando aquel o aquellos valores donde $g(x) = 0$

es decir: $D_{f/g} = \{x \in R / x \geq 1\}$

Función compuesta

Definición. Sea f una función cuyo dominio e imagen son, respectivamente, D_f e I_f y g una función cuyo dominio e imagen son, respectivamente, D_g e I_g.

La FUNCIÓN COMPUESTA de f con g, denotada por fog, se define por:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

que se lee f compuesta con g.

El dominio de fog denotado por D_{fog}, se define por:

$$D_{fog} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$$

Ejemplos.

Obtener para las funciones $f(x)$ y $g(x)$, dadas en cada inciso $(fog)(x)$, $(gof)(x)$, $(fof)(x)$, $(gog)(x)$ y dar en cada caso D_f, D_g, D_{fog}, D_{gof}, D_{fof}, D_{gog}.

8. $f(x) = 2x + 1$; $g(x) = x + 3$

$f(g(x)) = f(x + 3) = 2(x + 3) - 1 = 2x + 5$

$g(f(x)) = g(2x - 1) = (2x - 1) + 3 = 2x + 2$

$f(f(x)) = f(2x - 1) = 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3$

$g(g(x)) = g(x + 3) = (x + 3) + 3 = x + 6$

D_f = Reales $\qquad$ D_g = Reales

$D_{fog} = D_{gof} = D_{fof} = D_{gog}$ = Reales

9. $f(x) = x^2$; $g(x) = 1/x$

$f(g(x)) = f(1/x) = (1/x)^2 = 1/x^2$

$g(f(x)) = g(x^2) = 1/x^2 = 1/x^2$

$f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$

$g(g(x)) = g(1/x) = 1/(1/x) = x$

$$D_f = \text{Reales}, \; D_g = \{x \in R / x \neq 0\}$$

$D_{fog} = \{x \in R / x \neq 0\}$

$D_{gof} = \{x \in R / x \neq 0\}$

$D_{fof} = \text{Reales}$

$D_{gog} = \{x \in R / x \neq 0\}$

10. $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $g(x) = x^2$

$f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{(x^2) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$

$g(f(x)) = g(\sqrt{x - 1}) = (\sqrt{x - 1})^2 = x - 1$

$f(f(x)) = f(\sqrt{x - 1}) = \sqrt{(x - 1)^{1/2}} - 1$

$g(g(x)) = g(x^2) = (x^2)^2 = x^4$

$D_f = \{x \in R / x \geq 1\}$, $D_g = \text{Reales}$

$D_{fog} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$D_{gof} = \{x \in R / x \geq 1\}$

$D_{fof} = \{x \in R / x \geq 2\}$ Se eliminan los valores entre 1 y 2 incluyendo a 1, ya que la función $f(f(x))$ no existe si x se encuentra en dicho intervalo.

$D_{gog} = \text{Reales.}$

11. $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \sqrt{x}$

$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 4 = x - 4$

$g(f(x)) = g(x^2 - 4) = \sqrt{x^2 - 4}$

$f(f(x)) = f(x^2 - 4) = (x^2 - 4)^2 - 4$

$g(g(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x^{1/2}} = \sqrt[4]{x}$

$D_f = \text{Reales}$, $D_g = \{x \in R / x \geq 0\}$

$D_{fog} = \{x \in R / x \geq 0\}$

$D_{gof} = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

$D_{fof} = \text{Reales}$

$D_{gog} = \{x \in R / x \geq 0\}$

12. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$f(g(x)) = f(\sqrt{1 - x^2}) = \sqrt{(1 - x^2)^{1/2}} = \sqrt[4]{1 - x^2}$

$g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{1 - (x)^{1/2}} = \sqrt{1 - x}$

$$f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{(x)^{1/2}} = \sqrt[4]{x}$$

$$g(g(x)) = g(\sqrt{1 - x^2}) = \sqrt{1 - [(1 - x^2)^{1/2}]^2}$$

$$= \sqrt{1 - (1 - x^2)} = \sqrt{x^2} = x.$$

$$D_f = \{x \in R / x \geq 0\},\ D_g = [-1, 1]$$

$$D_{fog} = [-1,1]$$

$$D_{gof} = [0,1]$$

$$D_{fof} = \{x \in R / x \geq 0\}$$

$$D_{gog} = [-1,1]$$

Operaciones con funciones especiales

Se pueden efectuar también operaciones de funciones especiales como la de *valor absoluto, signo de x, unitario, entero mayor,* combinándolas entre sí o con la función constante e identidad y obtener su gráfica, dominio e imagen.

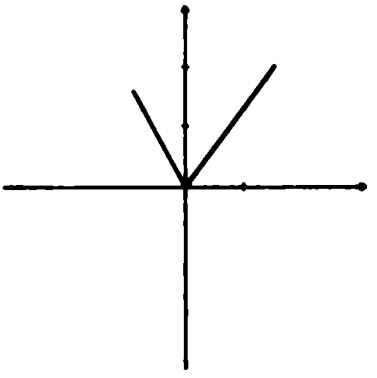
Ejemplos.

Graficar cada una de las siguientes funciones, dando el dominio e imagen.

13. $y = 2 \mid x \mid$

$$y = 2 \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica es:



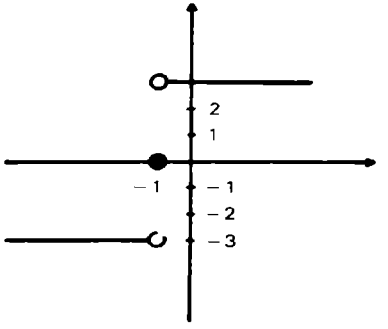
D = Reales

$I = \{ y \in R \mid y \geq 0 \}$

14. $y = 3\ sgn(x + 1)$

$$y = 3 \begin{cases} -1 & \text{si } x + 1 < 0 \\ 0 & \text{si } x + 1 = 0 \\ 1 & \text{si } x + 1 > 0 \end{cases} = \begin{cases} -3 & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ 3 & x > -1 \end{cases}$$

su gráfica es:



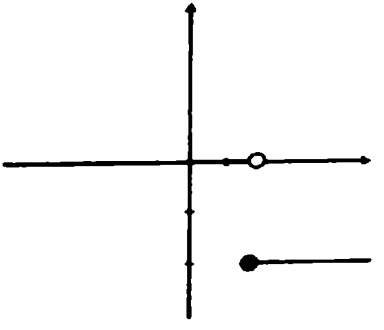
D = Reales
$I = \{-3, 0, 3\}$

15. $y = -2\ U\ (x - 2)$

$$y = -2 \begin{cases} 0 & x - 2 < 0 \\ 1 & x - 2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -2(0) & x < 2 \\ -2(1) & x \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x < 2 \\ -2 & x \geq 2 \end{cases}$$

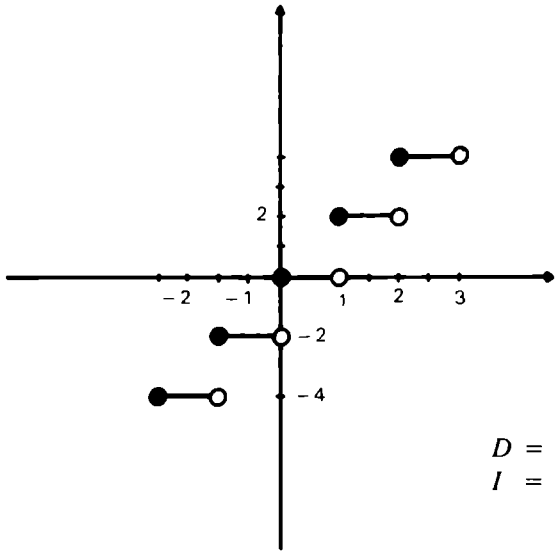
su gráfica es:



D = Reales
$I = \{-2, 0\}$

16. $y = 2\,[\![\, x \,]\!]$

su gráfica es:

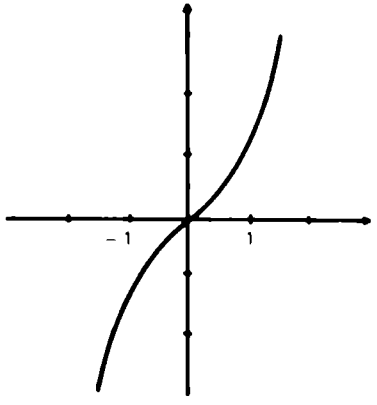


D = Reales
I = { Enteros pares }

17. $y = (x) \mid x \mid$

$$y = x \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

su gráfica es:

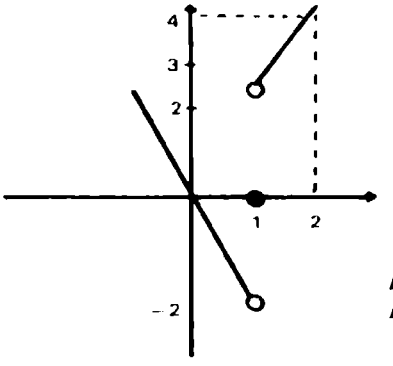


$D = I$ = Reales

18. $y = (2x)\ sgn(x - 1)$

$$y = 2x \begin{cases} -1 & x - 1 < 0 \\ 0 & x - 1 = 0 \\ 1 & x - 1 > 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

su gráfica es:

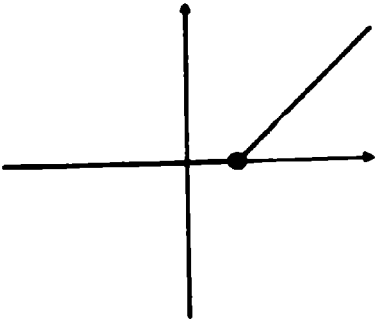


D = Reales
$I = \{y \in R / y > -2\}$

19. $y = (x - 1)\ U\ (x - 1)$

$$y = (x - 1) \begin{cases} 0 & x-1 < 0 \\ & \\ 1 & x-1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ & \\ x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

su gráfica es:



D = Reales
$I = \{y \in R / y \geq 0\}$

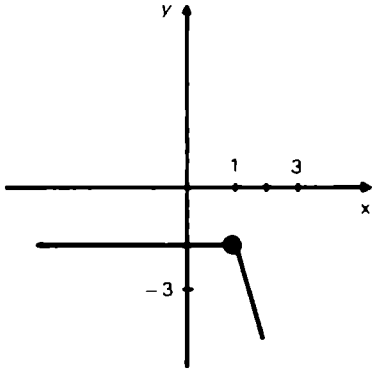
20. $y = | x - 1 | - x$

$$= \begin{cases} x - 1 & x - 1 < 0 \\ 0 & x - 1 > 0 \\ -(x - 1) & x - 1 > 0 \end{cases} - \begin{cases} x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 1 & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ -x + 1 & x > 1 \end{cases} - \begin{cases} x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 1 - x & x < 1 \\ 0 - x & x = 1 \\ -x + 1 - x & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ -x & x = 1 \\ -2x + 1 & x > 1 \end{cases}$$

su gráfica es:



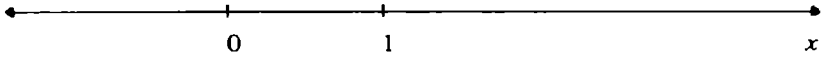
D = Reales
$I = \{ y \in R / y \leq 1 \}$

21. $y = | x - 1 | - | x |$

$$y = \begin{cases} -(x - 1) & x - 1 < 0 \\ 0 & x - 1 = 0 \\ x - 1 & x - 1 > 0 \end{cases} - \begin{cases} -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -x + 1 & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ x - 1 & x > 1 \end{cases} \qquad - \begin{cases} -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

Para efectuar este tipo de operación, se tendrán que analizar los intervalos y los valores donde cada función cambia de expresión algebraica. Para la función $y = | x - 1 |$, existe un cambio de expresión en $x = 1$ y para $y = | x |$ cambia en $x = 0$.



Por lo que se consideran los intervalos:

$(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ y los valores $x = 0$ y $x = 1$.

Es decir:

$$y = \begin{cases} ? & x < 0 \\ & x = 0 \\ & 0 < x < 1 \\ & x = 1 \\ & x > 1 \end{cases}$$

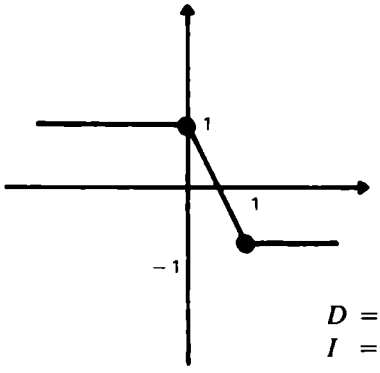
$$y = \begin{cases} (-x + 1) - (-x) & x < 0 \\ (1) - (0) & x = 0 \\ (-x + 1) - (-x) & 0 < x < 1 \\ (0) - (1) & x = 1 \\ (x - 1) - (x) & x > 1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 1 - 2x & 0 < x < 1 \\ -1 & x = 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 1 - 2x & 0 < x < 1 \\ -1 & x \geq 1 \end{cases}$$

es decir:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

su gráfica es:



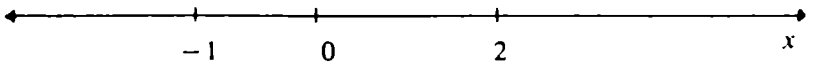
D = Reales
$I = \{y \in R / -1 \leq y \leq 1\}$

22. $y = sgn\,(x - 2) + sgn\,(x + 1)$

$$y = \begin{cases} -1 & x-2 < 0 \\ 0 & x-2 = 0 \\ 1 & x-2 > 0 \end{cases} + \begin{cases} -1 & x+1 < 0 \\ 0 & x+1 = 0 \\ -1 & x+1 > 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -1 & x < 2 \\ 0 & x = 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases} + \begin{cases} -1 & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ 1 & x > -1 \end{cases}$$

Los valores de x donde cambian las expresiones algebraicas, tanto en $sgn\,(x - 2)$ y $sgn\,(x + 1)$ son: $x = 2$ y $x = -1$.

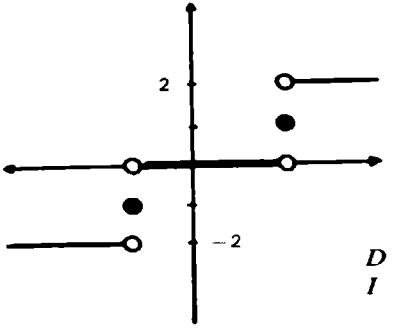


Por lo que haremos las operaciones en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$ y en los valores de $x = -1$ y $x = 2$; es decir:

$$y = \begin{cases} ? & x < -1 \\ & x = -1 \\ & -1 < x < 2 \\ & x = 2 \\ & x > 2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} (-1) + (-1) & x < -1 \\ (-1) + (0) & x = -1 \\ (-1) + (1) & -1 < x < 2 \\ (0) + (1) & x = 2 \\ (1) + (1) & x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -2 & x < -1 \\ -1 & x = -1 \\ 0 & -1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$$

su gráfica es:



D = Reales
$I = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

23. $y = (x + 1)\, U\,(x + 1) - x\, U\,(x)$

$$y = (x + 1) \begin{cases} 0 & x + 1 < 0 \\ 1 & x + 1 \geq 0 \end{cases} - x \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

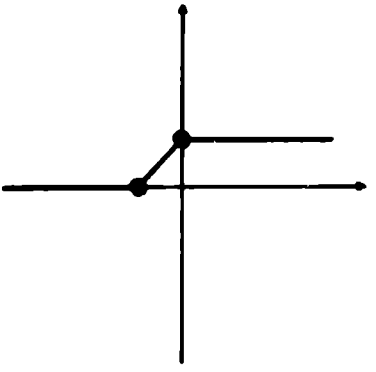
$$y = \begin{cases} (x+1)(0) & x < -1 \\ (x+1)(1) & x \geq -1 \end{cases} - \begin{cases} x(0) & x < 0 \\ x(1) & x \geq 0 \end{cases}$$

Consideremos los valores de $x=1$, $x=0$ y los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ y $(0, \infty)$ para efectuar las operaciones.

$$y = \begin{cases} (0) - (0) & x < -1 \\ (0) - (0) & x = -1 \\ (x+1) - (0) & -1 < x < 0 \\ (1) - (0) & x = 0 \\ (x+1) - (x) & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ x+1 & -1 < x < 1 \\ 1 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ x+1 & -1 < x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

su gráfica es:



D = Reales
$I = \{y \in R / y \geq 0\}$

24. $y = sgn(x-2) + U(x+1)$

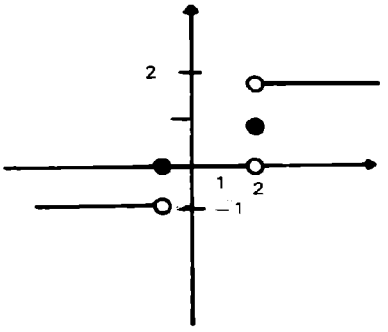
$$y = \begin{cases} -1 & x-2 < 0 \\ 0 & x-2 = 0 \\ 1 & x-2 > 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 & x+1 < 0 \\ 1 & x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -1 & x < 2 \\ 0 & x = 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases} + \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 & x \geq -1 \end{cases}$$

Consideremos los valores de $x=1$, $x=2$ y los intervalos $(-\infty, -1)$ $(-1, 2)$ y $(2, \infty)$ para efectuar las operaciones.

$$y = \begin{cases} (-1) + (0) & x < -1 \\ (-1) + (1) & x = -1 \\ (-1) + (1) & -1 < x < 2 \\ (0) + (1) & x = 2 \\ (1) + (1) & x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ 0 & -1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$$

su gráfica es:



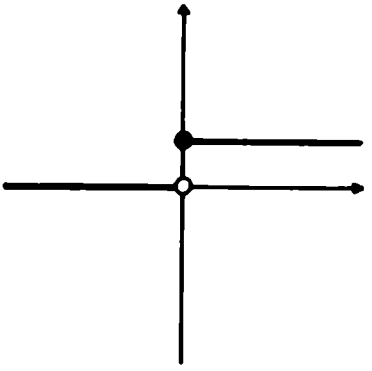
D = Reales
$I = \{-1, 0, 1, 2\}$

25. $y = sgn\ (U(x))$

$$y = \begin{cases} -1 & \text{si } U(x) < 0 \\ 0 & \text{si } U(x) = 0 \\ 1 & \text{si } U(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{no existe } x \text{ tal que } U(x) < 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

su gráfica es:

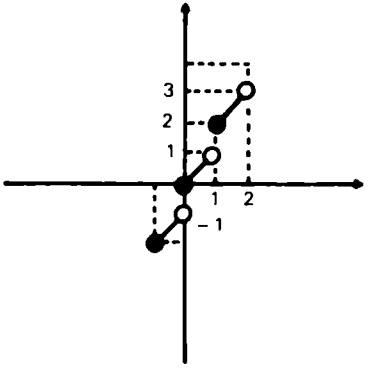


D = Reales
I = { 0, 1 }

26. $y = [\![x]\!] + x$

$$y = \begin{cases} \vdots & & \vdots \\ (-2) + x & \text{si} & -2 \leq x < -1 \\ (-1) + x & \text{si} & -1 \leq x < 0 \\ (0) + x & \text{si} & 0 \leq x < 1 \\ (1) + x & \text{si} & 1 \leq x < 2 \\ (2) + x & \text{si} & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & & \vdots \end{cases}$$

Una parte de la gráfica es:



D = Reales
I = { . . . ∪ [−4, −3) ∪ [−2, −1) ∪ [0, 1) ∪ [2, 3) ∪ [4, 5) ∪ . . . }

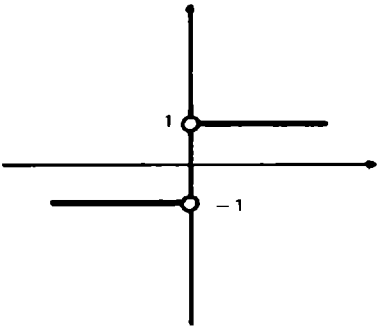
Es decir: I = { x e R/x es un número que está entre número par (incluyéndolo) y el siguiente impar}

27. $y = \dfrac{| x |}{x}$

$$y = \frac{\begin{cases} -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}}{x}$$

$$y = \begin{cases} -x/x & x < 0 \\ 0/x & x = 0 \\ x/x & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \text{no existe} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

su gráfica es:



$D = \{ x \in R / x \neq 0 \}$
$I = \{ -1, 1 \}$

Ejercicio.

1. Para cada par de funciones, encontrar $f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ y además, dar D_f, D_g, D_{f+g}, D_{f-g}, D_{fg}, $D_{f/g}$

a) $f(x) = 3x - 5$, $\quad g(x) = 2x + 7$

b) $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$, $\quad g(x) = x^2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$, $\quad g(x) = \dfrac{x + 3}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$, $\quad g(x) = \dfrac{x + 2}{x^2}$

e) $f(x) = x^{-1} + 2x^0$, $\quad g(x) = x^{-2} - 2$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 2$, $\quad g(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$, $\quad g(x) = x + 1$

h) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \sqrt{x}$

j) $f(x) = \sqrt{x + 3}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

k) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \sqrt{x + 1}$

l) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

m) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

n) $f(x) = \sqrt{x + 2}$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 3}}$

ñ) $f(x) = (x^2 + 1)^{3/2}$, $g(x) = x^{2/3} + 1$

o) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

2. Para cada par de funciones, encontrar $(fog)(x)$, $(gof)(x)$, $(fof)(x)$, $(gog)(x)$

a) $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = 2x + 7$
b) $f(x) = x + 8x - 1$, $g(x) = x + 1$
c) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = \sqrt{x}$
d) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$
e) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

f) $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

g) $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = 2$
h) $f(x) = 5$, $g(x) = \sqrt{x}$
i) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

j) $f(x) = (x - 1)^{3/2}$, $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

k) $f(x) = x^{2/3}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$

l) $f(x) = (2x - x^2)^{1/2}$, $g(x) = (2x - x^2)$

m) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{1}{x^2}}$, $g(x) = x^4$

n) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 16}$

$\tilde{n})\ f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad g(x) = \dfrac{1}{x+2}$

$o)\ f(x) = \dfrac{1}{x+2}, \qquad g(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

3. Obtener para cada inciso del problema anterior, D_{fog}, D_{gof}, D_{fof}, D_{gog}.
4. En cada uno de los siguientes incisos, dar una expresión algebraica para la función y además, graficar dando un dominio e imagen.

a) $y = 2 \mid x + 3 \mid$ *b)* $y = -2\ sgn\ x$

c) $y = -2[|x|]$ *d)* $y = 2\ U(x)$

e) $y = (x + 2)\ sgn\ (x - \ )$ *f)* $y = x\ U(x^2 - 1)$

g) $y = \mid x + 2 \mid + x$ *h)* $y = \mid x \mid + \mid x + 2 \mid$

i) $y = \mid x \mid - \mid x - 2 \mid$ *j)* $y = \mid x \mid - x$

k) $y = (x + 3)\ U(x + 3)$ *l)* $y = U(x - 3) - U(x - 2)$

m) $y = x + 3sgn\ x$

n) $y = sgn\ (x + 2) - sgn\ (x - 3)$

$\tilde{n})\ y = U(x + 2) - U(x - 3)$

o) $y = sgn\ (x + 2) + sgn\ (x - 3)$

p) $y = U(x + 2) - 2\ sgn\ x$

q) $y = sgn\ x + x\ U(x)$

r) $y = (sgn\ x)\ (U(x - 1))$

s) $y = sgn\ (U(x))$

t) $y = x - [|x|]$

u) $y = [|x|] + 2x$

w) $y = \dfrac{\mid x + 1 \mid}{x + 1}$

x) $y = \dfrac{U(x)}{2x}$

y) $y = \dfrac{sgn\ x}{x}$

5. Si $f(x) = x^2$, encontrar la función $g(x)$ de tal forma que $f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 9$.
6. Encontrar $f(x)$, si $f(g(x)) = 1 - x^2$ y $g(x) = 1 - x^2$
7. Encontrar $g(x)$, si $f(g(x)) = x^2 + 2x + 1$ y $f(x) = x^2$

8. Encontrar $f(x)$ si $f(g(x)) = 1 - x^2$ y $g(x) = x$.
9. Encontrar $g(x)$ si $f(g(x)) = x^2$ y $f(x) = x - 1$.

Sección 11.9

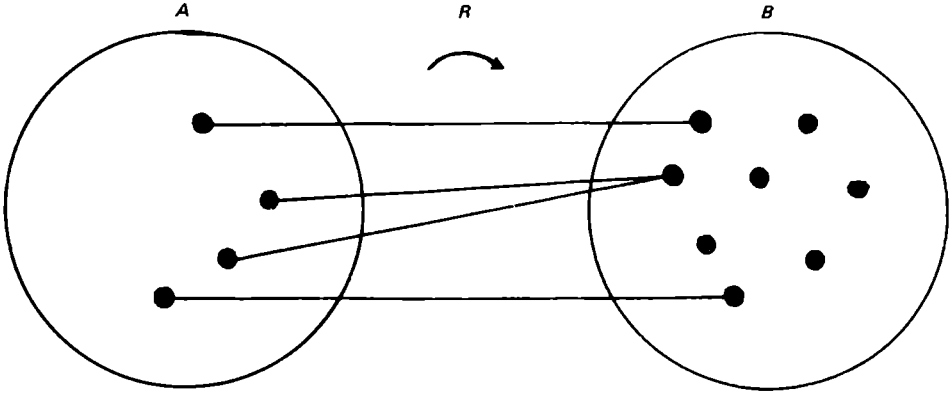
INVERSA

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el alumno deberá ser capaz de:

1. Definir la inversa de una relación
2. Dada una relación encontrar su inversa
3. Definir función inversa
4. Dada una función determinar si su inversa es o no función y en caso afirmativo escribir su inversa.

Recordemos que una función con A y B como dominio y codominio respectivamente es ante todo una relación de A en B y lo que la relación indica es la manera de conectar los elementos de A con los de B mediante una proposición.

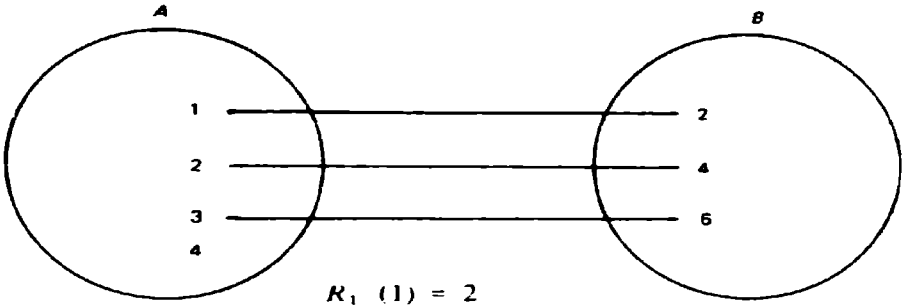


Dada esta relación R podemos pensar en una manera de conectar ahora los elementos de B con los de A de tal forma que la conexión original entre los conjuntos se conserve.

Ejemplos.

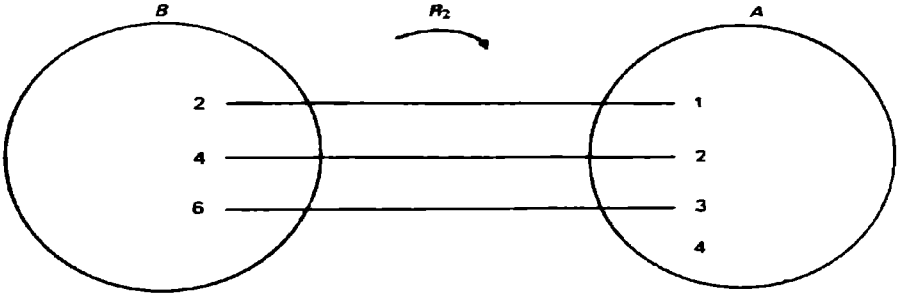
1. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$
   $B = \{2, 4, 6\}$

   $R_1 = \{(a, b) \mid b$ es el doble de $A\}$



$R_1\ (1) = 2$
$R_1\ (2) = 4$
$R_1\ (3) = 6$
$R_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$

Si ahora se considera a B como el conjunto de partida (dominio) y a A como el conjunto de llegada (codominio) tendríamos la siguiente relación.



$R_2\ (2) = 1$
$R_2\ (4) = 2$
$R_2\ (6) = 3$

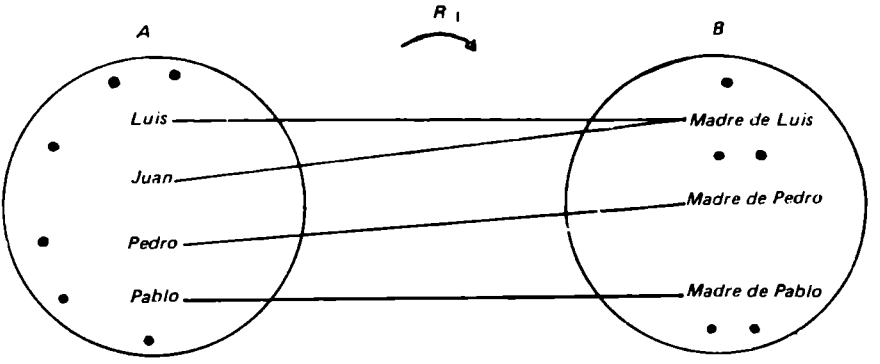
$R_2 = \{(2,1)\ (4, 2)\ (6,3)\}$

y $R_2 = \{(b, a) \mid a$ es la mitad de $b\}$.

2. Sea $A = \{$ alumnos de un jardín de niños $\}$
y $B = \{$ madres de dichos alumnos $\}$

Sea R_1 la relación de A en B dada por

$R_1 = \{(x, y) \mid y$ es la madre de $x\}$.



De esto podemos llegar a la relación R_2 de B en A.

dada por $R_2 = \{(y, x) \mid x \text{ es hijo de } y\}$.

3. Sea A = { enteros positivos }
   B = { enteros negativos }
   y R_1 la relación de A en B dada por
   $R_1 = \{(x, y) \mid y = -x\}$.

podemos definir R_2 relación de B en A como

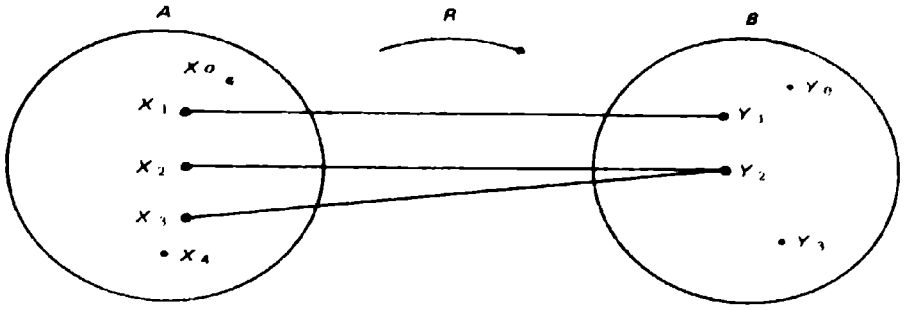
$$R_2 = \{(y, x) \mid x = -y\}.$$

Lo anterior nos lleva a la siguiente definición.

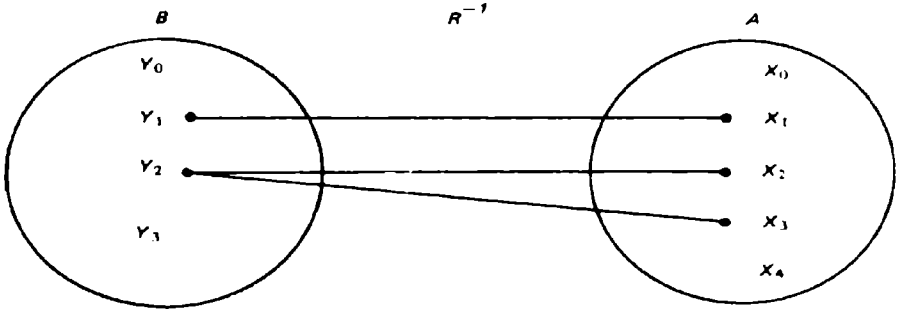
Definición. Dada una relación R de A en B, es decir $R \subset A \times B$ entonces a la relación R^{-1} dada por

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

la llamaremos "La Relación inversa de R"



$$R(x_1) = Y_1,\ R(x_2) = Y_2,\ R(x_3) = Y_2$$



$$R^{-1}(y_1) = x_1 \quad , \quad R^{-1}(y_2) = x_2 \quad , \quad R^{-1}(y_2) = x_3$$

Observaciones

a) El dominio de R es el codominio de R^{-1} y el codominio de R es el dominio de R^{-1}

b) En los ejemplos 1, 2 y 3 R_2 es la relación inversa de la relación R_1 dada en cada caso.

c) Si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R^{-1}$.

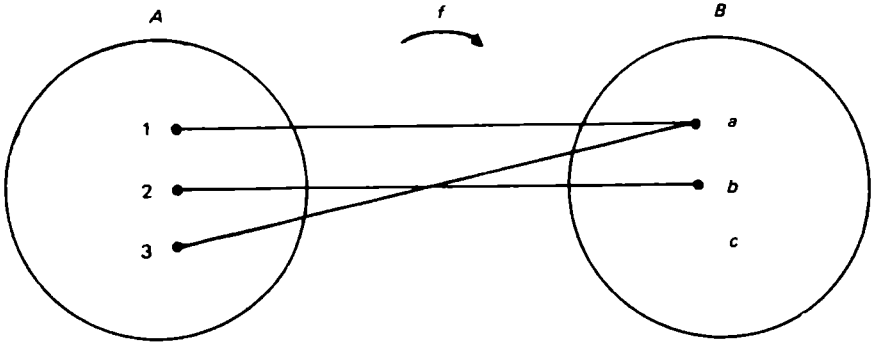
Dada una función $f: A \longrightarrow B$ siempre podremos obtener la relación inversa de f. Esta relación inversa puede o no ser función, en caso afirmativo la denotaremos por f^{-1} y diremos que es la función inversa. En caso de que la relación inversa de f no sea función, diremos que no existe la función inversa de f.

Ejemplos

Determinar la función inversa si existe de las funciones de A en B dadas a continuación

1. Si $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ a, b, c \}$
   $f = \{ (1, a) (2, b) (3, a) \}$

   Dominio de $f = \{ 1, 2, 3 \}$
   Codominio de $f = \{ a, b, c \}$
   Imagen de $f = \{ a, b \}$



   La relación inversa de f es

   $$\{ (a, 1) (a, 3) (b, 2) \}$$

   que no es función, por lo que la función inversa no existe.

2. Si $A = \{ 2, 4, 6 \}$ $B = \{ -1, -2, -3 \}$

   $f = \{ (2, -1), (4, -2), (6, -3) \}$

Dominio de $f = \{ 2, 4, 6 \}$

Codominio de f = imagen de $f = \{ -1, -2, -3 \}$

La relación inversa de f es

$f^{-1} = \{ (-1, 2), (-2, 4) (-3, 6) \}$

que sí es una función

Dominio de f^{-1} = imagen de $f = \{ -1, -2, -3 \}$
Codominio de f^{-1} = imagen de f^{-1} = dominio de $f = \{ 2, 4, 6 \}$

3. Si $A = B$ = reales

$f = \{ (x, y) \mid y = 2x \}$

Dominio de f = codominio de f = reales
Imagen de f = reales

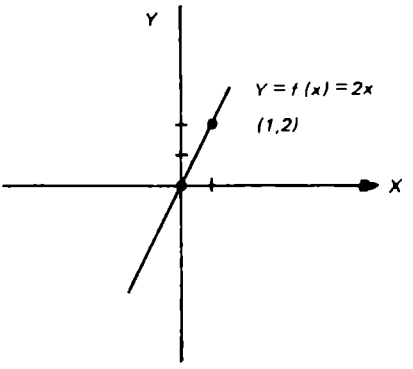
Entonces

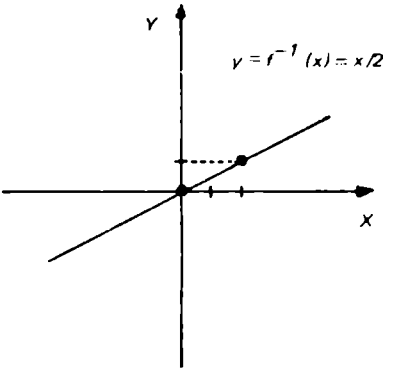
$f^{-1} = \{ (y, x) \mid y = 2x \} = \{ (y, x) \mid x = y/2 \}$

Dominio de f^{-1} = imagen de f^{-1} = codominio de f^{-1} = reales.

Si quisiéramos graficar esta función inversa, conservando el eje horizontal para la variable independiente, tendríamos que escribir

$f^{-1} = \{ (x, y) \mid y = x/2 \}$





4. Si $A = B =$ reales $f: A \longrightarrow B$

$f(x) = 3x - 1$

ó $y = 3x - 1$

Para obtener f^{-1} despejaremos el valor de x en términos de y.

$$y + 1 = 3x$$
$$x = y/3 + 1/3$$

así la inversa es

$f^{-1} = \{ (y, x) \mid x = (1/3)y + 1/3 \}$

Deseando conservar la x para la variable independiente cambiaremos x por y y y por x

o sea

$f^{-1} = (x, y) \mid y = (1/3)x + 1/3$ ó $f^{-1}(x) = x/3 + 1/3$

Dominio de f^{-1} = codominio de f^{-1} = imagen de f^{-1} = reales

5. Si $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$

ó $y = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$

Para obtener f^{-1} despejaremos el valor de x en términos de y.

$$y = \frac{3x - 1}{x + 2}$$

$$y(x + 2) = 3x - 1$$

$$xy + 2y = 3x - 1$$

$$xy - 3x = -1 - 2y$$

$$x(y - 3) = -1 - 2y$$

$$x = \frac{-1 - 2y}{y - 3} = \frac{1 + 2y}{3 - y}$$

así

$$f^{-1} = \left\{ (y, x) \mid x = \frac{1 + 2y}{3 - y} \right\}$$

ó $\quad f^{-1} = \left\{ (x, y) \mid y = \dfrac{1 + 2x}{3 - x} \right\}$ $\quad$ ó $\quad f^{-1}(x) = \dfrac{1 + 2x}{3 - x}$

Puesto que el dominio de f es igual a la imagen de f^{-1} y la imagen de f es igual al dominio de f^{-1} basta observar el dominio de f y f^{-1} para obtener dominio e imagen de f y f^{-1}.

Dominio de $f^{-1} = \{ x \in R / x \neq 3 \}$
Imagen de $f^{-1} = \{ y \in R / y \neq -2 \}$

6. Si $f(x) = \sqrt{x - 1}$ $\quad$ ó $\quad$ $y = \sqrt{x - 1}$

obtendremos $f^{-1}(x)$

$$y = \sqrt{x - 1}$$

$$(y)^2 = \left(\sqrt{x - 1}\right)^2$$

$$y^2 = x - 1$$

$$x = y^2 + 1$$

así

$$f^{-1} = \{ (y, x) \mid x = y^2 + 1 \}$$

ó

$$f^{-1} = \{ (x, y) \mid y = x^2 + 1 \} \qquad \text{ó} \quad f^{-1}(x) = x^2 + 1$$

Dominio de f^{-1} = reales
Imagen de $f^{-1} = \{ x \in R \mid x \geq 1 \}$

7. Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ó $y = \sqrt{x^2 - 1}$

Veremos que no existe la función inversa de f.

$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$(y)^2 = \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2$$

$$y^2 = x^2 - 1$$

$$x^2 = y^2 + 1$$

$$x = \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

así

$$f^{-1} = \{ (y, x) \mid x = \pm \sqrt{y^2 + 1} \}$$

ó

$$f^{-1} = \{ (x, y) \mid y = \pm \sqrt{x^2 + 1} \} \qquad \text{ó} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Y vemos que no es función ya que para cada valor de x existen dos de y, o sea

$$\text{si } x = 3, \text{ entonces } \quad y = \pm\sqrt{3^2 + 1}$$
$$= \pm\sqrt{10}$$

Por lo que la función inversa de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ no existe

Observación

$$Si\ x = f^{-1}(y) \qquad y \qquad y = f(x)$$

entonces

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$
$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

o sea

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

es decir, la composición de una función con su inversa da como resultado la función identidad

En el ejemplo 6

$$f(x) = \sqrt{x - 1} \qquad y \qquad f^{-1}(x) = x^2 + 1$$

así

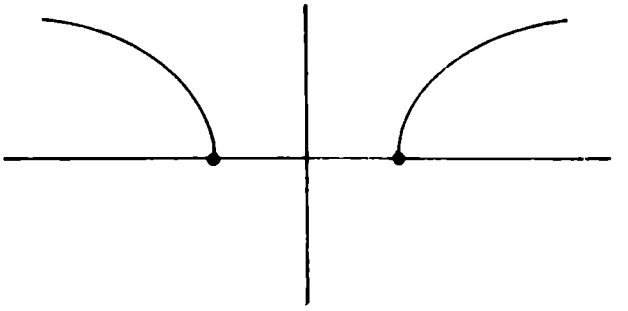
$$f(f^{-1}(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{(x^2 + 1) - 1}$$
$$= \sqrt{x^2} = x$$

ó

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sqrt{x - 1}) = (\sqrt{x - 1})^2 + 1$$
$$= x - 1 + 1$$
$$= x$$

Observación. Si una función es biyectiva se garantiza que su inversa sea función.

En el ejemplo 7 $y = \sqrt{x^2 - 1}$ no es una función biyectiva.



por lo cual no existe la función inversa.

Ejercicios

1. Para cada una de las relaciones dadas de A en B determinar la relación inversa

a) $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$ $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \}$

$R = \{ (a, b) \mid b = a + 1 \}$

b) $A = \{ 1, 4, 9, 16 \}$ $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

$R = \{ (a, b) \mid b = +\sqrt{a} \}$

c) $A = \{ a, b, c, d \}$ $B = \{ 0, 3, 6, 9, 12 \}$

$R = \{ (a, 3) (b, 6), (c, 9) (a, 2) (b, 6) (c, 9) \}$

d) $A = \{$ ciudades de la República Mexicana $\}$

$B = \{$ estados de la República Mexicana $\}$

$R = \{ (a, b) \mid b$ es el Estado al que pertenece $A \}$

e) $A = \{$ autores de libros de español $\}$

$B = \{$ libros de español $\}$

$R = \{ (a, b) \mid b$ es un libro del autor(a) $\}$

2. Para cada una de las siguientes funciones decir si existe la función inversa, en caso afirmativo escribirla dando su dominio y su imagen, considere que las funciones van de R a R.

a) $y = 2x - 1$

b) $y = 3x + 7$

c) $y = x^2 - 1$

d) $y = x^2 + 6x + 9$

e) $y = x^3$

f) $y = x^3 + 1$

g) $y = (2x + 5)^3$

h) $y = x - \dfrac{1}{x}$

i) $y = x + \dfrac{1}{x}$

j) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

k) $y = \dfrac{1}{x^2}$

l) $y = \dfrac{2x}{x + 5}$

m) $y = \dfrac{3x + 1}{5x - 4}$

n) $y = \dfrac{1}{x^3 - 1}$

ñ) $y = \dfrac{2}{x - 2}$

o) $y = \dfrac{2x + 7}{x}$

p) $y = \dfrac{2}{(x + 3)^2}$

q) $y = \dfrac{x}{2x + 3}$

r) $y = \dfrac{1}{x^3}$

s) $y = \dfrac{1}{(x - 1)^3}$

3. Obtener la función inversa, si es que existe, de cada una de las siguientes funciones en los valores del dominio que se especifica.

a) $y = \sqrt{3x - 2}$, si $x > 2/3$

b) $y = \sqrt{x + 1}$, si $x > -1$

c) $y = \sqrt{3 - x}$, si $x < 3$

d) $y = \sqrt{x^2 - 1}$, si $x \geq 1$

e) $y = \sqrt{x^2 - 1}$, si $x \leq -1$

f) $y = \sqrt{1 - x^2}$, si $0 \leq x \leq 1$

g) $y = \sqrt{1 - x^2}$, si $-1 \leq x \leq 0$

h) $y = \sqrt{4 - x^2}$, si $-2 \leq x \leq 2$

i) $y = \dfrac{x}{x - 1}$, si $x \neq 1$

j) $y = \dfrac{x - 1}{x}$, si $x \neq 0$

k) $y = x^2 - 1$, si $x \leq 0$

l) $y = \sqrt{x}$, si $x \geq 0$

CAPÍTULO 12

Cálculo

Sección 12.1

LÍMITES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el alumno deberá ser capaz de:

1. Definir el límite de una función.
2. Interpretar gráficamente la definición de límite.
3. Enunciar el teorema de unicidad de límite.
4. Definir límite por la izquierda y por la derecha de un valor a.
5. Obtener límites unilaterales.
6. Demostrar que el límite de una función existe utilizando la definición.

En la primera sección de este capítulo analizamos la gráfica de una función; este concepto aparece con frecuencia en el estudio del álgebra, trigonometría y geometría y un poco también en el cálculo. Sin embargo, el concepto de límite es la parte medular de esta última rama de las matemáticas. Con él podemos introducirnos en temas fundamentales como la derivada y la integral.

Intuitivamente, el concepto de límite es de fácil comprensión, pero en el fondo es complicado y requiere de un esfuerzo especial para su total comprensión. Por ello debemos tomarlo como un reto que podemos vencer con el estudio y la práctica.

Límite de una función

Consideremos la siguiente función $y = f(x)$ donde:

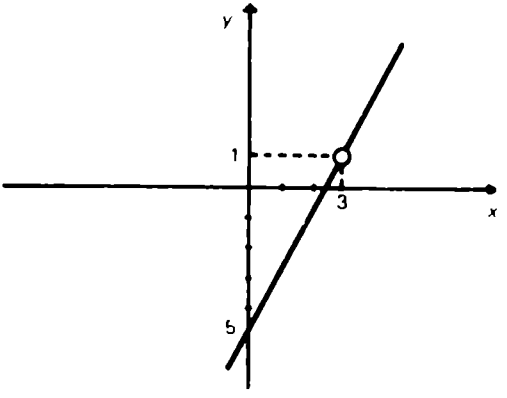
$$y = \frac{2x^2 - 11x + 15}{x - 3}$$

es claro que

$$y = \frac{(2x - 5)(x - 3)}{(x - 3)}$$

es decir $y = 2x - 5$ con $x \neq 3$

Gráficamente tenemos



Para observar el comportamiento de $f(x)$, cuando x toma valores próximos a $x = 3$ (tomando valores menores y mayores que $x = 3$), consideraremos la siguiente tabulación.

x	2.8	2.9	2.99	2.999	2.9999	3	3.0001	3.001	3.01	3.1	3.2
$f(x)$	0.6	0.8	0.98	0.998	0.9998		1.0002	1.002	1.02	1.2	1.4

en esta tabulación nos damos cuenta que $f(x)$ se aproxima a "1" a medida que x toma valores próximos a "3". Esta afirmación también se observa en la gráfica de la función, es decir, a medida que x toma valores muy próximos a 3 (tomando valores menores o mayores que 3) obtendremos valores de y muy próximos a 1 (tomando valores menores o mayores que 1). Es muy importante darnos cuenta que la "cercanía" es por ambos lados.

Esta afirmación la denotaremos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 1$$

y se lee: "El límite de $f(x)$ es 1 cuando x se aproxima a 3".

Si hacemos una correspondencia entre los valores de x que equidistan de $x = 3$, nos damos cuenta de lo siguiente:

Si $2.8 < x < 3.2$ entonces $0.6 < f(x) < 1.4$
Si $2.9 < x < 3.2$ entonces $0.8 < f(x) < 1.2$
Si $2.99 < x < 3.01$ entonces $0.98 < f(x) < 1.02$
Si $2.999 < x < 3.001$ entonces $0.998 < f(x) < 1.002$
Si $2.9999 < x < 3.0001$ entonces $0.9998 < f(x) < 1.0002$

x	2.8	2.9	2.99	2.999	2.9999	3	3.0001	3.001	3.01	3.1	3.2
$f(x)$	0.6	0.8	0.98	0.998	0.9998		1.0002	1.002	1.02	1.2	1.4

El primer renglón de las desigualdades anteriores nos dice que si x toma valores entre 2.8 y 3.2, entonces $f(x)$ toma un valor entre 0.6 y 1.4.

Analicemos este primer renglón pensando en la distancia de x a 3 y la distancia de $f(x)$ a 1, de donde obtenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{lllll} 2.8 < x & < 3.2 & \text{entonces} & 0.6 < f(x) & < 1.4 \\ 2.8 - 3 < x - 3 & < 3.2 - 3 & \text{entonces} & 0.6 - 1 < f(x) - 1 & < 1.4 - 1 \end{array}$$

$-0.2 < x - 3 < 0.2$ entonces $-0.4 < f(x) - 1 < 0.4$
$|x - 3| < 0.2$ entonces $|f(x) - 1| < 0.4$

lo anterior lo podemos indicar diciendo:

Si x dista de 3 en menos de 0.2, entonces $f(x)$ dista de 1 en menos de 0.4. Procediendo de manera similar en los demás renglones, podemos afirmar que:

si $|x - 3| < 0.2$ entonces $|f(x) - 1| < 0.4$
si $|x - 3| < 0.1$ entonces $|f(x) - 1| < 0.2$
si $|x - 3| < 0.01$ entonces $|f(x) - 1| < 0.02$
si $|x - 3| < 0.001$ entonces $|f(x) - 1| < 0.002$
si $|x - 3| < 0.0001$ entonces $|f(x) - 1| < 0.0002$

Cada uno de los renglones anteriores los podemos leer de la siguiente manera: si x difiere de 3 en 0.2 (ó 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 respectivamente) entonces $f(x)$ difiere de 1 en 0.4 (ó 0.2, 0.02, 0.002, 0.0002 respectivamente).

Si representamos una variable, digamos "δ" (delta), para que tome los valores del lado derecho de la desigualdad $|x - 3|$, es decir:

$$|x - 3| < \delta$$

y representamos otra variable, digamos "ϵ" (epsilon), para que tome los valores del lado derecho de la desigualdad $|f(x) - 1|$, es decir:

$$|f(x) - 1| < \epsilon$$

Los cinco renglones donde aparecen los valores absolutos los podemos denotar como:

"Si $|x - 3| < \delta$ entonces $|f(x) - 1| < \epsilon$"

La expresión anterior también se puede expresar de la siguiente manera:

"$|f(x) - 1| < \epsilon$ siempre y cuando $0 < |x - 3| < \delta$"

Además, nos podemos dar cuenta de las desigualdades con valor absoluto, que los valores de "ϵ" y "δ" están relacionados.

si $|x - 3| < 0.2$ entonces $|f(x) - 1| < 0.4$
si $|x - 3| < 0.1$ entonces $|f(x) - 1| < 0.2$
si $|x - 3| < 0.01$ entonces $|f(x) - 1| < 0.02$
si $|x - 3| < 0.001$ entonces $|f(x) - 1| < 0.002$
si $|x - 3| < 0.0001$ entonces $|f(x) - 1| < 0.0002$

en el primer renglón tenemos $\delta = 0.2$ y ϵ 0.4
en el segundo renglón tenemos $\delta = 0.1$ y $\epsilon = 0.2$
en el tercer renglón tenemos $\delta = 0.01$ y $\epsilon = 0.02$
en el cuarto renglón tenemos $\delta = 0.001$ y $\epsilon = 0.002$
en el quinto renglón tenemos $\delta = 0.0001$ y $\epsilon = 0.0002$

$$\text{es decir, } \delta = \epsilon/2 \text{ ó } \epsilon = 2\delta$$

Entonces podemos resumir diciendo que para

$$f(x) = \frac{2x^2 - 11x + 15}{x - 3}$$

$\lim_{x \to 3} f(x) = 1$ significa que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (ϵ y δ están relacionados).

Si $|x - 3| < \delta$ entonces $|f(x) - 1| < \epsilon$ y en este caso $\delta = \epsilon/2$.

Como lo expuesto hasta este momento, podemos escribir la definición de *límite de una función*.

Definición. Sea f una función que esté definida en todo punto de algún intervalo que contenga a "a", excepto posiblemente en $x = a$. *El límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a "a" es L* y se denota por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

Observaciones

a) En la definición de límite, la frase "para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$" significa que el valor de $f(x)$ puede estar tan cercano a L como se desee con tal de tomar valores de x suficientemente cerca de a. Es decir, a ϵ se le puede asignar cualquier valor positivo, mientras que δ dependerá del valor seleccionado de ϵ.

b) La última parte de la definición de límite se puede escribir de la siguiente forma:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \text{ siempre que } a - \delta < x < a + \delta$$

o

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

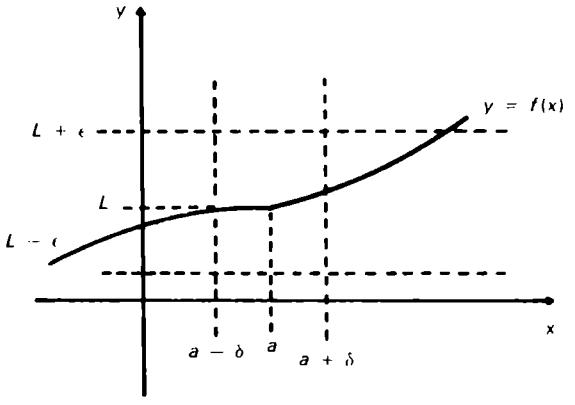
$$\text{Si } |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon$$

o

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

$$\text{Si } a - \delta < x < a + \delta \text{ entonces } L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

Significado geométrico del concepto de límite



De la definición de límite:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

$$\text{Si } a - \delta < x < a + \delta \text{ entonces } L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

podemos generar dos rectas cuyas ecuaciones son:

$$y = L - \epsilon,\ y = L + \epsilon$$

y estas dos rectas generan una región horizontal de amplitud 2ϵ alrededor de $y = L$. El número δ correspondiente a ϵ, determina una región vertical de amplitud 2δ alrededor de la recta $x = a$.

Las dos regiones al intersectarse forman un rectángulo y la definición de límite asegura que: la gráfica de $f(x)$ para valores de x en el intervalo $(a - \delta$

$a + \delta$), está toda en el interior del rectángulo, pudiéndose sólo exceptuarse el punto $(a, f(a))$.

Teorema de unicidad

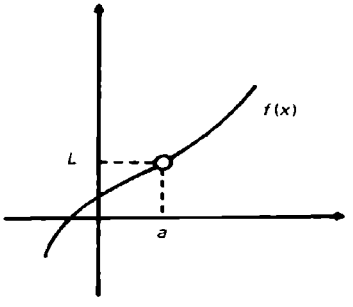
Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$

entonces $L_1 = L_2$

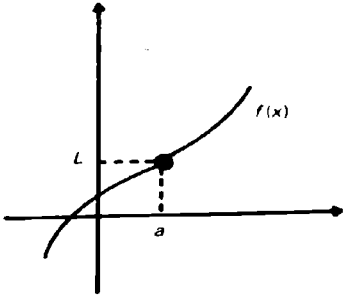
Observaciones.

a) El teorema de UNICIDAD DE LÍMITE garantiza que si el límite de $f(x)$ existe, éste DEBE SE UN ÚNICO VALOR.

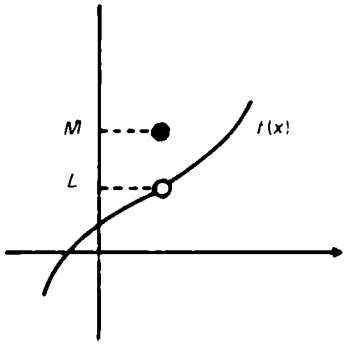
b) El concepto de límite nos indica *EL VALOR AL QUE SE APROXIMA LA FUNCIÓN* $f(x)$, cuando x se aproxima a "a" y este valor en algunas ocasiones coincide con el valor de $f(a)$, es decir, el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a "a" no tiene que ser necesariamente $f(a)$.



$f(a)$ no existe.
$\lim_{x \to a} f(x) = L$



$f(a) = L$
$\lim_{x \to a} f(x) = L$

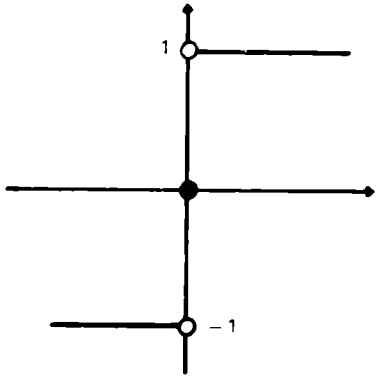


$f(a) = M \neq L$
$\lim_{x \to a} f(x) = L$

Consideremos la función $y = sgn\ x$

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

cuya gráfica es:



tabularemos algunos valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a "0"

x	-0.2	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.2
$f(x)$	-1	-1	-1	-1	?	1	1	1	1

observamos en la tabulación que $f(x)$ se aproxima a dos valores diferentes, para valores a la derecha de "0", $f(x)$ se aproxima a 1, y para valores a la izquierda de "0", $f(x)$ se aproxima a (-1).

Por lo que podemos afirmar que:

$$\lim_{x \to 0} \quad sgn(x) \text{ no existe}$$

Gráficamente, utilizando la definición, podemos observar por qué el límite anterior no existe.

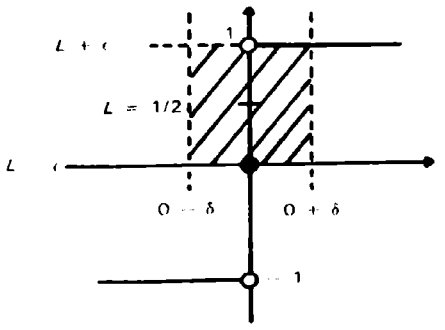
Supongamos que:

$$\lim_{x \to 0} \quad sgn(x) = L$$

para cualquier $\epsilon > 0$ que se tome, debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que el rectángulo que se forme, con las rectas generadas por $y = L - \epsilon$, $y = L + \epsilon$, $x = a - \delta$ y $x = a + \delta$, deben contener totalmente a la gráfica de $y = sgn(x)$, siempre que x esté en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

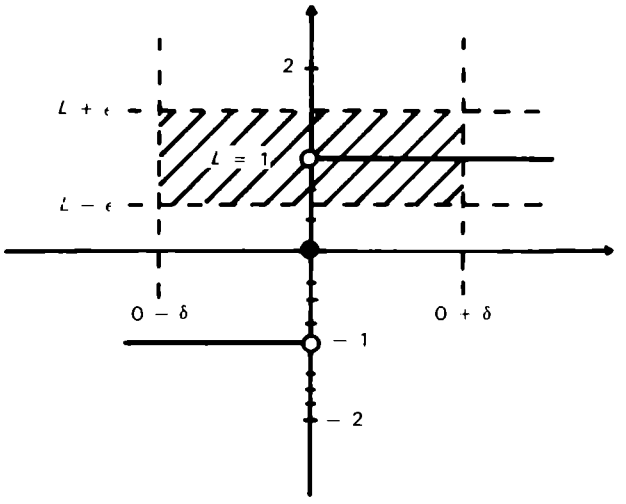
Como L es un número real, consideremos las siguientes tres posibilidades para el valor de L seleccionando $\epsilon = 1/2$.

a) Si $L = 1/2$



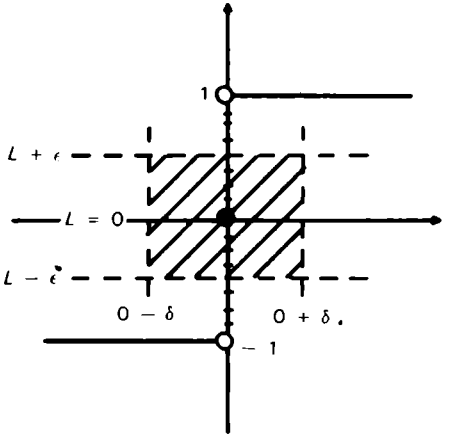
observamos en la gráfica que ningún valor de $f(x)$ para valores de x en el intervalo $(0 - \delta, 0 + \delta)$ está en el rectángulo generado, no importando el valor de δ que se tome.

b) Si $L > 1/2$ (sea $L = 1$)



La gráfica de $y = f(x)$ para valores de x en el intervalo $(0 - \delta, 0)$ está fuera del rectángulo sin importar el valor que tome δ.

c) Si $L < 1/2$ (sea $L = 0$)

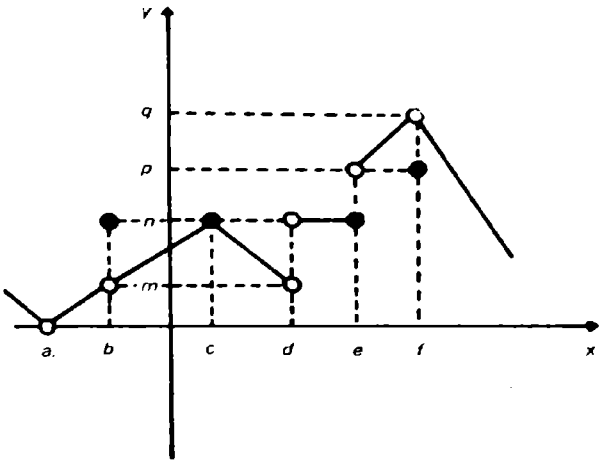


La gráfica de $y = f(x)$ para valores de x en el intervalo $(0 - \delta, 0 + \delta)$ está fuera del rectángulo, sin importar el valor que tome δ.

Por lo que podemos afirmar que:

$$\lim_{x \to 0} sgn(x) \text{ no existe}$$

Sea $f(x)$ una función cuya gráfica es:



Consideraremos las siguientes afirmaciones y las clasificaremos como verdaderas o falsas.

$\lim_{x \to a} f(x) =$ no existe (falsa)

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ (verdadera)

$\lim_{x \to a} f(x) = n$ (falsa)

$\lim_{x \to b} f(x) =$ no existe (falsa)

$\lim_{x \to b} f(x) = m$ (verdadera)

$\lim_{x \to b} f(x) = n$ (verdadera)

$\lim_{x \to c} f(x) = n$ (falsa)

$\lim_{x \to d} f(x) = m$ (falsa)

$\lim_{x \to d} f(x)$ no existe (verdadera)

$\lim_{x \to d} f(x) = n$ (falsa)

$\lim_{x \to e} f(x) = p$ (falsa)

$\lim_{x \to e} f(x) = \text{no existe}$ (verdadera)

$\lim_{x \to f} f(x) = p$ (falsa)

$\lim_{x \to f} f(x) = \text{no existe}$ (falsa)

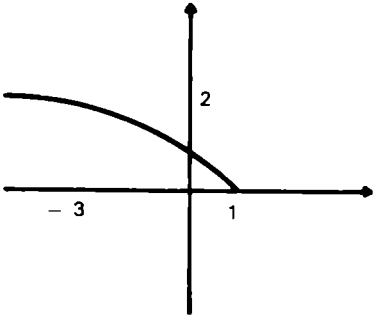
$\lim_{x \to f} f(x) = q$ (verdadera)

Límites unilaterales

Consideremos la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{1 - x}$$

cuya gráfica es



Al evaluar $f(x)$ para valores cercanos a $x = 1$, tenemos:

x	0.5	0.8	0.9	0.99	1.01	1.1	1.2	1.3
$f(x)$	0.707	0.447	0.316	0.1	no existe	no existe	no existe	no existe

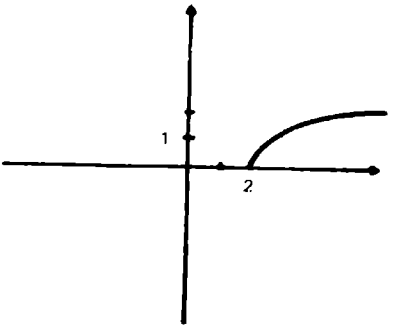
$f(x)$ no existe si $x > 1$ y $\lim_{x \to 1} \sqrt{1 - x}$ no existe, ya que para valores cercanos a $x = 1$, $f(x)$ no se aproxima a un valor determinado.

Sin embargo, si consideramos a los valores de x cercanos a 1 pero no mayores que 1, observamos que $f(x)$ se aproxima a 0.

Si consideramos también a la función

$$f(x) = \sqrt{x - 2}$$

cuya gráfica es



y evaluar $f(x)$ para valores cercanos a $x = 2$, tenemos:

2

x	1.5	1.8	1.9	1.99	2.01	2.1	2.2	2.5
$f(x)$	no existe	no existe	no existe	no existe	0.1	0.316	0.447	0.707

?

Para la función $f(x) = \sqrt{x - 2}$, $f(x)$ no existe si $x < 2$, por lo que

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{x - 2} \text{ no existe.}$$

Si consideramos a los valores de x cercanos a 2 pero no menores que 2, observamos que $f(x)$ se aproxima a 0.

Situaciones como las anteriores en las que $f(x)$ se aproxima a "0" cuando x se aproxima a 1 por la derecha en la primera función o $f(x)$ se aproxima a "0" cuando x se aproxima a 2 por la izquierda en la segunda función, se consideran como *límites unilaterales*, las cuales se definirán enseguida.

Definición. Sea f una función que está definida en todos los números de algún intervalo abierto (a, c). Entonces el LÍMITE DE $f(x)$ CUANDO x SE APROXIMA A a POR LA DERECHA es L y se denota por:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < x - a < \delta$$

Observaciones

a) Comparando esta definición con la del $\lim_{x \to a} f(x) = L$, la diferencia está en que en $0 < x - a < \delta$ no existen las barras del valor absoluto.

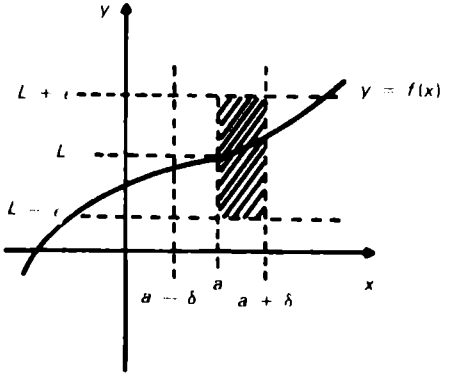
b) La última parte de la definición de límite por la derecha, se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ siempre que $a < x < a + \delta$.

c) SIGNIFICADO GEOMÉTRICO del límite por la derecha. La definición de límite por la derecha asegura que la gráfica de f para valores de x en el intervalo $(a, a + \delta)$ está toda en el intervalo del rectángulo formado por las rectas:

$x = a$, $x = a + \delta$, $y = L + \epsilon$ y $y = L - \epsilon$.



Teorema. Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Observaciones

a) El inverso del teorema anterior también es válido, es decir:

si $\lim_{x \to a} f(x) = L$

entonces: $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

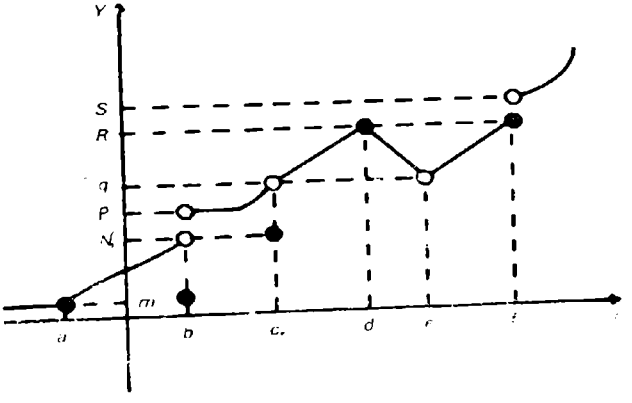
b) Del teorema 1 podemos concluir que si

$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$

entonces: $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

Ejemplo.

Sea $f(x)$ una función cuya gráfica es:



En seguida daremos algunas afirmaciones y las clasificaremos en falso (F) o verdadero (V)

$\lim_{x \to a} f(x) = m$ (V)
$\lim_{x \to b} f(x) = P$ (F)
$\lim_{x \to b} f(x)$ no existe (V)
$\lim_{x \to c} f(x) =$ no existe (F)
$\lim_{x \to d} f(x) = R$ (V)
$\lim_{x \to e} f(x) = q$ (V)
$\lim_{x \to f} f(x) = S$ (F)

$\lim_{x \to b} f(x) = n$ (F)
$\lim_{x \to b} f(x) = m$ (F)
$\lim_{x \to c} f(x) = n$ (F)
$\lim_{x \to c} f(x) = q$ (V)
$\lim_{x \to e} f(x) =$ no existe (F)
$\lim_{x \to f} f(x) = R$ (F)
$\lim_{x \to f} f(x)$ no existe (V)

Cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas, considerando la misma gráfica anterior.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = m$
$\lim_{x \to b} f(x) = P$
$\lim_{x \to c^+} f(x) = q$
$\lim_{x \to d^+} f(x) = R$
$\lim_{x \to e^+} f(x) = q$
$\lim_{x \to f^+} f(x) = S$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = m$
$\lim_{x \to b^-} f(x) = n$
$\lim_{x \to c^-} f(x) = q$
$\lim_{x \to d^-} f(x) = R$
$\lim_{x \to e^-} f(x) = q$
$\lim_{x \to f^-} f(x) = R$

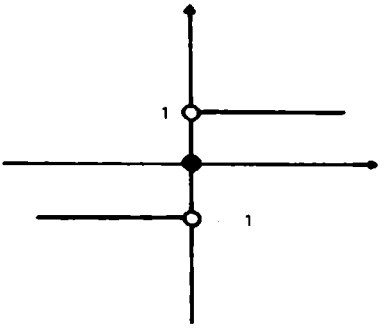
Observemos que los límites unilaterales en $x = b$ y en $x = f$ son diferentes, por lo que:

$$\lim_{x \to b} f(x) \text{ no existe y } \lim_{x \to f} f(x) \text{ no existe}$$

Ejemplos.

1. Si $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

cuya gráfica es:



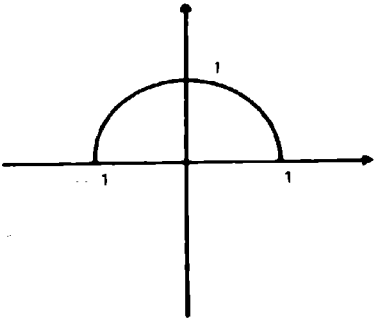
entonces:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ (ya que para cualquier valor de x cercano a 0 por la izquierda, $y = f(x)$ se aproxima a -1).

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ (ya que para cualquier valor de x cercano a 0 por la derecha, $y = f(x)$ se aproxima a 1).

$\lim_{x \to 0} f(x)$ = no existe (ya que $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$).

2. Si $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ cuya gráfica es:



entonces:

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$ ($f(x)$ se aproxima a 0, cuando x se aproxima a -1 por la derecha).

$\lim_{x \to -1^-} f(x)$ = no existe ($f(x)$ no está definida si x es menor que -1, es decir, $f(x)$ no existe si x se aproxima a -1 por la izquierda).

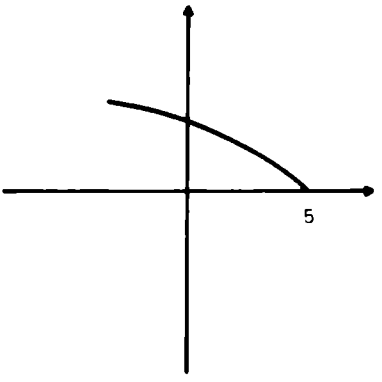
$\lim_{x \to -1} f(x)$ = no existe

$\lim_{x \to 1^+} f(x)$ = no existe ($f(x)$ no está definida si x es mayor que (1), es decir, $f(x)$ no existe si se aproxima a (1) por la derecha).

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 1} f(x)$ = no existe

3. Si $f(x) = \sqrt{5 - x}$ cuya gráfica es:

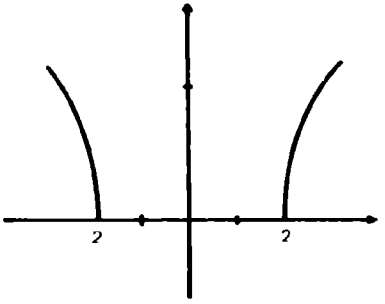


entonces:

$\lim_{x \to 5^-} f(x)$ = no existe $\quad \lim_{x \to 5} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 5} f(x)$ = no existe

4. Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ cuya gráfica es:



entonces:

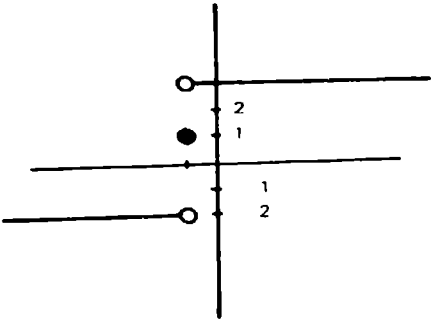
$\lim_{x \to -2^-} f(x)$ = no existe $\quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -2} f(x)$ = no existe $\quad \lim_{x \to 2} f(x)$ = no existe

$\lim_{x \to 2} f(x)$ = no existe $\quad \lim_{x \to 2} f(x)$ = no existe

5. Si $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \\ 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

cuya gráfica es:

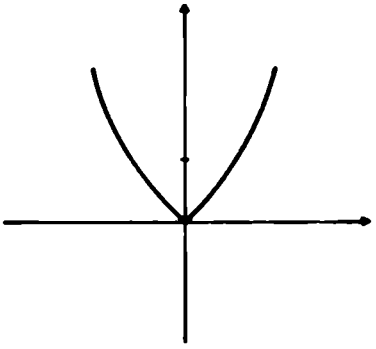


entonces:

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 3 \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -2$

$\lim_{x \to -1} f(x)$ = no existe

6. Para la función $f(x) = x^2$ cuya gráfica es:



tenemos:

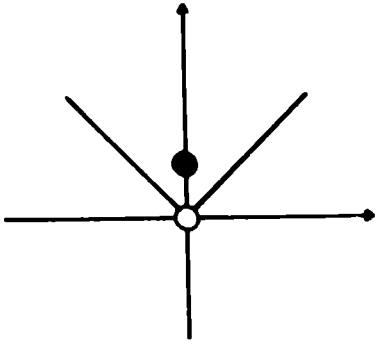
$$\lim_{x \to 1^+} x^2 = 1 \qquad \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1$$

7. Para la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

cuya gráfica es:



tenemos:

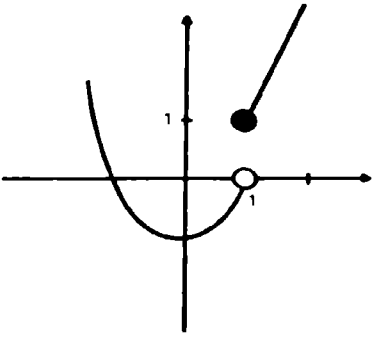
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

8. Para la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x < 1 \\ 2x - 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

cuya gráfica es



tenemos:

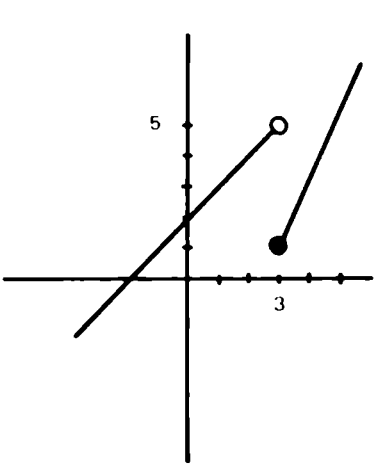
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \text{no existe}$$

9. Para la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

cuya gráfica es:



tenemos que:

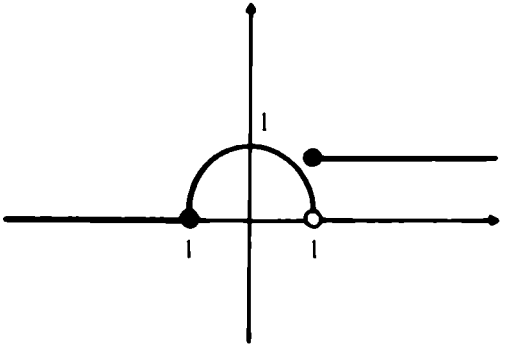
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5 \qquad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \text{no existe}$$

10. Para la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

cuya gráfica es:



tenemos que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = \text{no existe}$$

Demostrar que el límite de una función existe utilizando la definición de límite

Demostrar un límite, por ejemplo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

utilizando la definición, es encontrar la relación que existe entre δ y ϵ, para poder asegurar que:

para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$

tal que:

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

Ejemplos.

1. Demostrar que:

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 11x + 15}{x - 3} = 1$$

utilizando la definición.

Debemos demostrar que: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

$$\left|\frac{2x^2 - 11x + 15}{x - 3} - 1\right| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - 3| < \delta$$

Demostración.

$$\left|\frac{2x^2 - 11x + 15}{x - 3} - 1\right| = \left|\frac{(x - 3)(2x - 5)}{(x - 3)} - 1\right|$$

$$= |2x - 5 - 1| = |2x - 6| = |2(x - 3)| = |2||x - 3|$$

$= 2\ |x - 3| < \epsilon$ siempre que $|x - 3| < \epsilon/2$

resumiendo lo anterior, tenemos:

$$\left|\frac{2x^2 - 11x + 15}{x - 3} - 1\right| < \epsilon \text{ siempre que } |x - 3| < \epsilon/2$$

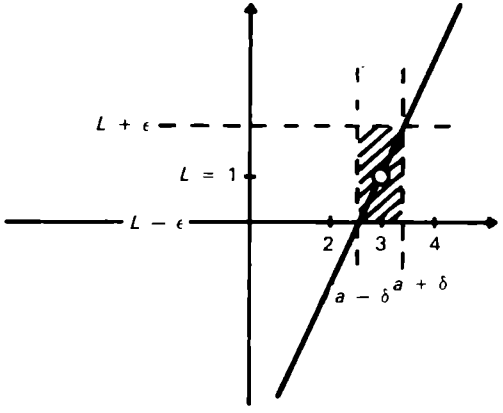
por lo que si consideramos $\delta = \epsilon/2$ se satisface la definición.

Observación.

La relación $\delta = \epsilon/2$ en el último ejemplo ya la habíamos observado anteriormente intuitivamente.

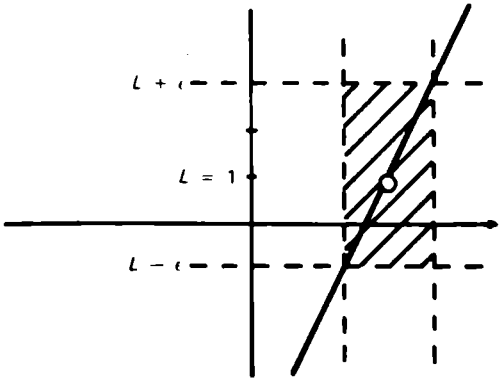
Si $\epsilon = 1$, $\delta = \epsilon/2 = 1/2$

$L = 1$
$a = 3$



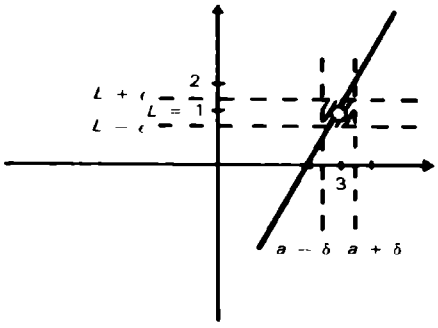
Si $\epsilon = 2$, $\delta = \epsilon/2 = 2/2 = 1$

$L = 1$
$a = 3$



Si $\epsilon = 1/2$, $\delta = \epsilon/2 = (1/2)/2 = 1/4$

$L = 1$
$a = 3$



En las tres gráficas podemos observar que si tomamos un valor menor de δ que el indicado ($\delta = \epsilon/2$), la definición también se satisface, por lo que algunas veces se pregunta por el *valor máximo posible de* δ, que es precisamente el valor que se obtuvo directamente en la demostración.

2. Demostrar que $\lim_{x \to 2} (3x - 5) = 1$ utilizando la def. de límite

Debemos demostrar que:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

$$|(3x - 5) - 1| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - 2| < \delta$$

Demostración.

$$\begin{aligned} |(3x - 5) - 1| &= |3x - 5 - 1| = |3x - 6| \\ &= |3(x - 2)| = |3| \, |x - 2| \\ &= 3|x - 2| < \epsilon \text{ siempre que } |x - 2| < \epsilon/3 \end{aligned}$$

o sea que:

$$|(3x - 5) - 1| < \epsilon \text{ siempre que } |x - 2| < \epsilon/3$$

por lo que $\delta = \epsilon/3$ satisface la definición.

3. Demostrar que $\lim_{x \to -1} (8 - x) = 9$ utilizando la def. del límite.

Debemos demostrar que:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

$$|(8 - x) - 9| < \epsilon \text{ siempre que } |x - (-1)| < \delta$$

Demostración.

$$\begin{aligned} |(8 - x) - 9| &= |8 - x - 9| = |-1 - x| \\ &= |-1|\,|x + 1| \\ &= (1)\,|x + 1| \text{ siempre que } |x + 1| < \epsilon/(1) \end{aligned}$$

o sea que:

$$|(8 - x) - 9| < \epsilon \text{ siempre que } |x + 1| < \epsilon$$

Por lo que si $\delta = \epsilon$ se satisface la definición.

4. Demostrar que $\lim_{x \to 2} (x^2 - 1) = 3$ utilizando la def. de límite.

Debemos demostrar que:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ depende ϵ) tal que:

$$|(x^2 - 1) - 3| < \epsilon \text{ siempre que } |x - 2| < \delta$$

Demostración.

$$\begin{aligned} |(x^2 - 1) - 3| &= |x^2 - 1 - 3| = |\,x^2 - 4\,| = \\ &= |(x - 2)\,(x + 2)| = |x - 2|\,|x + 2|^{**} \end{aligned}$$

al factorizar la expresión y tratar de simplificar, obtenemos otro factor con variable no numérico, en este caso obtuvimos $|x + 2|$, por lo que condicionaremos al factor $|x - 2|$ para observar cómo se comporta $|x + 2|$.

Es decir:

si $\lvert x - 2\rvert < 1$	(escogimos 1 por comodidad
$-1 < x - 2 < 1$	en las operaciones, pero puede
$2 - 1 < x - 2 + 2 < 1 + 2$	ser cualquier cantidad positiva)
$1 < x < 3$	

Si sumamos 2 en todos los miembros, tenemos:

$$1 + 2 < x + 2 < 3 + 2$$
$$3 < x + 2 < 5$$
$$\text{ó} \quad -5 < 3 < x + 2 < 5$$
$$\text{ó} \quad |x + 2| < 5$$

por lo que si $|x - 2| < 1$ entonces $|x + 2| < 5$

Continuando con la demostración en **, tenemos:

$$|(x^2 - 1) - 3| = |x - 2|\ |x + 2| < |x - 2|\ (5)$$

siempre que $|x - 2| < 1$
Pero interesa que $|(x^2 - 1) - 3|$ sea menor que ϵ, entonces podemos hacer lo siguiente:

$|(x^2 - 1) - 3| < |x - 2|\ (5) < \epsilon$ (siempre que $|x - 2| < 1$) y siempre que $|x - 2| < \epsilon/5$

Resumiendo lo anterior, tenemos:

$|(x^2 - 1) - 3| < \epsilon$ siempre que $|x - 2| < 1$ y $|x - 2| < \epsilon/5$

Por lo que se debe escoger un δ que satisfaga a ambas desigualdades, es decir:

$$\delta = \text{menor entre } (1 \text{ y } \epsilon/5)$$

Observación.

Si $\epsilon = 1/2$, δ = menor entre (1 y (1/2)/5)
= menor entre (1 y 1/10) = 1/10
por lo que $\delta = 1/10$

Si $\epsilon = 6$, δ = menor entre (1 y 6/5) = 1
por lo que $\delta = 1$

Si $\epsilon = 2.5$, δ = menor entre (1 y 2.5/5)
= menor entre (1 y 0.5) = 0.5
por lo que $\delta = 0.5$

Si $\epsilon = 0.01$, δ = menor entre (1 y 0.01/5)
= menor entre (1 y 0.002)
por lo que $\delta = 0.002$

5. Demostrar que $\lim_{x \to 3} (x^2 + 2x) = 15$ utilizando la definición.

Debemos demostrar que:

para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

$$|(x^2 + 2x) - 15| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - 3| < \delta$$

Demostración.

$$|(x^2 + 2x) - 15| = |x^2 + 2x - 15| = |(x - 3)(x + 5)| = \\ = |x - 3|\,|x + 5|^{**}$$

también aquí se obtuvo un factor no numérico por lo que condicionaremos a $|x - 3|$ para observar cómo se comporta $|x + 5|$

si $|x - 3| < 1$

$$-1 < x - 3 < 1$$
$$-1 + 3 < x < 1 + 3$$
$$2 < x < 4$$
$$2 + 5 < x + 5 < 4 + 5$$
$$7 < x + 5 < 9$$
$$-9 < 7 < x + 5 < 9$$

ó $|x + 5| < 9$

Por lo que $|x + 5| < 9$ siempre que $|x - 3| < 1$.
Continuando con la demostración es **, tenemos:

$$|(x^2 + 2x) - 15| = \\ = |x - 3|\,|x + 5| < |x - 3|\,(9) < \epsilon$$

siempre que $|x - 3| < 1$ y siempre que $|x - 3| < \epsilon/9$

Resumiendo, tenemos:

$|(x^2 + 2x) - 15| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - 3| < 1$ y $|x - 3| < \epsilon/9$

y δ = menor entre 1 y $\epsilon/9$.

6. Demostrar que: $\lim_{x \to 3} \frac{2}{x - 1} = 1$

Debemos demostrar que:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

$$\left|\frac{2}{x-1} - 1\right| = \left|\frac{2-(x-1)}{x-1}\right| = \left|\frac{2-x+1}{x-1}\right|$$

$$= \left|\frac{3-x}{x-1}\right| = \left|\frac{(-1)(x-3)}{x-1}\right| = \frac{|-1|\,|x-3|}{|x-1|} =$$

$$\frac{|x-3|}{|x-1|} = \frac{1}{|x-1|}\,|x-3| \quad **$$

uno de los factores no es numérico, por lo que condicionaremos a $|x-3|$ para observar qué valores toma $\dfrac{1}{|x-1|}$

si $|x-3| < 1$

$$-1 < x-3 < 1$$
$$3-1 < x < 1+3$$
$$2 < x < 4$$
$$2-1 < x-1 < 4-1$$
$$1 < x-1 < 3$$

de aquí podemos concluir que $|x-1| > 1$ ó $|x-3| < 3$, pero tomaremos $|x-1| > 1$ ya que interesa el inverso de $|x-1|$, o sea que si $|x-1| > 1$ entonces:

$$\frac{1}{|x-1|} < 1$$

continuando con la demostración en **, tenemos:

$$\left|\frac{2}{x-1} - 1\right| =$$

$$= \frac{1}{|x-1|}\,|x-3| < (1)\,|x-3| < \epsilon$$

siempre que: $|x-3| < 1$ y siempre que: $|x-3| < \epsilon/9$

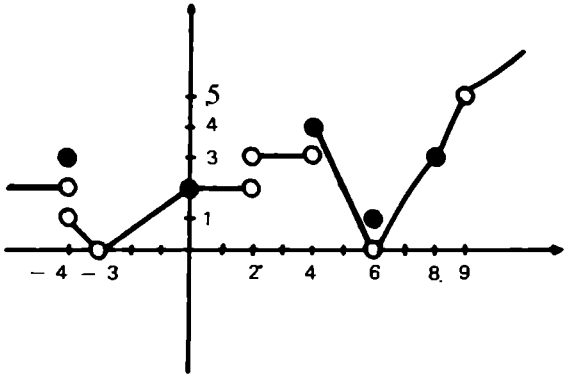
resumiendo, tenemos:

$$\left|\frac{2}{x-1} - 1\right| < \epsilon \text{ siempre que } |x-3| < 1 \text{ y } |x-3| < \epsilon$$

por lo que: δ = menor entre (1 y ϵ).

Ejercicio.

1. Si la gráfica de una función $f(x)$ es:



Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) $\lim_{x \to -4} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \to -4} f(x) = 2$

c) $\lim_{x \to -4} f(x) = 3$

d) $\lim_{x \to -4} f(x)$ no existe

e) $\lim_{x \to -3} f(x)$ no existe

f) $\lim_{x \to -3} f(x) = f(0)$

g) $\lim_{x \to -3} f(x) = 0$

h) $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

i) $\lim_{x \to 2} f(x) =$ no existe

j) $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$

k) $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

l) $\lim_{x \to 4} f(x) = 3$

m) $\lim_{x \to 4} f(x) = 4$

n) $\lim_{x \to 4} f(x)$ no existe

ñ) $\lim_{x \to 6} f(x) = 1$

o) $\lim_{x \to 6} f(x) = 0$

p) $\lim_{x \to 6} f(x)$ no existe

q) $\lim_{x \to 8} f(x) = 3$

r) $\lim_{x \to 8} f(x)$ no existe

s) $\lim_{x \to 9} f(x)$ no existe

t) $\lim_{x \to 9} f(x) = 5$

2. Cuáles de las siguientes proposiciones representan la definición:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

a) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

si $| x - a | < \delta$ entonces $| f(x) - L | < \epsilon$

b) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

si $| f(x) - L | < \epsilon$ entonces $| x - a | < \delta$

c) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

$| f(x) - L | < \epsilon$ siempre que $| x - a | < \delta$

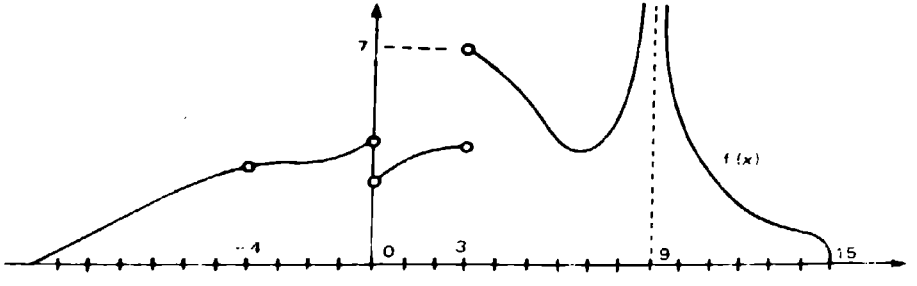
d) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

$| f(x) - a | < \epsilon$ siempre que $| x - L | < \delta$

e) $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

$| f(x) - L | < \epsilon$ siempre que $| x - a | < \delta$

3. Si la gráfica de $f(x)$ es:



determinar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

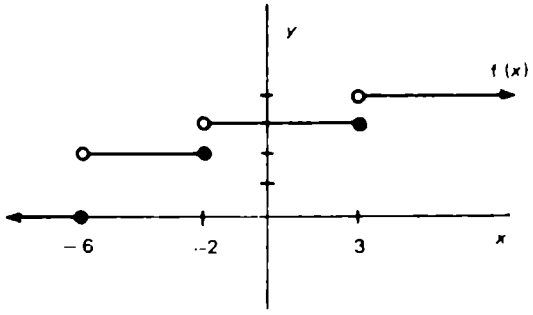
a) $\lim_{x \to -4} f(x) = f(-4)$

b) $\lim_{x \to 3} f(x) = 7$

c) $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe

d) $\lim_{x \to 10} f(x) = 0$

4. Si la gráfica de $f(x)$ es:



determinar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera.

a) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \to -2} f(x)$ no existe

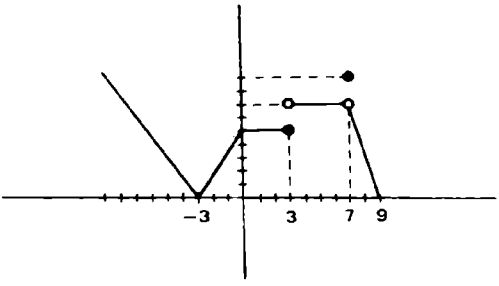
c) $\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe

d) $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

e) $\lim_{x \to -6} f(x) = 0$

f) $\lim_{x \to 5} f(x) = f(5)$

5. Si la gráfica de $f(x)$ es:



determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

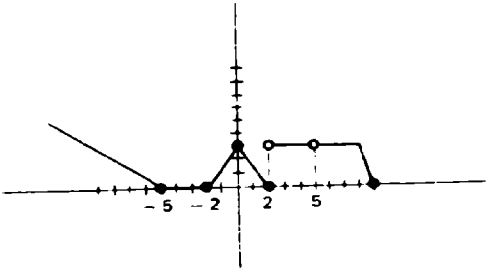
a) $\lim_{x \to 7} f(x) = f(7)$

b) $\lim_{x \to 7} f(x) = 9$

c) $\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe

d) $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

6. Si la gráfica de $f(x)$ es:



determinar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

a) $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$

b) $\lim_{x \to -2} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \to 5} f(x) = f(5)$

d) $\lim_{x \to 5} f(x) = 0$

7. Utilizando la definición de límite, demostrar lo siguiente:

a) $\lim_{x \to 2} (3x - 5) = 1$

b) $\lim_{x \to -1} (8 - x) = 9$

c) $\lim_{x \to 4} ((1/4)x + 3) = 4$

d) $\lim_{x \to 2} ((-2/3)x + 5) = 11/3$

e) $\lim_{x \to 1} (8x - 1) = 7$

f) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$

g) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

h) $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$

i) $\lim_{x \to 2} (2x^2 - x) = 6$

j) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{4}{x + 3}\right) = 1$

k) $\lim_{x \to 3} (x^2 - 4) = 5$

l) $\lim_{x \to 4} \frac{6}{x + 2} = 1$

m) $\lim_{x \to 1} (x^2 + 1) = 2$

n) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x) = -2$

8. Determinar un número δ para el valor de ϵ dado, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ siempre que: $0 < |x - a| < \delta$.

a) $\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$; $\epsilon = 1$

b) $\lim_{x \to 3} (2x + 4) = 10$; $\epsilon = .01$

c) $\lim_{x \to -2} (2 - 3x) = 8$; $\epsilon = 0.02$

d) $\lim_{x \to 2} (5 - x) = 3$; $\epsilon = 0.01$

e) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$; $\epsilon = 0.001$

f) $\lim_{x \to 1/3} \dfrac{9x^2 - 1}{3x - 1} = 2$; $\epsilon = 1/2$

g) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$; $\epsilon = 1$

h) $\lim_{x \to 1/4} \dfrac{4x^2 + 7x - 2}{4x - 1} = 9/4$; $\epsilon = 0.005$

Para cada una de las funciones de los problemas del 9 al 37, trazar su gráfica y obtener el límite indicado si es que existe, y si el límite no existe especificar por qué.

9. $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si} \quad x < -2 \\ 0 & \text{si} \quad -2 \leq x < 2 \\ 3 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$

$\lim_{x \to -2} f(x) =$ $\lim_{x \to 2} f(x) =$

10. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \qquad \lim_{x \to 1} f(x) =$$

11. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -3 \\ x & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \qquad \lim_{x \to 1} f(x) =$$

12. $f(x) = \begin{cases} 4x - 5 & \text{si } x < 1 \\ 2 - 3x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \qquad \lim_{x \to 1} f(x) =$$

13. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ 5 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \qquad \lim_{x \to 0} f(x) =$$

14. $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \qquad \lim_{x \to 0} f(x) =$$

15. $f(x) = \begin{cases} 5x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \qquad \lim_{x \to -1} f(x) =$$

16. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & \text{si } x \leq -2 \\ 5 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) =$ $\lim_{x \to -2^+} f(x) =$ $\lim_{x \to -2} f(x) =$

17. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 0} f(x) =$

18. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ 6x + 9 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 3^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 3} f(x) =$

19. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 2} f(x) =$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 1} f(x) =$ $\lim_{x \to 2} f(x) =$

20. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2 - x & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to -1} f(x) =$ $\lim_{x \to 2} f(x) =$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$

$\lim_{x \to -1} f(x) =$ $\lim_{x \to 2} f(x) =$

21. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x - 1} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$

$\lim_{x \to -1} f(x) =$ $\lim_{x \to 1} f(x) =$

22. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 1} & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 0} f(x) =$

23. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

$\lim_{x \to -2} f(x) =$ $\lim_{x \to 2} f(x) =$

24. $\lim f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

$\lim_{x \to -4} f(x) =$ $\lim_{x \to 4} f(x) =$

25. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 1} f(x) =$ $\lim_{x \to 2} f(x) =$

26. $f(x) = |x + 3|$

$\lim_{x \to -3^-} f(x) =$ $\lim_{x \to -3^+} f(x) =$ $\lim_{x \to -3} f(x) =$

27. $f(x) = \begin{cases} |2x - 1| & \text{si } x \neq 1/2 \\ 3 & \text{si } x = 1/2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1/2} f(x) =$ $\lim_{x \to 1/2^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 1/2^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 1/2} f(x) =$

28. $f(x) = |x - 2| + 3$

$\lim_{x \to 2} f(x) =$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 2} f(x) =$

29. $f(x) = 3\,|x + 1|$

$\lim_{x \to -1} f(x) =$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) =$ $\lim_{x \to -1^-} f(x) =$ $\lim_{x \to -1} f(x) =$

30. $f(x) = U(x + 2)$

$\lim_{x \to -2} f(x) =$ $\lim_{x \to -2^+} f(x) =$ $\lim_{x \to -2^-} f(x) =$ $\lim_{x \to -2} f(x) =$

31. $f(x) = U(3x - 4)$

$\lim_{x \to 4/3} f(x) =$ $\lim_{x \to 4/3^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 4/3^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 4/3} f(x) =$

32. $f(x) = \begin{cases} U(2x - 1) & \text{si } x \neq 1/2 \\ 3 & \text{si } x = 1/2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1/2} f(x) =$ $\lim_{x \to 1/2^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 1/2^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 1/2} f(x) =$

33. $f(x) = 2\,U(x) + 1$

$\lim_{x \to 0} f(x) =$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 0} f(x) =$

34. $f(x) = sgn\,(x^2 - 9)$

$\lim_{x \to 3} f(x) =$ $\lim_{x \to -3} f(x) =$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) =$ $\lim_{x \to -3^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 3} f(x) =$ $\lim_{x \to -3} f(x) =$

35. $f(x) = sgn\ (2x - 1)$

$\lim_{x \to 1/2} f(x) =$

36. $f(x) = sgn\ (x) + 2$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 0} f(x) =$

37. $f(x) = U(x)$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 1/2^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 1/2^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 1} f(x) =$ $\lim_{x \to 1/2} f(x) =$

38. $f(x) = [|2x|]$ (entero mayor)

$\lim_{x \to 1/3^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 1/3^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 1/3} f(x) =$ $\lim_{x \to 2} f(x) =$

Sección 12.2

TEOREMAS DE LÍMITES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Demostrar los siguientes teoremas:

   a) $\lim_{x \to a} c = c$

   b) $\lim_{x \to a} x = a$

c) $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

d) $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$

2. Enunciar los teoremas de límites de las funciones:

a) Producto
b) Cociente
c) Potencia

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

3. Encontrar el límite de una función aplicando teoremas.

Es común en las matemáticas usar formas alternativas de la definición de un concepto con el fin de simplificar y generalizar. Si consideramos las siguientes funciones:

$$f(x) = 10, \qquad f(x) = -2/3 \qquad \text{y} \qquad f(x) = -8$$

nos damos cuenta de que son funciones distintas, pero del mismo tipo, es decir, son funciones constantes. De la misma manera, si $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ y $P(x)$ son cuatro funciones distintas, podemos formar las funciones: $(f + g)(x)$, $(h + P)(x)$; $(fg)(x)$, $(hP)(x)$; $(f/g)(x)$, $(P/h)(x)$ que a pesar de ser 6 funciones se pueden reducir a tipos de funciones suma, producto y cociente. De tal forma, es deseable establecer teoremas acerca del límite de una constante, de una suma, de un producto o un cociente.

Teorema 1.

Si $f(x) = c$, c es una constante,

entonces:

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Demostración.

Utilizando la definición, debemos demostrar que:
para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ)

tal que:

$| c - c | < \epsilon$ siempre que $0 < | x - a | < \delta$

Demostración.

$| c - c | = 0 < \epsilon$

esta desigualdad es cierta para cualquier valor de x, en particular para los valores de x en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, no importando el valor de δ que se tome.

Ejemplos.

1. $\lim_{x \to 2} 3 = 3$
2. $\lim_{x \to -1} 3 = 3$
3. $\lim_{x \to 0} (-5) = -5$
4. $\lim_{x \to 9} 0 = 0$
5. $\lim_{x \to 2} (1/2) = 1/2$
6. $\lim_{x \to -2} (-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$

Teorema 2.

Si $f(x) = x$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$$

Demostración.

$| f(x) - a | = | x - a | < \epsilon$

entonces tomando $\delta = \epsilon$ tenemos que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$

$| f(x) - a | = | x - a | < \epsilon$ siempre que $| x - a | < \delta$.

Ejemplos.

7. $\lim_{x \to 1} x = 1$
8. $\lim_{x \to -2} x = -2$
9. $\lim_{x \to 1/2} x = 1/2$
10. $\lim_{x \to -0.001} x = -0.001$

Teorema 3.

Si m y b son constantes:

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

Debemos demostrar que:
Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

$| (mx + b) - (ma + b) | < \epsilon$ siempre que $0 < | x - a | < \delta$

Demostración.

$$| (mx + b) - (ma + b) | = | mx + b - ma - b | = | mx - ma |$$
$$= | m (x - a) | = | m | | x - a |$$

y si $m \neq 0$, entonces:

$| (mx + b) - (ma + b) | = | m | | x - a |$ siempre que $| x - a | < \epsilon / | m |$

o sea

$| (mx + b) - (ma + b) | < \epsilon$ siempre que $0 < | x - a | < \epsilon / | m |$ por lo que $\delta = \epsilon / | m |$

Observación.

Si $m = 0$, este teorema es equivalente al teorema 1.

Ejemplos.

11. $\lim_{x \to 5} (2x - 8) = 2(5) - 8 = 2$
12. $\lim_{x \to 8} (\frac{x}{2} - 9) = \frac{8}{2} - 9 = 4 - 9 = -5$
13. $\lim_{x \to -3} (5 - x) = 5 - (-3) = 8$

14. $\lim_{x \to 5} (2 - 3x/5) = 2 - 3(5)/5 = 1$

15. $\lim_{x \to -2} (3x + 6) = 3(-2) + 6 = 0$

Teorema 4.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y c es una constante,

entonces

$$\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = cL$$

Debemos demostrar que:

Para toda $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

$| cf(x) - cL | < \epsilon$ siempre que $0 < | x - a | < \delta$

Para este teorema se tiene la siguiente información

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

por lo que

para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$| f(x) - L | < \epsilon$ siempre que $0 < | x - a | < \delta$ y δ y ϵ se relacionan.

Demostración.

$$| cf(x) - cL | = | c(f(x) - L) | = | c | \, | f(x) - L |$$

si $c \neq 0$, tenemos:

$| cf(x) - cL | = | c | \, | f(x) - L | < \epsilon_1$ y si $\epsilon_1 = \epsilon / | c |$ entonces

$| cf(x) - cL | < \epsilon / |c|$ siempre que $0 < | x - a | < \delta$

y así concluimos que:
$|c f(x) - c L | < \epsilon$ siempre que $0 < | x - a | < \delta$

Observación.

Si $c = 0$, entonces $cf(x) = 0$, que es una función constante.

Teorema 5.

Si f y g son dos funciones tales que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

entonces:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$$

Demostración.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces

para todo $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $| f(x) - L | < \epsilon_1$ siempre que $| x - a | < \delta_1$ también

Si $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

para todo ϵ_2, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$| g(x) - M | < \epsilon_2$ siempre que $| | x - a | < \delta_2$

Queremos demostrar que

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$| [f(x) + g(x)] - (L + M) | < \epsilon$ siempre que $0 < | x - a | < \delta$, así que

$| [f(x) + g(x)] - (L + M) | = | (f(x) - L) + (g(x) - M) | \leq | f(x) - L | + | g(x) - M | < \epsilon_1 + \epsilon_2$ siempre que

$| x - a | < \delta_1$ y $| x - a | < \delta_2$

Si $\epsilon_1 = \epsilon/2$, $\epsilon_2 = \epsilon/2$ y si $\delta =$ mínimo entre δ_1 y δ_2 tenemos:

$| [f(x) + g(x)] - (L + M) | < \epsilon$ siempre que $0 < | x - a | < \delta$

Observación.

Puesto que $f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\ [\,f(x) - g(x)\,] &= \lim_{x\to a}\ [f(x) + (-1)g(x)] \\ &= \lim_{x\to a} f(x) + (-1)\lim_{x\to a} g(x) \\ &= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)\end{aligned}$$

Los siguientes teoremas no serán demostrados. Estos son del mismo grado de dificultad en cuanto a los conceptos de cálculo que los anteriores, siendo las demostraciones más extensas en cuanto a su manipulación algebraica.

Teorema 6.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$

entonces:

i) $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = LM$

ii) $\lim_{x\to a} [f(x)/g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x) = L/M$ si $M \neq 0$

iii) $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)\,]^n = L^n$

iv) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Por inducción matemática se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 7.

Si $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$, . . ., $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$

entonces:

i) $\lim_{x\to a} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)] = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$

ii) $\lim_{x\to a} [\,f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x)\,] = L_1 L_2 \ldots L_n$

Ejemplos.

Obtener los siguientes límites:

16. $\lim_{x\to 2} (3x^3 - 2x^2 - x + 7) =$

Utilizando los teoremas, tenemos:

$$\lim_{x\to 2} (3x^3 - 2x^2 - x + 7) =$$

$$= \lim_{x\to 2} (3x^3) - \lim_{x\to 2} (2x^2) - \lim_{x\to 2} (x) + \lim_{x\to 2} (7) =$$

$$= 3 \lim_{x\to 2} (x^3) - 2 \lim_{x\to 2} (x^2) - \lim_{x\to 2} (x) + \lim_{x\to 2} (7) =$$

$$= 3[\lim_{x\to 2} x]^3 - 2[\lim_{x\to 2} x]^2 - \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 7$$

$$= 3(2)^3 - 2(2)^2 - 2 + 7$$

$$= 24 - 8 - 2 + 7 = 21$$

Observación. En este último ejemplo se observa que al utilizar los teoremas en la obtención del límite, es simplemente sustituir en la expresión el valor al que se aproxima la variable x.

Es decir,

$$\lim_{x\to 2} (3x^3 - 2x^2 - x + 7) = 3(2)^3 - 2(2)^2 - 2 + 7 = 21$$

17. $\lim_{x\to 1} \sqrt{\dfrac{9x^2 + 3x - 9}{x^2 + 3}}$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 1} \frac{9x^2 + 3x - 9}{x^2 + 3}}$$

$$= \sqrt{\frac{9\left(\lim_{x\to 1} x\right)^2 + 3 \lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 9}{\left(\lim_{x\to 1} x\right)^2 + \left(\lim_{x\to 1} 3\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{9(1)^2 + 3(1) - 9}{(1)^2 + 3}}$$

$$= \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$$

Observación.

También en este último ejemplo se puede sustituir directamente el valor al que se aproxima la variable x.

Es decir,

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{9x^2 + 3x - 9}{x^2 + 3}} = \sqrt{\frac{9(1)^2 + 3(1) - 9}{(1)^2 + 3}}$$

$$= \sqrt{3/4} \quad = \sqrt{3}/2$$

18. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 16}{x^2 + 4} = \dfrac{(2)^2 + 16}{(2)^2 + 4} = \dfrac{20}{8} = \dfrac{5}{2}$

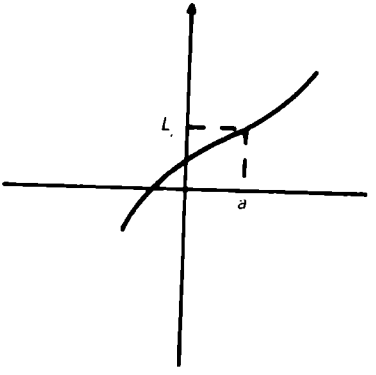
19. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{5 - x}}{6} = \dfrac{\sqrt{5 - (-4)}}{6} = \dfrac{\sqrt{9}}{6} = 3/6 = 1/2$

Teorema 8.

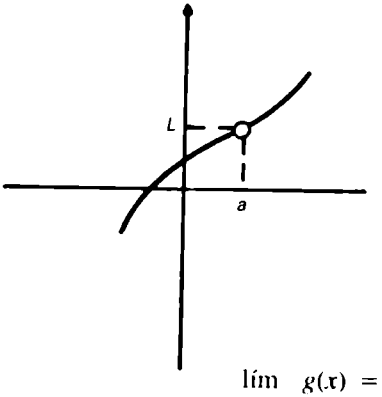
Si $f(x) = g(x)$ para todos los valores de x, excepto en $x = a$ y si $\lim_{x\to a} g(x) = L$

entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$$



$\lim_{x\to a} f(x) = L$



$\lim_{x\to a} g(x) = L$

$f(x) = g(x)$. Para todos los valores de x, excepto $x = a$.

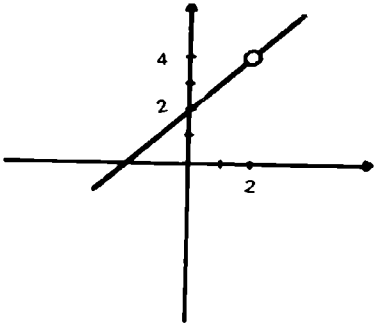
Ejemplos:

20. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Al sustituir el valor de $x = 2$ en el cociente tenemos lo siguiente:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

La gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ es:



y observamos que el lím de $f(x)$ cuando x se aproxima al valor de 2 es 4, que se puede obtener de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x + 2) = (2 + 2) = 4$$

Observaciones:

a) Utilizando el teorema 8, podemos llegar a la siguiente conclusión: Si una función $f(x)$ se puede simplificar, el lím de $f(x)$ cuando x se aproxima a "a" es idéntico a la de la función simplificada cuando x se aproxima a "a".

b) Siempre que se obtenga una indeterminación (%) al hacer una sustitución, y antes de afirmar que el límite no existe, se deberá simplificar la

función dada para eliminar la indeterminación para luego aplicar el teorema 8.

Ejemplos.

21. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$

Al sustituir el valor de $x = 3$, obtenemos $\dfrac{3-3}{(3)^2-9} = \dfrac{0}{0}$ que es una indeterminación, por lo que:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1/3 + x)^2 - 1/9}{x}$

También aquí se obtiene una indeterminación cuando se sustituye x por cero, por lo que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1/3 + x)^2 - 1/9}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1/9) + 2x/3 + x^2 - (1/9)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x/3 - x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2/3 - x)}{x} = \lim_{x\to 0} (2/3 - x) = 2/3$$

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x(x-2)}{x} = \lim_{x\to 0} (x-2) = 0 - 2 = -2$

24. $\lim_{h\to 0} \dfrac{8h}{h} = \lim_{h\to 0} (8) = 8$

25. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)}$

$$= \lim_{x\to 2} (x^2 + 2x + 4) = (2)^2 + 2(2) + 4 = 12$$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(2 + x)^3 - 2^3}{x} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{(2+x)^2} = \dfrac{1}{2^2}}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{4+4x+x^2} - \dfrac{1}{4}}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{4-(4+4x+x^2)}{4(4+4x+x^2)}}{\dfrac{x}{1}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{4-4-4x-x^2}{x(4)(4+4x+x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(-4-x)}{x(4)(4+4x+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{(-4-x)}{4(4+4x+x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-4-0}{4[4+4(0)+(0)^2]} = \frac{-4}{4(4)} = \frac{-1}{4}$$

27. $$\lim_{x\to 0} \frac{1/x^2 - 2/x + 3}{1/x^3 + 5} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1-2x+3x^2}{x^2}}{\dfrac{1+5x^3}{x^3}} = \lim \frac{x^3(1-2x-3x^2)}{x^2(1+5x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(1-2x-3x^2)}{(1+5x^3)} = \frac{0[1-2(0)-3(0)^2]}{[1+5(0)^3]} = \frac{0(1)}{(1)} = 0$$

28. $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{1}{3+x} - \frac{1}{3}\right] =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{3-(3+x)}{(3+x)(3)}\right] =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{x}{(3+x)(3)}\right]$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{(x)(3+x)(3)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{(3+x)(3)} = \frac{1}{(3+0)(3)} = \frac{1}{9}$$

29 $$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{1-\sqrt{2x+5}}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(1+\sqrt{2x+5})}{(1-\sqrt{2x+5})(1+\sqrt{2x+5})}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(1+\sqrt{2x+5})}{1-(2x+5)}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(1+\sqrt{2x+5})}{1-2x-5}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(1+\sqrt{2x+5})}{-2x-4}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(1+\sqrt{2x+5})}{-2(x+2)}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{1+\sqrt{2x+5}}{-2} = \frac{1+\sqrt{2(-2)+5}}{-2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{1}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Observaciones:

a) En este último ejemplo, también se obtiene una indeterminación al sustituir el valor de $x = -2$, y para eliminarlo se racionalizó el denominador (eliminar del denominador los racionales)

b) En la eliminación de otros límites se hará necesario racionalizar el numerador.

30. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} =$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - (x)}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

31. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{3}}{x} =$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{3})[(\sqrt[3]{x+3})^2 + \sqrt[3]{x+3}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2]}{x[(\sqrt[3]{x+3})^2 + \sqrt[3]{x+3}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2]}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt[3]{x+3})^3 - (\sqrt[3]{3})^3}{x[(\sqrt[3]{x+3})^2 + \sqrt[3]{x+3}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2]} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+3) - 3}{x[(\sqrt[3]{x+3})^2 + \sqrt[3]{x+3}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2]} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x[(\sqrt[3]{x+3})^2 + \sqrt[3]{x+3}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2]} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{[(\sqrt[3]{x+3})^2 + \sqrt[3]{x+3}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2]} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt[3]{0 + 3})^2 + (\sqrt[3]{0 + 3}\ \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3}\ \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2} =$$

$$= \frac{1}{3(\sqrt[3]{3})^2}$$

32. $\lim_{x \to 3} \dfrac{2x - 6}{2 - \sqrt{3x - 5}} =$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(2x - 6)(2 + \sqrt{3x - 5})}{(2 - \sqrt{3x - 5})(2 + \sqrt{3x - 5})} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2(x - 3)(2 + \sqrt{3x + 5})}{4 - (3x - 5)} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2(x - 3)(2 + \sqrt{3x + 5})}{4 - 3x + 5} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2(x - 3)(2 + \sqrt{3x - 5})}{-3x + 9} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2(x - 3)(2 + \sqrt{3x - 5})}{-3(x - 3)} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2(2 + \sqrt{3x - 5})}{-3} =$$

$$= \frac{2(2 + \sqrt{3(3) - 5})}{-3} = \frac{4 + 2\sqrt{4}}{-3} =$$

$$= \frac{4 + 4}{-3} = \frac{-8}{3}$$

Los siguientes resultados sobre límites también serán de utilidad, donde $a \in$ reales.

$a)$ $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$

$b)$ $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$

$c)$ $\lim_{x \to a} \tan x = \tan a;\ a \neq \pi/2 + n\pi\ (n \in z)$

$d)$ $\lim_{x \to a} \cot x = \cot a;\ a \neq n\pi\ (n \in z)$

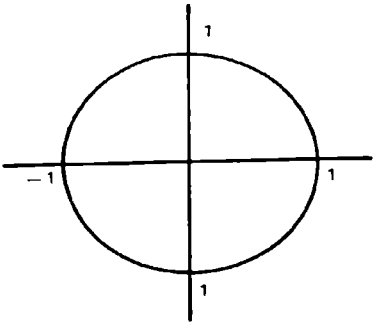
$e)$ $\lim_{x \to a} \sec x = \sec a;\ a \neq \pi/2 + n\pi\ (n \in z)$

$f)$ $\lim_{x \to a} \csc x = \csc a;\ a \neq n\pi\ (n \in z)$

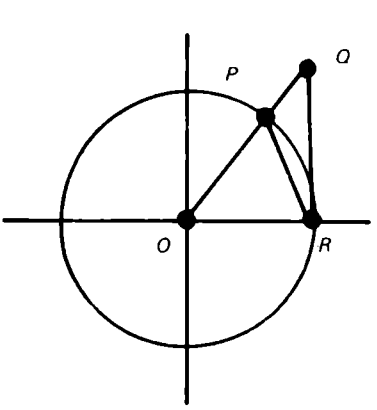
Demostraremos el siguiente resultado que nos será de utilidad en las siguientes secciones.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

consideremos una circunferencia de radio 1 y centro en el origen.

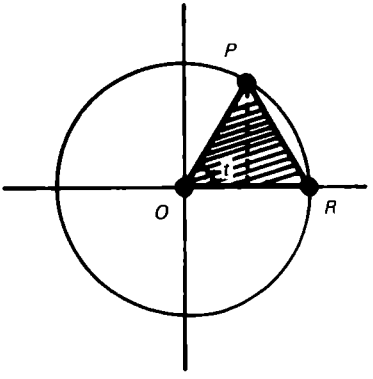


consideremos los triángulos ΔOPR y ΔOQR.



Se puede observar que:

* área del ΔOPR < área del sector circular OPR < área del ΔOQR.



$$\text{sen } t = \frac{\text{altura del } \Delta OPR}{OP}$$

$$\text{sen } t = \frac{\text{altura del } \Delta OPR}{1}$$

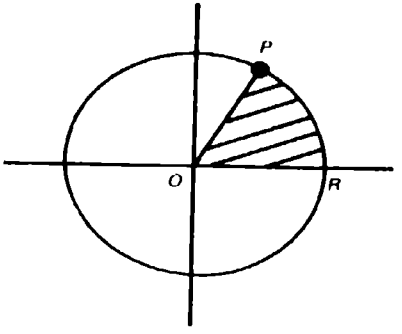
$$\text{sen } t = \text{altura del } \Delta OPR$$

así:

$$\text{área del } \Delta OPR = \frac{(OR)\ (\text{sen } t)}{2}$$

$$\text{área del } \Delta OPR = \frac{(1)(\text{sen } t)}{2}$$

$$\text{área del } \Delta OPR = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t$$

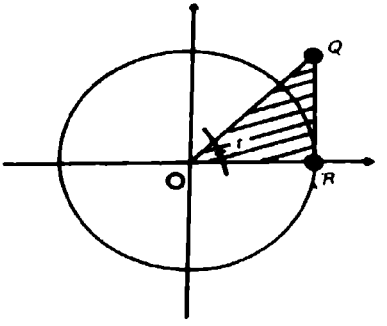


área de un sector circular es $\frac{1}{2} R^2\theta$

así:

$$\text{área sector circular } OPR = \frac{1}{2} (1)^2(t)$$

$$\text{área sector circular } OPR = \frac{1}{2} t$$



$$\tan t = \frac{QR}{OR} = \frac{QR}{1}$$

así $QR = \tan t$

$$\text{área del } \Delta OQR = \frac{(QR)\,(OR)}{2} = \frac{(\tan t)\,(1)}{2}$$

$$\boxed{\text{área del } \Delta OQR = \frac{1}{2}\tan t}$$

Regresando a la desigualdad con área del $\Delta OPR <$ área del sector circular $OPR <$ área del ΔOQR, tenemos que:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} t < \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}\tan t$$

o

$$\operatorname{sen} t < t < \tan t$$

o

$$1 < \frac{t}{\operatorname{sen} t} < \frac{1}{\cos t}$$

o

$$\cos t < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1$$

y tomando el límite cuando $t \to 0$, tenemos:

$$\lim_{t\to 0} \cos t < \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} < \lim_{t\to 0} 1$$

$$\text{cas } 0 < \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1$$

$$1 < \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1$$

por lo que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

Observación

Si es una función también, podemos afirmar que:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$$

También otro resultado importante es el siguiente:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$$

Demostración

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{t(1 + \cos t)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t(1 + \cos t)} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t(1 + \cos t)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}$$

$$= (1) \cdot \frac{\operatorname{sen}(0)}{1 + \cos(0)} = (1)\left(\frac{0}{1 + 1}\right) = \frac{0}{2} = 0$$

Ejemplos.

33. Obtener $\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 8t}{t}$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 8t}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{8 \operatorname{sen} 8t}{8t}$$

$$= 8 \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 8t}{8t}$$

$$= 8\,(1) = 8$$

34. Obtener: $\lim_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2t}{t^2}$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2t}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} 2t}{t \cdot t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2t}{t} \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2t}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} 2t}{2t} \lim_{t \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} 2t}{2t}$$

$$= 2 \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2t}{2t} \; 2 \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2t}{2t}$$

$$= 2(1)\,2(1)$$

$$= 4$$

35. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x/2}{x/2} = 1$

36. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{x}{1}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= (1)\left(\frac{1}{\cos 0}\right) = (1)(1) = 1$$

Ejercicio.

Obtener el límite indicado en cada uno de los siguientes problemas.

1. $\lim_{x \to -2} (5) =$
2. $\lim_{x \to 1} (-3) =$
3. $\lim_{x \to 1/4} (1/2) =$
4. $\lim_{x \to -3} (\sqrt{7}) =$
5. $\lim_{x \to 6} x =$
6. $\lim_{x \to 1/3} x =$
7. $\lim_{x \to -5} x =$
8. $\lim_{x \to -1/5} x =$
9. $\lim_{x \to 1} (2x - 8) =$
10. $\lim_{x \to 2} (5 - 3x) =$
11. $\lim_{x \to -1} (x/2 + 3) =$
12. $\lim_{x \to -2} (8 + 3x/5) =$
13. $\lim_{x \to 3} (5x/4 + 3) =$
14. $\lim_{x \to 7} (2x/7 - 3) =$
15. $\lim_{x \to 2} (3x^2 + 8x - 1) =$
16. $\lim_{x \to 1} (6x^3 - 7x^2 + 3x - 2) =$
17. $\lim_{x \to 3} (x^3/3 - x^2/2 + x - 1/9) =$
18. $\lim_{x \to 2} (x^4 - 8x^3 - 2x^2 - 5x + 3) =$
19. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + 7 - 2}{x^3 + 1} =$
20. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^6 - 2} =$
21. $\lim_{x \to 1} \sqrt{8x - 2} =$
22. $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{8x^2 - x + 3} =$
23. $\lim_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{7x^3 - x + 5}{x^4 + 2}} =$
24. $\lim_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x^4 + 1}{x^2 + 1}} =$
25. $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{8 - x}}{2} =$
26. $\lim_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x + 4}}{12} =$

27. $\lim_{x \to 1} \dfrac{8}{\sqrt{3 + x}} =$

28. $\lim_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 5x - 6}{x - 6} =$

29. $\lim_{x \to 1/2} \dfrac{x^2 + 1/4}{x - 1/2} =$

30. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9} =$

31. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 7x}{x} =$

32. $\lim_{x \to 0} \dfrac{4x^3 - 2x^2}{4x^2 - 2x^3} =$

33. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} =$

34. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 27}{x + 3} =$

35. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2} =$

36. $\lim_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3} =$

37. $\lim_{x \to 0} \dfrac{(5 + x)^{-2} - 5^{-2}}{x} =$

38. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(1/3 + h)^2 - 1/9}{h} =$

39. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

40. $\lim_{h \to 0} \dfrac{h}{1/h}$

41. $\lim_{x \to 0} \dfrac{(16 + x)^{-2} - 16^{-2}}{x}$

42. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(1/2 + h) - 1/4}{h}$

43. $\lim_{h \to 0} \dfrac{3h}{h}$

44. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1/x^2 - 3/x + 5}{1/x^3 - 7}$

45. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \left[\dfrac{1}{2 + x} - \dfrac{1}{2} \right]$

46. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{3 - \sqrt{x + 10}}$

47. $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x - 6}{1 - \sqrt{4x - 7}}$

48. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$

49. $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

50. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{3 - \sqrt{2x + 5}}$

51. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x + 2} - \sqrt[3]{2}}{x}$

52. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h + 4} - \sqrt[3]{4}}{h}$

53. $\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)$

54. $\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{sen} (x + \pi/4)$

55. $\lim_{x \to \pi/2} 2 \operatorname{sen} x \cos x$

56. $\lim_{x \to \pi/3} \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\tan x}}$

57. $\lim_{x \to \pi/2} 5 \cos 2x$

58. $\lim_{x \to \pi/4} \cot x \sec x$

59. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x}$

60. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x/3}{x/3}$

61. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x}$

62. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\cos x}$

63. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 8x}{\operatorname{sen} 5x}$

64. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}$

65. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{2x^2}$

66. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{3x^2}$

67. $\lim_{x \to \pi/2} x \operatorname{sen} x$

68. $\lim_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{1 - \cos^2 (x/2)}$

69. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

70. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{2x}$

Sección 12.3

LÍMITES ESPECIALES

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Explicar el significado de las expresiones:

   a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ *b*) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

   c) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ *d*) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

2. Enunciar teoremas para calcular el:

   $$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

3. Utilizando teoremas, calcular el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a infinito

Si el límite de f (x) cuando x tiende a a es L, entendemos que f (x) tiende a L sin importar como se aproxima x a a. El teorema de la unicidad nos dice que la función no puede tender a más de un punto.

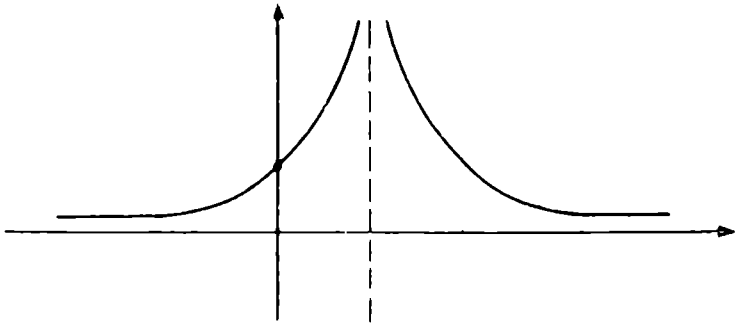
También existen funciones que a pesar de que no se aproximan a un número real, siempre tienen la tendencia a crecer o decrecer constantemente a medida que los valores del dominio se aproximan a un punto. Veamos el siguiente ejemplo:

$$\text{Si } f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Analicemos el comportamiento de f (x) para valores de x cercanos a 1, mediante la siguiente tabulación.

x	.5	.9	.99	.999	1.001	1.01	1.1	1.5
f (x)	4	100	10,000	1,000,000	1,000,000	10,000	100	4

y la gráfica de f (x) es:



Nos damos cuenta que entre más próximo esté x de 1, los valores de f (x) son más grandes, no importando la dirección en la que nos aproximemos a $x = 1$. Es decir, podemos pensar que f (x) toma valores tan grandes como lo deseemos con tal de aproximar el valor de x lo suficiente a 1.

De la tabulación podemos observar que si

	$.5 < x < 1.5$	entonces	$f(x) > 4$
ó	$\lvert x - 1 \rvert < .5$	entonces	$f(x) > 4$

	$.9 < x < 1.1$	entonces	$f(x) > 100$
ó	$\|x - 1\| < .1$	entonces	$f(x) > 100$
	$.99 < x < 1.01$	entonces	$f(x) > 10{,}000$
ó	$\|x - 1\| < .01$	entonces	$f(x) > 10{,}000$
	$.999 < x < 1.001$	entonces	$f(x) > 1{,}000{,}000$
ó	$\|x - 1\| < .001$	entonces	$f(x) > 1{,}000{,}000.$

Definición. Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo abierto que contenga a "a", excepto posiblemente en a mismo. Diremos que $f(x)$ crece sin límite a medida que x se aproxima a "a", el cual será denotado por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Si para cualquier número $n > 0$, $\exists \delta > 0$ (N depende de δ) tal que:

$$f(x) > N \text{ siempre que } 0 < |x-a| < \delta$$

Ejemplo.

1. Demostrar que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Tomemos $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$

Cuando x es tal que, $0 < |x - 1| < \dfrac{1}{\sqrt{N}}$

$$(|x-1|)^2 < \frac{1}{(\sqrt{N})^2} \quad \text{o} \quad \frac{1}{(x-1)^2} > N$$

Así, el límite se hace infinito positivo.

Si a la función de ejemplo anterior, $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, se le cambia el signo, esto es: $g(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$, nos damos cuenta que cuando x está próximo a $(+1)$, la función toma valores muy pequeños negativos, lo que podemos observar en la siguiente tabulación:

x	.5	.9	.99	.999	1.001	1.01	1.1	1.5
$g(x)$	−4	−100	−10,000	−1,000,000	−1,000,000	−10,000	−100	−4

Esta situación la podemos denotar por:

$$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

Definición: Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo abierto que contenga a "a", excepto posiblemente en a mismo. Diremos que $f(x)$ decrece sin límite, a medida que x se aproxima a "a" el cual será denotado por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Si $\forall N < 0$, $\exists \delta > 0$ (N depende de δ) tal que:

$$f(x) < N \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

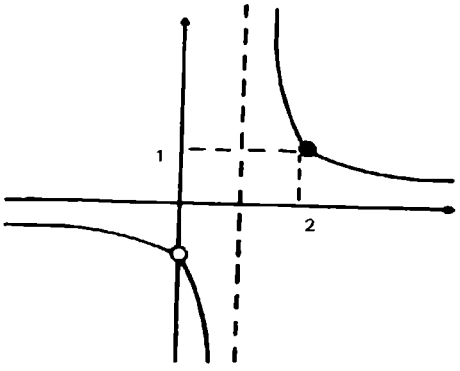
Es conveniente insistir en que las expresiones:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty$$

no dicen que $f(x)$ y $g(x)$ tengan límite, sino por lo contrario, estos límites no existen y los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ solamente nos indican el comportamiento de la función respectiva.

Consideremos la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$ cuya gráfica es:



y observemos que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

y

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Es decir, si x se aproxima a "a" por la derecha, $f(x)$ crece sin límite y si x se aproxima a "a" por la izquierda, $f(x)$ decrece sin límite.

Utilizaremos la notación

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Es decir, (∞) sin signo para indicar que al aproximarse x a un valor determinado, crece infinita para un lado y decrece infinitamente para el otro.

Definición.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ es equivalente a } \lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty$$

que se lee "el lím de $f(x)$ cuando x se aproxima a "a", es infinito sin signo"

Acabamos de ver lo que significa el hecho de que f (x) crezca o decrezca cuando x se acerca a un número dado.

Veamos ahora qué sucede cuando la variable x es la que crece o decrece. Para ello, tabulemos la función del último ejemplo para valores grandes de x.

x	2	5	10	100	1000
f (x)	1	0.0625	0.0123	.00010	.000001

Si $x > 2$ entonces $\left| \frac{1}{(x-1)^2} - 0 \right| < 1$

Si $x > 5$ entonces $\left| \frac{1}{(x-1)^2} - 0 \right| < .0625$

Si $x > 10$ entonces $\left| \frac{1}{(x-1)^2} - 0 \right| < .00123$

Si $x > 100$ entonces $\left| \frac{1}{(x-1)^2} - 0 \right| < .00010$

Si $x > 1000$ entonces $\left| \frac{1}{(x-1)^2} - 0 \right| < .000001$

De lo anterior podemos inferir que:

$$\forall\ \epsilon > 0, \quad \exists N > 0, \text{ tal que:}$$

$$\text{si } x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{(x-1)^2} - 0 \right| < \epsilon$$

Definición. Sea f una función que está definida en todos los números de algún intervalo $(a, +\infty)$. $f(x)$ se aproxima a L cuando x crece sin límite, el cual se denota por:

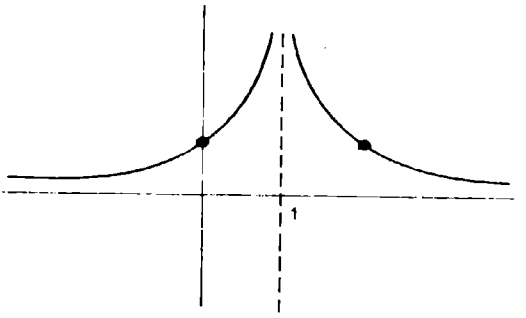
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Si $\forall \epsilon > 0$, existe un número $N > 0$, tal que:

$$| f(x) - L | < \epsilon \text{ siempre que } x > N$$

De acuerdo con esta definición, en el ejemplo anterior tenemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0$$



En esta misma función si consideramos que x toma valores muy pequeños y negativos (decrece sin límite) los respectivos valores f (x) estarán también muy próximos a cero, lo que podemos denotar por:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0$$

Definición. Sea f una función que está definida en todos los números de algún intervalo $(-\infty, a)$. $f(x)$ se aproxima a L cuando x decrece sin límite, el cual se denota por:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Si $\forall \epsilon > 0$, existe un número $N < 0$, tal que:

$$| f(x) - L | < \epsilon \text{ siempre que } x < N$$

Observación. Los teoremas mencionados en la sección anterior seguirán siendo válidos cuando x tiende a infinito o menos infinito.

Teorema 1.

Si n es cualquier entero positivo, entonces:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ *b)* $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Demostración de a).

Tenemos que probar que $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, tal que:

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \epsilon \qquad \text{siempre que} \qquad x > N.$$

Si

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \epsilon \qquad \text{es equivalente a:}$$

$$| x^n | > 1/\epsilon \qquad \text{o} \qquad |x| > \left[\frac{1}{\epsilon} \right]^{1/n}$$

Y ya que $x > 0$, entonces $x > (1/\epsilon)^{1/n}$. O sea, que:

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \epsilon \qquad \text{siempre que} \qquad x > \left[\frac{1}{\epsilon} \right]^{1/n}$$

y tomando $N = (1/\epsilon)^n$, tenemos que $\forall\ \epsilon > 0$,
$N = (1/\epsilon)^{1/n} > 0$, tal que:

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \epsilon \qquad \text{siempre que} \qquad x > N = (1/\epsilon)^{1/n}$$

La demostración de *b*) es similar a ésta.

También se puede demostrar que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^R} = 0$$

o

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^R} = 0$$

si c es constante, utilizando el teorema anterior y los teoremas de límites, demostraremos la segunda igualdad.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^R} = \lim_{x \to -\infty} c \cdot \frac{1}{x^R}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} C \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^R}$$

$$= c\,(0)$$
$$= 0$$

Ejemplos.

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

3. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

4. $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 8x^2 + 3}{7x^3 + 3x - 1}$

En este ejemplo no podemos realizar la sustitución directa, puesto que el símbolo infinito no es un número real y para nosotros no tienen sentido expresiones como $(\infty)^3$ o $3(\infty)$. Para resolver este tipo de problemas, nos auxiliaremos del teorema anterior realizando operaciones algebraicas que nos permitan obtener expresiones del tipo $\frac{1}{x^n}$. Para este ejemplo dividimos numerador y denominador entre x^3 (variable de mayor exponente).

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 8x^2 + 3}{7x^3 + 3x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x^3 - 8x^2 + 3}{x^3}}{\frac{7x^3 + 3x - 1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \frac{8}{x} + \frac{3}{x^3}}{7 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - 8 \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + 3 \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 7 + 3 \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{3 - 8\,(0) + 3\,(0)}{7 + 3\,(0) - (0)} = \frac{3}{7}$$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x - 1}{\sqrt{7x^2 + 5}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x - 1}{\sqrt{7x^2 + 5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{6x - 1}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{7x^2 + 5}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{6x - 1}{x}}{\frac{\sqrt{7x^2 + 5}}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6 - \frac{1}{x}}{\sqrt{7 + 5/x^2}}$$

$$= \frac{6 - 0}{\sqrt{7 + 0}} = \frac{6}{\sqrt{7}}$$

6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x - 1}{\sqrt{7x^2 + 5}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{6x - 1}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{7x^2 + 5}}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6x - 1}{-x}}{\sqrt{7 + 5/x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-6 + \frac{1}{x}}{\sqrt{7 + 5/x^2}} = \frac{-6}{\sqrt{7}}$$

Observación.

En este último ejemplo, sustituimos $\sqrt{x^2}$ por $(-x)$ ya que:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

7. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} + \frac{x}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{0}{\sqrt{1} + 1} = 0$$

Teorema.

Si n es cualquier número entero positivo, entonces:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = \infty$

b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

c) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ es par.} \\ -\infty \text{ si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

Ejemplos.

8. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x+5}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{1}{0+0} = \frac{1}{0} = \infty$$

podríamos decir que el límite es $(+\infty)$, ya que el numerador es $(+)$ y el denominador se aproxima a (0) a través de valores positivos.

Es decir:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+5} = +\infty$$

9. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x - x^2}{4x+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x - x^2}{x^2}}{\frac{4x+5}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{x} - 1}{\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{0-1}{0+0} = \frac{-1}{0} = \infty$$

Observamos que el numerador es negativo y el denominador se aproxima a cero a través de valores positivos $(-/+) = -$, por lo que:

$$\lim \frac{3x - x^2}{4x+5} = -\infty$$

10. $$\lim_{x \to -3^+} \frac{x}{x+3} = \frac{-3}{(-3)+3} = \frac{-3}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x}{x+3} = \frac{-3}{(-3)+3} = \frac{-3}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x}{x+3} = \infty$$

Asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de una función

Definición. La recta de ecuación $x = a$ es una ASÍNTOTA VERTICAL de la gráfica de la función $f(x)$ si al menos una de las siguientes proposiciones es verdadera.

i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ iv) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Definición: La recta de ecuación $y = b$ es una ASÍNTOTA HORIZONTAL de la gráfica de la función $f(x)$ si al menos una de las siguientes proposiciones es verdadera.

i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

Tanto las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de una función, serán de gran utilidad al trazar la gráfica de:

$$y = f(x).$$

Ejemplos.

Obtener las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de las funciones dadas en los siguientes ejemplos.

11. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

Asíntotas verticales. (A.V.)

Los posibles valores de la variable x, donde $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe son: $x = -3$.

Es decir:

$$\lim_{x \to -3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{0} = \text{no existe}$$

entonces: $\boxed{x = -3}$ es una A.V.

Asíntotas horizontales (A.H)

Tendremos que obtener el

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

y el

$$\lim_{x \to -\infty} f(x),$$

ya que si estos límites existen, entonces el resultado del límite lo igualamos a y y será la A.H.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+3}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{0}{1+0} = 0$$

así:

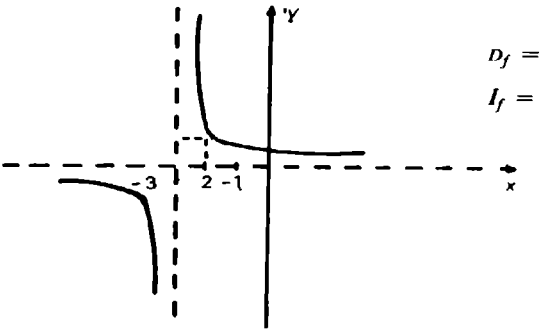
la recta de ecuación $\boxed{y = 0}$ es una A.H.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x+3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+3}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{0}{1+0} = 0$$

así, la recta de ecuación $\boxed{y = 0}$ es una A.H.

la gráfica de $y = \dfrac{1}{x + 3}$ es



$D_f = \{x \epsilon R / x \neq -3\}$

$I_f = \{y \epsilon R / y \neq 0\}$

12. $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$

Asíntotas verticales

Posibles A.V. son $x = 2$ y $x = -2$. Tendremos que comprobar si son o no.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{1}{x - 2}$$

$$= \frac{1}{-2 - 2}$$

$$= \frac{-1}{4}$$

por lo que: $x = -2$ *no es una* A. V.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x + 2}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 2}$$

$$= \frac{1}{2 - 2} = \frac{1}{0} \text{ no existe}$$

así: $\boxed{x = 2 \text{ es una A.V.}}$

Asíntotas horizontales.

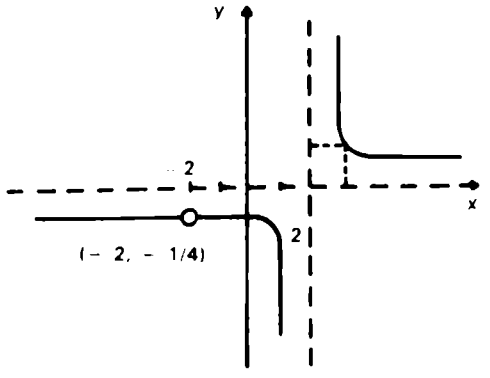
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x + 2}{x^2}}{\frac{x^2 - 4}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

así $\boxed{y = 0 \text{ es una A.H.}}$

La gráfica de

$y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$ es



$D = \{x \in R / x \neq 2 \ y \ x \neq -2\}$

$I = \{y \in R / y \neq 0, \ y \neq -1/4\}$

13. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{0} \quad \text{no existe}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{0} \quad \text{no existe}$$

así: $\boxed{x = 1 \text{ y } x = -1 \text{ son A.V.}}$

Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x}{+x}}{\sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0}}$$

$= 1$, así: $\boxed{y = 1 \text{ es una A. H.}}$

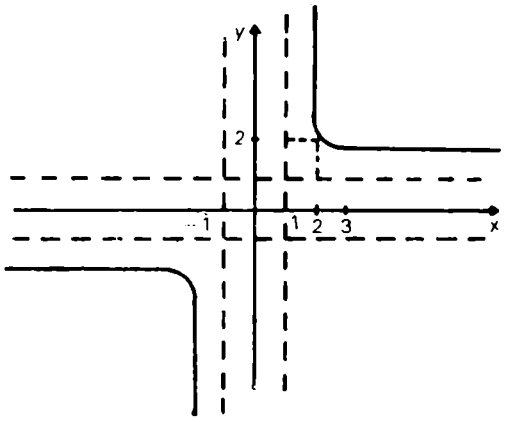
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{x}{-x}}{\sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - 0}}$$

$= -1$, así: $\boxed{y = -1 \text{ es una A. H.}}$

El dominio de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ es $D = \{x \in R / x > 1 \text{ ó } x < -1\}$.

y su gráfica es:



Ejercicios.

a) Encontrar los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{x^2 - x + 3}$

2. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 3}{x^2 + x - 1}$

3. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 + 12}$

4. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{8x^2 + 5}{x^3 + 5}$

5. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 - 5x - 3}$

6. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{8x - 1}{3x + 7}$

7. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 5}{8x^3 + x + 2}$

8. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 9}{x + 5}$

9. $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 + 3}{2x^2 - 1}$

10. $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 + 3}{2x^2 - 1}$

11. $\lim_{x \to +\infty} \frac{-5x^4 + 9}{x^4 - 1}$

12. $\lim_{x \to -\infty} \frac{-5x^4 + 9}{x^4 - 1}$

13. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4}$

14. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x + 5}$

15. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x + 5}$

16. $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{8x^2 - 9}}$

17. $\lim_{y \to +\infty} \frac{\sqrt{y^2 + 7}}{y - 1}$

18. $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$

19. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$

20. $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 5x^2 - 7}{10x^3 - 11x^2 + 5x}$

21. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \left(\frac{5x^2 - 1}{x^2} \right)$

22. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{4x - 1}}$

23. $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x - 1}$

24. $\lim_{x \to 3} \frac{3x^2}{9 - x^2}$

25. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

26. $\lim_{x \to 2^-} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

27. $\lim_{x \to 2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

28. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$

29. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x - 1}$

30. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 9}{x + 1}$

Para cada una de las siguientes funciones, obtener sus asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de $f(x)$, y hacer su gráfica indicando las asíntotas.

31. $f(x) = \dfrac{2}{x - 2}$

32. $f(x) = \dfrac{-5}{x + 5}$

33. $f(x) = \dfrac{3}{(x - 1)^2}$

34. $f(x) = \dfrac{-2}{(x + 3)^2}$

35. $f(x) = \dfrac{2x}{(x - 2)^2}$

36. $f(x) = \dfrac{x^2}{16 - x^2}$

37. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

38. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{4x^2 - 1}$

39. $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

40. $f(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

41. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$

42. $f(x) = \dfrac{5x^2}{\sqrt{x^2 - 5}}$

Sección 12.4

CONTINUIDAD

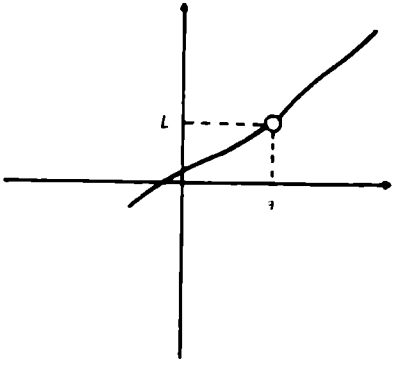
Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir continuidad de una función en un punto.
2. Dada la gráfica de una función, determinar si la función es continua en un punto.
3. Dada una función, determinar si es continua o no.

Consideremos las siguientes gráficas de funciones, en las cuales haremos algunas observaciones.

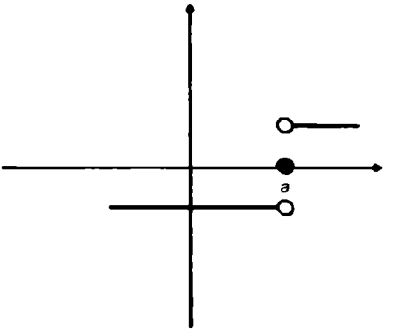
1.



i). $f(a)$ no existe

ii). $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es L

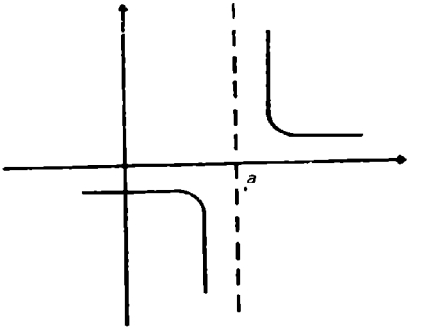
2.



i). $f(a)$ existe y es 0.

ii). $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe

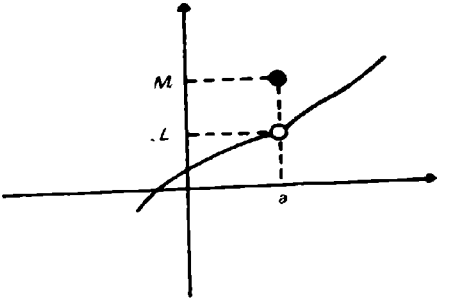
3.



i). $f(a)$ no existe

ii). $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe

4

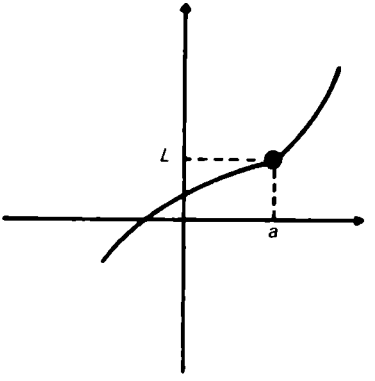


i). $f(a)$ existe y es M

ii). $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es L

iii). $L \neq M$ $(\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a))$

5.



i). $f(a)$ existe y es L

Es decir, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ii). $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es L

Sería deseable que la gráfica de una función fuera del tipo de la que aparece en la última gráfica. Ésta no presenta saltos ni agujeros y se encuentra definida en todo punto. Este tipo de funciones serán muy útiles, por lo cual le asignaremos un nombre en especial.

Definición. Sea $f: R \to R$ una función y $a \in R$, diremos que f es una función CONTINUA en $x = a$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $f(a)$ existe

ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

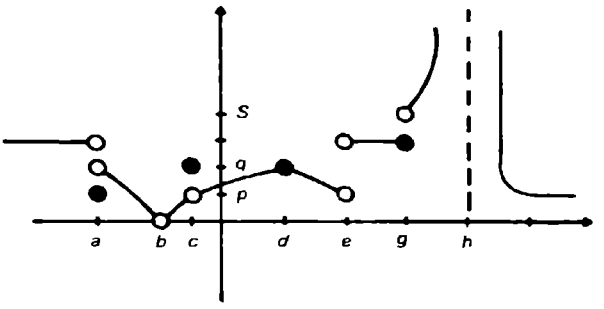
iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Observaciones.

1. La tercera condición $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ contiene a las dos primeras. Sin embargo, es útil presentar la definición de esa forma para poder especificar el porqué una función no es continua.
2. Si una función $f(x)$ *no es continua en* $x = a$, se dirá que $f(x)$ es DISCONTINUA en $x = a$.

Ejemplo.

6. Analizaremos la función $f(x)$ dada gráficamente enseguida, en los valores de $x = a$, $x = b$, $x = c$, $x = d$, $x = e$, $x = g$, $x = h$.



a) i) $f(a) = p$

ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = q$ $\lim_{x \to a^-} f(x) = r$, por lo que:

$\lim_{x \to a} f(x)$ no existe, así que $f(x)$ *no es continua en* $x = a$

b) i) $f(b)$ no existe

ii) $\lim_{x \to b} f(x) = 0$ así es que $f(x)$ *no es continua en* $x = b$

c) i) $f(c) = p$

ii) $\lim_{x \to c} f(x) = p$

iii) $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

$q \neq p$

así es que, $f(x)$ *no es continua en* $x = c$

d) i) $f(d) = q$

ii) $\lim_{x \to d} f(x) = q$

$\lim_{x \to d} f(x) = f(d)$

así es que $f(x)$ *es continua en* $x = d$

e) i) $f(e)$ no existe

ii) $\lim_{x \to e^+} f(x) = r$ $\lim_{x \to e^-} f(x) = p$ $(\lim_{x \to e^-} f(x) \neq \lim_{x \to e^+} f(x))$

por lo que $\lim_{x \to e} f(x)$ no existe

así es que $f(x)$ *no es continua en* $x = e$

f) i) $f(g) = r$

ii) $\lim_{x \to g^+} f(x) = s$ $\lim_{x \to g^-} f(x) = r$ $(\gamma \neq 5)$

por lo que $\lim_{x \to g} f(x)$ no existe

así es que, $f(x)$ *no es continua en* $x = g$

g) i) $f(h) = p$

ii) $\lim_{x \to h} f(x) =$ no existe

por lo que, $f(x)$ *no es continua en* $x = h$

Si una función $f(x)$ es discontinua en $x = a$ pero el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, se dirá que $f(x)$ tiene una DISCONTINUIDAD REMOVIBLE en $x = a$, y si $f(x)$ es discontinua en "a" y el $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe, se dirá que $f(x)$ tiene una DISCONTINUIDAD ESENCIAL.

Ejemplos.

Decir si las siguientes funciones son continuas o no en el valor que se indica.

7. $f(x) = 3x^2 - x + 3, \quad x = 1$

Verificaremos las tres condiciones de la definición.

i) $f(1) = 3(1)^2 - (1) + 3 = 5$

ii) $\lim_{x \to 1} (3x^2 - x - 3) = 3(1)^2 - (1) + 3 = 5$

iii) $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$5 = 5$

Por lo que: $f(x)$ es continua en $x = 1$

8. $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$,

i) $f(4) = \dfrac{(4)^2 - 16}{4 - 4} = \dfrac{0}{0}$ no existe

por lo que $f(x)$ no es continua en $x = 4$

ii) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)}$

$$= \lim_{x \to 4} (x + 4) = 4 + 4 = 8$$

Como el límite sí existe, la discontinuidad en $x = 4$ es removible

9.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & , \quad x \neq 4 \\ 0 & , \quad x = 4 \end{cases}$$

en $x = 4$

i) $f(4) = 0$

ii) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)}$

$$= \lim_{x \to 4} (x + 4) = 4 + 4 = 8$$

iii) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(x)$

Por lo que la tercera condición no se satisface y $f(x)$ es discontinua en $x = 4$, además como $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ sí existe, *la discontinuidad es Removible.*

10. $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$;

i) $f(-3) = \dfrac{1}{-3 + 3} = \dfrac{1}{0}$ no existe

ii) $\lim_{x \to -3} \dfrac{1}{x+3}$ no existe.

Por lo que $f(x)$ es discontinua en $x = -3$ y es una *discontinuidad Esencial* ya que: $\lim_{x \to -3} f(x)$ no existe.

11.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} & \text{si } x \neq -3 \\ 0 & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

en $x = -3$

i). $f(-3) = 0$

ii). $\lim_{x \to -3} \dfrac{1}{x+3}$ no existe.

Por lo que: $f(x)$ tiene una *discontinuidad que es esencial en* $x = -3$.

12.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

i). $f(3) = 2(3) - 5 = 1$

ii). $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} (2x - 5) = 2(3) - 5 = 1$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim (x + 2) = 3 + 5 = 5$

entonces: $\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe (puesto que $\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$).

Por lo que $f(x)$ *tiene una discontinuidad esencial en* $x = 3$.

13. En $x = 1$ analizaremos la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} |x - 1| & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 1 & \text{si } x - 1 > 0 \\ 1 & \text{si } x - 1 = 0 \\ -(x - 1) & \text{si } x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

i) $f(1) = 1$

ii) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (x - 1) = 1 - 1 = 0$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (-x + 1) = -1 + 1 = 0$

así:

$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$

iii) $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

$0 \neq 1$

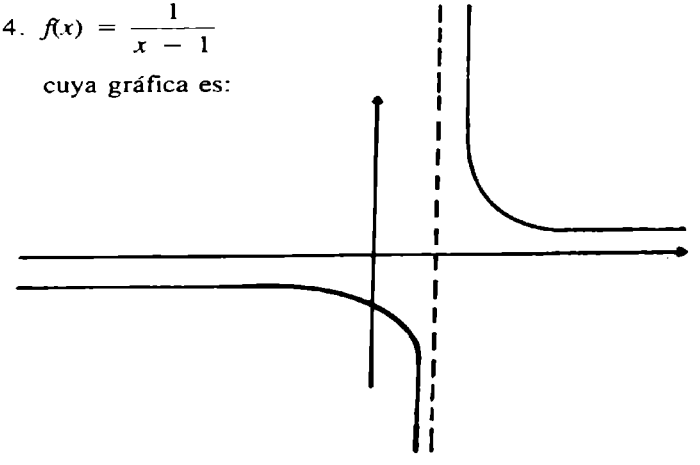
Por lo que $f(x)$ tiene una *Discontinuidad Removible en* $x = 1$.

Dada una función $y = f(x)$, se puede determinar los valores de x donde $f(x)$ sea discontinua, para ello trazaremos su gráfica y ahí observaremos en dónde existen saltos o agujeros.

En los siguientes ejemplos determinaremos los valores en donde $f(x)$ es discontinua.

14. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

cuya gráfica es:



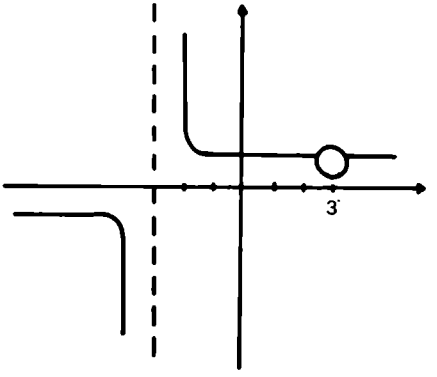
es discontinua en $x = 1$, ya que $f(1)$ no existe.

15. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \frac{x - 3}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{1}{x + 3}$$

con $x \neq 3$ y $x \neq -3$

su gráfica es:



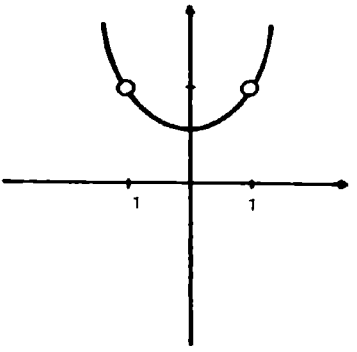
Es discontinua en $x = 3$ porque $f(3)$ no existe, además $\lim_{x \to 3} f(x)$ sí existe y es (1/6), por lo que $f(x)$ *tiene una discontinuidad removible* en $x = 3$.

También es discontinua en $x = -3$ porque $f(-3)$ no existe y el $\lim_{x \to -3} f(x)$ no existe, por lo que *la discontinuidad es esencial en* $x = -3$.

16. $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = x^2 + 1$$

con $x \neq 1$ y $x \neq -1$ y su gráfica es:



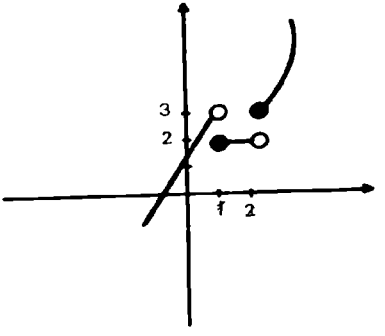
Es discontinua en $x = 1$, ya que $f(1)$ no existe, además $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ por lo que la discontinuidad en $x = 1$ es REMOVIBLE.

Es discontinua en $x = -1$, ya que $f(-1)$ no existe, además $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$ por lo que la discontinuidad en $x = -1$ es REMOVIBLE.

17.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

su gráfica es:

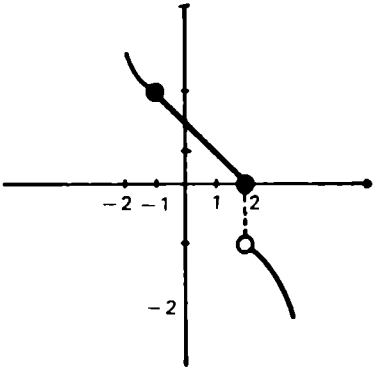


Es discontinua en $x = 1$, ya que $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe y esta discontinuidad es esencial.

También es discontinua en $x = 2$, ya que $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe y esta discontinuidad es esencial.

$$18.\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2 - x & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

su gráfica es:



Es discontinua en $x = 2$, ya que $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe y la discontinuidad es esencial.

TEOREMAS.

La discontinuidad en un punto es una propiedad que se conserva al efectuar operaciones entre funciones.

Teorema 1.

Si f y g son funciones en los Reales, que son continuas en $x = a$, entonces:

i) $f + g$ es continua en $x = a$
ii) $f - g$ es continua en $x = a$
iii) fg es continua en $x = a$
iv) f/g es continua en $x = a$, suponiendo que $g(a) \neq 0$

Haremos la demostración de i) y iii)

i) Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = a$, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = g(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

ahora:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a)$$

Por lo que: $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = f(a) + g(a)$

y $[f(x) + g(x)]$ será continua en $x = a$.

iii) Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = a$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = g(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

ahora:

$$\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = f(a)\, g(a)$$

Por lo que: $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = (f(a))(g(a))$. Es decir, la función $f(x)g(x)$ es continua en $x = a$

Teorema 2.

Una función polinomial es continua en cualquier número Real.

Demostración.

Sea:

$$f(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x^{n-1} + b_n.$$

una función polinomial de grado n(n entero positivo), $b_0 \neq 0$ y $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ son números reales.

$$\lim_{x \to a} [b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x^{n-1} + b_n] =$$

$$= b_0(a)^n + b_1(a)^{n-1} + b_2(a)^{n-2} + \ldots + b_{n-1}(a)^{n-1} + b_n$$

además:

$$f(a) = b_0(a)^n + b_1(a)^{n-1} + b_2(a)^{n-2} + \ldots + b_{n-1}(a)^{n-1} + b_n$$

Por lo que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Teorema 3.

Una función racional es continua en todo valor de su dominio.

Demostración.

Si $f(x)$ es una función racional, ésta puede ser expresada como el cociente de dos funciones polinomiales, así:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomiales.

El dominio de $f(x)$ son los valores de x donde $h(x) \neq 0$.

Sea a un valor cualquiera del dominio de $f(x)$, entonces $h(a) \neq 0$. Además:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)} = f(a)$$

Por lo que:

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ y $f(x)$ es continua en $x = a$.

Ejercicio.

I. Para cada una de las siguientes funciones, decir si es continua o no, en el valor de x indicado. Justificar la respuesta utilizando la definición de continuidad. Además, si $f(x)$ es discontinua en el valor indicado, decir si esta discontinuidad es removible o esencial.

1. $f(x) = 3x - 2$; en $x = 1$
2. $f(x) = x/2 + 3$; en $x = 4$

3. $f(x) = x^2 - 2$; en $x = 0$
4. $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$; en $x = 2$
5. $f(x) = x^3 + 1$; en $x = -1$
6. $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 - 1$; en $x = -2$
7. $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$; en $x = 4$
8. $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}$; en $x = 1$
9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ 0 & \text{si } x = 4 \end{cases}$; en $x = 4$
10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ 8 & \text{si } x = 4 \end{cases}$; en $x = 4$
11. $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$; en $x = 0$
12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - 4} & \text{si } x \neq 2, x \neq -2 \\ 0 & \text{si } x = 2, x = -2 \end{cases}$; en $x = 2$ y en $x = -2$
13. $f(x) = |2x - 1|$; en $x = 1/2$
14. $f(x) = 1 - |2x - 1|$; en $x = 1/2$
15. $f(x) = \begin{cases} |x + 3| & \text{si } x \neq -3 \\ 1 & \text{si } x = -3 \end{cases}$; en $x = -3$
16. $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < -2 \\ 0 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$; en $x = -2$ y en $x = 2$
17. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$; en $x = -1$ y en $x = 1$
18. $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 5 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$; en $x = 0$

19. $f(x) = \begin{cases} 4x + 6 & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases}$; en $x = -2$

20. $f(x) = \begin{cases} -5x - 1 & , \quad x < -1 \\ x^2 + 3 & , \quad x \geq -1 \end{cases}$; en $x = -1$

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & , \quad x \leq 1 \\ 0 & , \quad x > 1 \end{cases}$; en $x = 1$

22. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$; en $x = 1$

23. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2\sqrt{3} & \text{si } x = 0 \end{cases}$; en $x = 0$

24. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1/3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$; en $x = 0$

25. $f(x) = \dfrac{x + 1}{3 - \sqrt{x + 10}}$; en $x = -1$

II. En cada una de las siguientes funciones, determinar los valores de la variable x donde la función $f(x)$ sea discontinua. Justificar la respuesta.

1. $f(x) = 1/x$

2. $f(x) = 2/x^2$

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

4. $f(x) = \dfrac{-5}{x - 2}$

5. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

6. $f(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x^2 - 9}$

7. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$

8. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x + 5}$

9. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -3 \\ 0 & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < -3 \\ x & \text{si} \quad -3 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 4x - 5 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2 - 3x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2} - 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x} - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - 3x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

18. $f(x) = |5 - 3x| + 2$
19. $f(x) = U(3x + 2)$
20. $f(x) = 1 - U(5x + 2)$

III. Cada una de las siguientes funciones tiene una discontinuidad removible en el valor de x indicado. Dar para cada función la condición que eliminaría tal discontinuidad.

1. $f(x) = \dfrac{16x^2 - 1}{4x - 1}$; en $x = 1/4$

2. $f(x) = \begin{cases} |x + 1| & \text{si } x \neq -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$; en $x = -1$

3. $f(x) = \begin{cases} 3x + 6 & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases}$; en $x = -1$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$; en $x = 1$

5. $f(x) = \dfrac{x + 1}{3 - \sqrt{x + 10}}$; en $x = -1$

6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 2 - \sqrt{2}}{x}$; en $x = 0$

7. $f(x) = \dfrac{3x - 6}{1 - \sqrt{4x - 7}}$; en $x = 2$

8. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} + 2 - \sqrt[3]{2}}{x}$; en $x = 0$

Sección 12.5

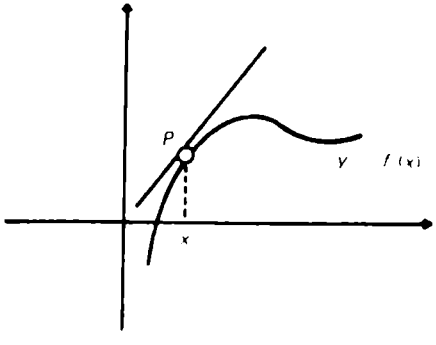
DERIVADAS

Objetivos

Después de estudiar esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir la derivada de una función.
2. Obtener la derivada de una función a partir de su definición.

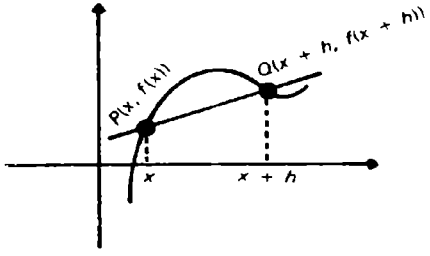
Uno de los problemas que se le presentan al cálculo, es obtener la ecuación de una recta que es tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un valor de x determinado.



Esta recta no necesariamente corta a la gráfica de $y = f(x)$ solamente en el punto P. Sin embargo, en un intervalo alrededor del punto P solamente la corta en dicho punto y la llamamos LA RECTA TANGENTE a $f(x)$ en el punto P.

Por geometría analítica sabemos que para encontrar la ecuación de una recta son necesarios un punto de ella y su pendiente o dos puntos de la recta. Puesto que conocemos un punto de la recta $P(x, f(x))$, nos avocaremos a encontrar la pendiente de dicha recta.

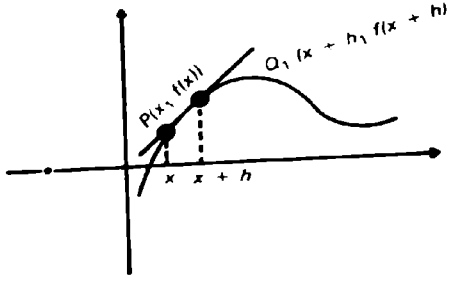
Sean $P(x, f(x))$ y $Q(x + h, f(x + h))$ donde h es un incremento de x y $h \neq 0$ y tracemos una recta que pase por P y Q.

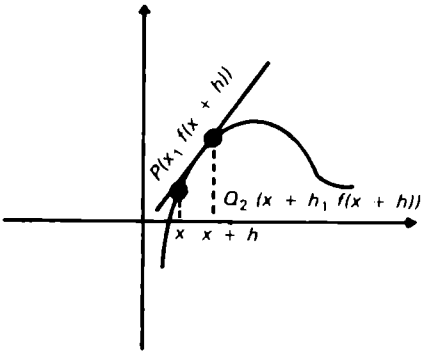


La recta que pasa por P y Q es una recta secante a la curva $f(x)$, cuya pendiente es:

$$m_s = \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

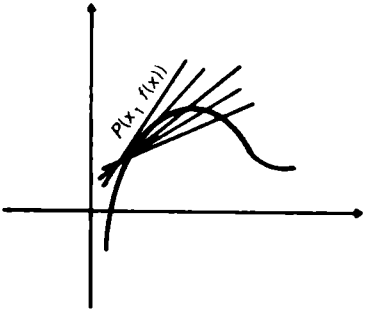
Si dejamos fijo el punto P y Q, la aproximamos a P de tal manera que h sea más pequeño, llamamos, Q_1 a la nueva posición de Q, como se observa en las siguientes gráficas.





La secante subtiende un arco más pequeño que la primera secante. Si se acerca todavía más Q hacia P, se generará el punto Q_2, el arco subtendido se sigue reduciendo.

Hacer tender el punto Q hacia el punto P equivale a decir que h se aproxima a (0) o tiende a (0). Además, *la recta secante tiende a convertirse en la recta tangente en el punto P.*



Definición . Si f: $R \to R$ es una función continua en $x = x_1$, la PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $P(x_1, f(x_1))$ está dada por:

$$m(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

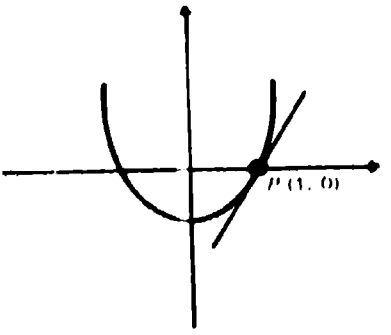
Utilizando esta definición, podemos definir la RECTA TANGENTE como la recta que pasa por $P(x_1, f(x_1))$ y tiene pendiente $m(x_1)$.

Observación. Si $m(x_1)$ no existe, la recta tangente a $f(x)$ en el punto $P(x_1, f(x_1))$ es la recta $x = x_1$.

Definición. La recta NORMAL a la gráfica de $y = f(x)$ en un punto dado, es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto.

Ejemplos.

1. Encontrar la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 - 1$ en el punto $P(1, 0)$.



$$m(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$m(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{[(x_1 + h)^2 - 1] - [x_1^2 - 1]}{h}$$

$$m(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1 h + h^2 - 1 - x_1^2 + 1}{h}$$

$$m(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{2x_1 h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x_1 + h)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} (2x_1 + h) = 2x_1$$

o sea $m(x_1) = 2x_1$, que es la pendiente en cualquier punto donde $x = x_1$, tomando $x_1 = 1$ tenemos:

$$m(x_1) = 2\,x_1$$
$$m(1) = 2(1)$$
$$= 2$$

y la ecuación de la recta es:

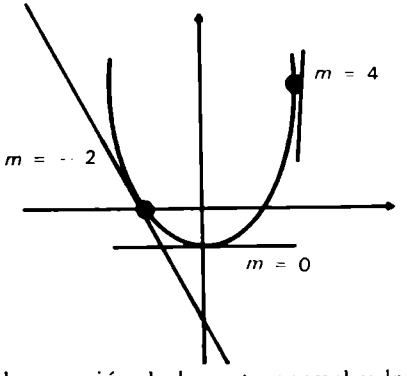
$$y - 0 = 2(x - 1)$$
$$y = 2x - 2$$

Observación La igualdad $m(x_1) = 2x_1$ es un número que indica la pendiente de la recta tangente en cada punto del dominio de la función.

$$f(x) = x^2 - 1.$$

O sea:

si $x_1 = 0$ $\quad m(0) = 2(0) = 0$
si $x_1 = -1$ $\quad m(-1) = 2(-1) = -2$
si $x_1 = 2$ $\quad m(2) + 2(2) = 4$
si $x_1 = -2$ $\quad m(-2) = 2(-2) = -4$



2. Encontrar la ecuación de la recta normal y la de la recta tangente.

$$a\ y = \sqrt{x} \text{ en el punto } (4, 2).$$

$$m(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$m(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_1 + h} - \sqrt{x_1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x_1 + h} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_1 + h} + \sqrt{x_1})}{}$$

$$m(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x_1 + h} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_1 + h} + \sqrt{x_1})}{h(\sqrt{x_1 + h}\ \sqrt{x_1})}$$

$$m(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x_1 + h})^2 - (\sqrt{x_1})^2}{h(\sqrt{x_1 + h} + \sqrt{x_1})}$$

$$m(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{x_1 + h - x_1}{h(\sqrt{x_1 + h} + \sqrt{x_1})}$$

$$m(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x_1 + h} + \sqrt{x_1})}$$

$$m(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_1 + h} + \sqrt{x_1}} = \frac{1}{\sqrt{x_1 + 0} + \sqrt{x_1}} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

$$m(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

$$m(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} + 1/4$$

Así, la ecuación de la recta tangente en el punto (4, 2) está dada por:

$$(y - 2) = (1/4)(x - 4)$$

y la ecuación de la recta normal es:

$$(y - 2) = -4(x - 4)$$

puesto que la pendiente de ella es la recíproca y de signo contrario de la pendiente de la tangente.

En otras áreas como la Física y la Economía aparecen algunos conceptos donde se utiliza la expresión:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

En Física.

Si $s = f(t)$ es la ecuación de movimiento de una partícula, la velocidad instantánea de la partícula en el tiempo t_1 se define como:

$$V_i(t_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$

En Economía.

Si $y = c(x)$ es la ecuación costo total al producir x artículos de cierta mercancía, EL COSTO MARGINAL (CM) cuando $x = x_1$, se define como:

$$CM(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x_1 + h) - C(x_1)}{h}$$

A pesar de sus orígenes distintos, las expresiones

$$m(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$V_i(t_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$

y

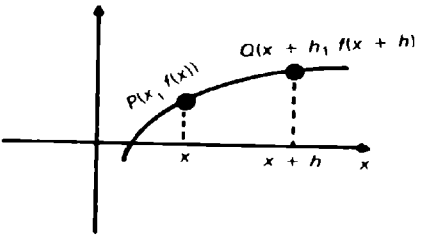
$$CM(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x_1 + h) - C(x_1)}{h}$$

son de la misma forma y pueden aparecer en otras situaciones, por lo cual se le da un nombre en especial en el Cálculo.

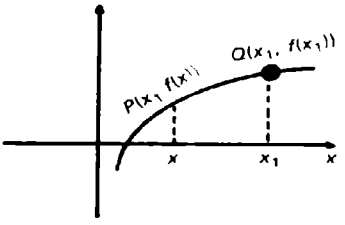
Definición. Sea f: $R \to R$ la DERIVADA de la función $f(x)$, es aquella función denotada por $f(x)$ tal que su valor de función en cualquier número x en el dominio de $f(x)$ está dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

si este límite existe.



Si en la abscisa del valor de Q la denotamos por x_1 en lugar de $x + h$, tendríamos:



la definición de derivada en el valor de x_1 podríamos reescribirla como:

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Observaciones.

a) $f'(x)$ es una nueva función, y al evaluarla en un valor del dominio, se obtendrá un número que puede representar la Pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en ese punto o si $f(x)$ es la ecuación de movimiento de una partícula $f'(x)$ evaluada para un tiempo t_0, representará la velocidad instantánea en t_0 o si $f(x)$ es la ecuación Costo Total, $f'(x)$ evaluada en $x = x_1$ representará el Costo Marginal x_1.

b) La derivada de una función se puede denotar también como:

$$D_x f(x),\ D_x Y,\ Y',\ dx/dy.$$

Ejemplos.

3. Obtener la derivada de la función

$$f(x) = 2x^2 + x - 1$$

obtendremos primero $f(x + h)$

$$f(x + h) = 2(x + h)^2 + (x + h) - 1$$
$$= 2(x^2 + 2xh + h^2) + x + h - 1$$
$$f(x + h) = 2x^2 + 4xh + h^2 + x + h - 1$$

ahora:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2x^2 + 4xh + h^2 + x + h - 1) - (2x^2 + x - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2 + h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4x + 2h + 1)$$

$$= 4x + 1$$

o sea: $f'(x) = 4x + 1$

4. Obtener la derivada de la función

$$f(x) = \frac{x + 2}{1 - x}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x + h + 2}{1 - (x + h)} - \dfrac{x + 2}{1 - x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x + h + 2}{1 - x - h} - \dfrac{x + 2}{1 - x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{(1 - x)(x + h + 2) - (x + 2)(1 - x - h)}{(1 - x - h)(1 - x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{(x + h + 2 - x^2 - xh - 2x) - (x - x^2 - xh + 2 - 2x - 2h)}{(1 - x - h)(1 - x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{h + 2h}{(1 - x - h)(1 - x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3h}{(1 - x - h)(1 - x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3}{(1 - x - h)(1 - x)}$$

$$= \frac{3}{(1 - x)^2}$$

o sea:

$$f'(x) = \frac{3}{(1 - x)^2}$$

5. Obtener la derivada de la función:

$$f(x) = x^{1/3}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^{1/3} - x^{1/3}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[(x + h)^{1/3} - x^{1/3}][(x + h)^{2/3} + (x + h)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3}]}{h[(x + h)^{2/3} + (x + h)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3}]}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h[(x + h)^{2/3} + (x + h)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3}]}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h[(x + h)^{2/3} + (x + h)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3}]}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+0)^{2/3} + (x+0)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3}}$$

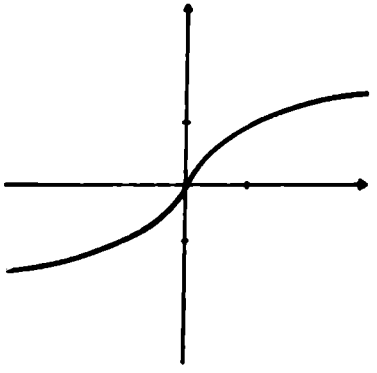
$$f'(x) = \frac{1}{(x)^{2/3} + (x)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^{2/3} + x^{2/3} + x^{2/3}} = \frac{1}{3\,x^{2/3}}$$

o sea que:

$$f'(x) = \frac{1}{3\,x^{2/3}}$$

La gráfica de la función es:



La función está definida para toda $x \in$ Reales, en particular $f(0) = 0$, sin embargo, $f'(0)$ no existe. La recta tangente a $f(x) = x^{1/3}$ en el valor de $x = 0$ sí existe y es $x = 0$

Definición. La función f se dice que es DERIVABLE de x_1, si $f'(x_1)$ existe.

Definición. La función f se dice que es DERIVABLE, si es derivable en todo número de su dominio.

Ejercicio.

En los problemas del 1 al 18, obtener la derivada de la función dada, utilizando la definición.

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = -1/2$
3. $f(x) = x$
4. $f(x) = 2x - 3$
5. $f(x) = (2/3)x - 1$
6. $f(x) = x^2$
7. $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$
8. $f(x) = 3x^2 - 5x^3$
9. $f(x) = \dfrac{2}{x}$
10. $f(x) = \dfrac{5}{x+2}$
11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
12. $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$
13. $f(x) = \dfrac{x+4}{1-x}$
14. $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$
15. $f(x) = \sqrt{x-2}$
16. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$
17. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-2}}$
18. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$

En los problemas del 19 al 23, obtener la derivada de la función para el valor de x que se indica.

19. $f(x) = 2x + 7$, en $x = 1$
20. $f(x) = 3x^2 + 2$, en $x = 2$
21. $f(x) = 3$, en $x = -1$
22. $f(x) = x^3$, en $x = -2$
23. $f(x) = 1/\sqrt{x}$, en $x = 1$

En los problemas del 24 al 28, hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto dado.

24. $f(x) = 2x^3 + 1$, en $(1, 3)$
25. $f(x) = 8x^2 - 2x + 3$, en $(0, 3)$
26. $f(x) = 1/x$, en $(1, 1)$
27. $f(x) = \sqrt{x}$, en $(4, 2)$
28. $f(x) = -1$, en $(2, -1)$

Sección 12.6

TEOREMAS DE DERIVADAS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Enunciar y demostrar los teoremas referentes a la derivada de:

   a) función constante.
   b) función identidad.
   c) función suma.
   d) función producto.
   e) función constante.
   f) funciones trigonométricas.

2. Obtener la derivada de una función, utilizando los teoremas del objetivo anterior.

Es necesario conocer y comprender la definición de derivada, pues sirviéndonos de ella podemos calcular la derivada de cualquier función, mediante fórmulas que encontraremos a continuación.

Teorema 1.

Si $f(x) = C$ (C una constante) para toda x, entonces:

$f'(x) = 0$

Demostración.

Si $f(x) = C$ entonces $f(x + h) = C$.

Así:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} (0) = 0$$

es decir:

$$f'(x) = 0$$

Observación.

Este teorema nos dice que la derivada de una función constante es cero, es decir:

$$D_x(C) = 0$$

Ejemplos.

1. Si $f(x) = 2$ entonces $f'(x) = 0$
2. Si $f(x) = -5$ entonces $f'(x) = 0$
3. Si $f(x) = 1/3$ entonces $f'(x) = 0$
4. Si $f(x) = (-0.09)$ entonces $f'(x) = 0$

Teorema 2.

Si $f(x) = x^n$. n es un entero positivo

entonces:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Demostración.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} h + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} h + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1} \right]$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1}$$

Es decir:

$$D_x (x^n) = nx^{n-1}$$

Observación.

El teorema anterior se demostró para n, donde n es un número entero positivo. Si n es un NÚMERO RACIONAL positivo, se puede demostrar por inducción matemática que el teorema sigue siendo válido. Es decir:

$D_x (x^R) = Rx^{R-1}$ donde R es un número Racional positivo.

Ejemplos.

5. Si $f(x) = x$ entonces $f'(x) = 1x^{1-1} = 1$
6. Si $f(x) = x^2$ entonces $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$
7. Si $f(x) = x^5$ entonces $f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$
8. Si $f(x) = x^7$ entonces $f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$
9. Si $f(x) = x^{1/2}$ entonces $f'(x) = (1/2)x^{(1/2)-1} = (1/2)x^{-1/2}$
10. Si $f(x) = x^{3/5}$ entonces $f'(x) = (3/5)x^{(3/5)-1} = (3/5)x^{-2/5}$

Teorema 3.

Si $g(x) = Cf(x)$, C una constante, entonces

$g'(x) = Cf'(x)$, si $f'(x)$ existe.

Demostración.

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{Cf(x + h) - Cf(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (C) \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (C) \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = C \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= C \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = C f'(x)$$

así $g'(x) = Cf'(x)$.

Observación. En el teorema anterior, si $f(x) = Cx^n$ donde n es un número racional positivo y C una constante, tenemos que:

$$f'(x) = Cnx^{n-1}$$

es decir:

$$D_x (Cx^n) = Cnx^{n-1}$$

Ejemplos.

11. Si $f(x) = 2x$ entonces $f'(x) = 2(1x^{1-1}) = 2(1) = 2$
12. Si $f(x) = 3x^2$ entonces $f'(x) = 3(2x^1) = 6x$
13. Si $f(x) = -4x^5$ entonces $f'(x) = (-4)(5x^4) = -20x^4$
14. Si $f(x) = (1/2)x^6$ entonces $f'(x) = (1/2)(6x^5) = 3x^5$
15. Si $f(x) = 2x^{1/2}$ entonces $f'(x) = (2)((1/2))x^{-1/2}) = x^{-1/2}$
16. Si $f(x) = -(3/5)x^{3/5}$ entonces $f'(x) = (-3/5)((3/5)x^{-2/5} = (-9/25)x^{-2/5}$

Teorema 4.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones tales que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces:

$$D_x [f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x).$$

Demostración.

Sea $S(x) = f(x) + g(x)$

y $S(x + h) = f(x + h) + g(x + h)$

así:

$$D_x [f(x) + g(x)] = S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x + h) - S(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x + h) + g(x + h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x + h) - f(x)] + [g(x + h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x).$$

Es decir:

$$D_x [f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

Observaciones.

a) $D_x [f(x) - g(x)] = D_x [f(x) + (-1) g(x)]$
$= D_x f(x) + D_x [(-1) g(x)]$
$= D_x f(x) + (-1) D_x g(x)$
$= D_x f(x) - D_x g(x)$

Es decir:

$$D_x [f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$$

b) Por inducción matemática se puede establecer que para toda n, donde n es un número natural

$$D_x [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)] =$$

$$= D_x f_1(x) + D_x f_2(x) + \ldots + D_x f_n(x).$$

Ejemplos.

17. Si $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$
$f'(x) = 3(2x) - 2(1) + 0$
$f'(x) = 6x - 2$

18. Si $f(x) = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x - 1$

$f'(x) = 3(1/3)x^2 - 2(1/2)x + 1 - 0$
$f'(x) = x^2 - x + 1$

19. Si $f(x) = 7x^{1/7} - (2/5) x^{5/3} + 1/3$

$$f'(x) = 7 \left(\frac{1}{7} x^{-6/7}\right) - \frac{2}{5} \left(\frac{5}{3} x^{2/3}\right) + 0$$

$$f'(x) = x^{-5/2} - (2/3)\,x^{-3/2}$$

20. Si $f(x) = \dfrac{1}{2}\,x^{7/5} - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}$

$$f(x) = (1/2)\,x^{7/5} - x^{2/3} + x^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}\,x^{2/5}\right) - \frac{2}{3}\,x^{-1/3} + \frac{1}{2}\,x^{-1/2}$$

$$f'(x) = \frac{7}{10}\,x^{2/5} - \frac{2}{3}\,x^{-1/3} + \frac{1}{2}\,x^{-1/2}$$

Teorema 5.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones cuyas derivadas existen, entonces:

$$D_x\,[f(x)\,g(x)] = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x)$$

Demostración.

Sea $P(x) = f(x)\,g(x)$

y $P(x + h) = f(x + h)\,g(x + h)$

así:

$$D_x\,[f(x)\,g(x)] = P'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{P(x + h) - P(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h)\,g(x + h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

Si restamos y sumamos en el numerador $f(x + h)\,g(x)$ tenemos:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h)\,g(x + h) - f(x + h)\,g(x) + f(x + h)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x + h)\,g(x + h) - f(x + h)\,g(x)] + [f(x + h)\,g(x) - f(x)\,g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x + h)\,[g(x + h) - g(x)]}{h} + \frac{g(x)\,[f(x + h) - f(x)]}{h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h)\,[g(x + h) - g(x)]}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x)\,[f(x + h) - f(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x+0)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$
$$= f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

Es decir:

$$D_x\,[f(x)\,g(x)] = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x)$$

Ejemplos.

21. Si $f(x) = (7x^3)(3x^2 - 5x + 3)$
$f'(x) = (7x^3)(6x - 5) + (3x^2 - 5x + 3)(21x^2)$
$= 42x^4 - 35x^3 + 63x^4 - 101x^3 + 61x^2$
$= 105x^4 - 136x^3 + 61x^2$

22. Si $f(x) = (8x - 3)(2x^2 + 9)$
$f'(x) = (8x - 3)(4x) + (2x^2 + 9)(8)$
$= 32x^2 - 12x + 16x^2 + 172$
$= 48x^2 - 12x + 72$

23. Si $f(x) = (7x^4 - 12x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 - 5x + 1)$
$f'(x) = (7x^4 - 12x^2 - 1)(3x^2 + 4x - 5) + (x^3 + 2x^2 - 5x + 1)\cdot(28x^3 - 24x)$

24. Si $f(x) = (2x + 5)(x^5 - 4x + 3x^3 - 2x^2 + x - 1)$
$f'(x) = (2x + 5)(5x^5 - 16x^3 + 9x^2 - 4x + 1) +$
$(x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1)(2)$

Teorema 6.

Si $f(x)$ y $g(x)$ sus funciones donde $g(x) \neq 0$ y cuyas derivadas existen, entonces:

$$D_x\,[f(x)/g(x)] = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Demostración.

Sea $C(x) = f(x)/g(x)$, $g(x) \neq 0$

y $C(x + h) = f(x + h)/g(x + h)$

así:

$$D_x [f(x)/g(x)] = C'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x + h) - C(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x + h)}{g(x + h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x + h)\, g(x) - f(x)\, g(x + h)}{g(x + h)\, g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h)\, g(x) - f(x)\, g(x + h)}{h\, g(x + h)\, g(x)}$$

Sumaremos y restaremos en el numerador $f(x)\, g(x)$, así tenemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h)\, g(x) - f(x)\, g(x) - f(x)\, g(x + h) + f(x)\, g(x)}{h\, g(x + h)\, g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x)\, [f(x + h) - f(x)] - f(x)\, [g(x + h) - g(x)]}{h\, g(x + h)\, g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{g(x)\, [f(x + h) - f(x)]}{h\, g(x + h)\, g(x)} - \frac{f(x)\, [g(x + h) - g(x)]}{h\, g(x + h)\, g(x)} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x)}{g(x + h)\, g(x)} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$- \lim_{h \to 0} \frac{f(x)}{g(x + h)\, g(x)} \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x)}{g(x + h)\, g(x)} \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$- \lim_{h \to 0} \frac{f(x)}{g(x + h)\, g(x)} \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

$$= \frac{g(x)}{g(x + 0)\, g(x)} f'(x) - \frac{f(x)}{g(x + 0)\, g(x)} g'(x)$$

$$= \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Es decir:

$$D_x [f(x)/g(x)] = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejemplos.

25. Si $f(x) = \dfrac{8x^3}{4x^2 - 2x + 5}$

$$f'(x) = \frac{(4x^2 - 2x + 5)(24x^2) - (8x^3)(8x - 2)}{(4x^2 - 2x + 5)^2}$$

26. Si $f(x) = \dfrac{5x - 9}{1 - 2x}$

$$f'(x) = \frac{(1 - 2x)(5) - (5x - 9)(2)}{(1 - 2x)^2}$$

$$= \frac{5 - 10x + 10x - 18}{(1 - 2x)^2} = \frac{-13}{(1 - 2x)^2}$$

27. Si $f(x) = \dfrac{5x^4 - 1}{x^2 - 2x + 5}$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 5)(20x^3) - (5x^4 - 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 5)^2}$$

$$= \frac{20x^5 - 40x^4 + 100x^3 - 10x^5 + 10x^4 + 2x - 2}{(x^2 - 2x + 5)^2}$$

$$= \frac{10x^5 - 30x^4 + 100x^3 + 2x - 2}{(x^2 - 2x + 5)^2}$$

28. Si $f(x) = \dfrac{2}{5x^4 - 12x^3 + 3x^2 - x + 1}$

$$f'(x) = \frac{(5x^4 - 12x^3 + 3x^2 - x + 1)(0) - 2(20x^3 - 36x^2 + 6x - 1)}{(5x^4 - 12x^3 + 3x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{-2(20x^3 - 36x^2 + 6x - 1)}{(5x^4 - 12x^3 + 3x^2 - x + 1)^2}$$

Teorema 7.

Si n es un racional positivo, tenemos que:

$$D_x(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

Demostración.

$$D_x(x^{-n}) = D_x[1/x^n]$$

$$= \frac{x^n(0) - (1)(nx^{n-1})}{x^{2n}}$$

$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1}x^{-2n} = -nx^{n-1-2n}$$

es decir:

$$D_x(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

Observación. Si R es un Racional positivo o negativo:

$$D_x x^R = Rx^{R-1}$$

y

$$D_x(Cx^R) = CRx^{R-1}$$

Ejemplos.

29. Si $f(x) = 1/x^3$ ó $f(x) = x^{-3}$

$$f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$$

30. Si $f(x) = 2/x^5$ ó $f(x) = 2x^{-5}$

$$f'(x) = (2)(-5)(x^{-5-1}) = -10x^{-6}$$

31. Si $f(x) = -5/x^4$ ó $f(x) = -5x^{-4}$

$$f'(x) = (-5)(-4)(x^{-4-1}) = 20x^{-5}$$

32. Si $f(x) = -3/x$ ó $f(x) = -3x^{-1}$

$$f'(x) = (-3)(-1)x^{-1-1} = 3x^{-2}$$

En los siguientes ejemplos utilizaremos alguno o algunos de los teoremas anteriores o los combinaremos.

Ejemplos.

33. Si $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2)x - \frac{1}{3}(3)x^2$$

$$= x - x^2$$

34. Si $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + (1/2)x - 1/3x - 2/x^2$

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - (1/2)x - (1/3)x^{-1} - 2x^{-2}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 4x + (1/2) + (1/3)x^{-2} + 4x^{-3}$$

35. Si $f(x) = \frac{2x-3}{5x-1}(x^2-1)$

$$f'(x) = \frac{2x-3}{5x-1}(2x) - (x^2-1)\frac{(5x-1)(2)-(2x-3)(5)}{(5x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-3)(2x)}{5x-1} - \frac{(x^2-1)(10x-2-10x+15)}{(5x-1)^2}$$

$$= \frac{4x^2-6x}{5x-1} - \frac{(x^2-1)(13)}{(5x-1)^2}$$

36. Si $f(x) = \frac{(x^3-1)(2x^2-5x)}{x^6-3}$

$$f'(x) = \frac{(x^6-3)[(x^3-1)(4x-5)+(2x^2-5x)(3x^2)]-(x^3-1)(2x^2-5x)(6x^5)}{(x^6-3)^2}$$

$$(x^6 \quad 3)\,[4x^4 \quad 5x^3 \quad 4x \quad 5 \quad 6x^4 \quad 15x^3] \quad [2x^5 \quad 5x^4 \quad 2x^2 \quad 5x][10x^5]$$
$$(x^6 \quad 3)^2$$

$$(x^6 \quad 3)\,(10x^4 \quad 20x^3 \quad 4x \quad 5) \quad (12x^{10} \quad 30x^9 \quad 12x^7 \quad 30x^6)$$
$$(x^6 \quad 3)^2$$

$$2x^{10} + 10x^9 + 8x^7 \quad 25x^6 \quad 30x^4 \quad 60x^3 + 12x \quad 15$$
$$(x^6 \quad 3)^2$$

37. Si $f(x) = (x^2 - 2)(2x + 3)(5x - 1)$

$$f(x) = [(x^2 - 2)(2x + 3)](5x - 1)$$

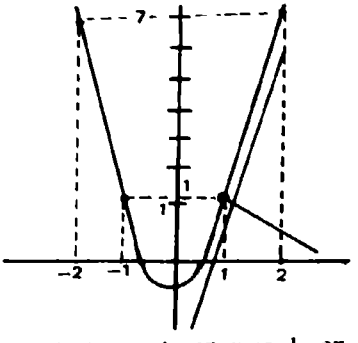
$$f'(x) = [(x^2 - 2)(2) + (2x + 3)(2x)](5x - 1) + [(x^2 - 2)(2x + 3)](5)$$

$$= [2x^4 - 4 + 4x^2 + 6x](5x - 1) + (2x^3 + 3x^2 - 4x - 6)(5)$$

$$= 30x^3 - 6x^2 + 30x^2 - 6x - 20x + 4 + 10x^3 + 15x^2 - 20x - 30$$

$$= 40x^3 + 39x^2 - 46x - 26$$

38. Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de la función $y = 2x^2 - 1$ en el punto $P(1, 1)$.



La pendiente de la recta tangente en $x = 1$, en $m_t = f'(x)$ si $x = 1$, por lo que primero obtendremos la derivada.

$$\text{si } f(x) = 2x^2 - 1 \text{ entonces } f'(x) = 4x$$

$$\text{y si } x = 1 \text{ entonces } f'(1) = 4(1) = 4$$

Por lo que la pendiente de la recta tangente en el punto (1, 1) es $m_t = 4$ y la ecuación de la recta es:

$$y - 1 = 4\,(x - 1) \text{ ó } y - 4x + 3 = 0$$

La pendiente de la recta normal (m_n) es el inverso de la pendiente de la recta tangente y de signo contrario, por lo que:

$$m_n = -1/4$$

y la ecuación de la recta normal es:

$$y - 1 = (-1/4)\,(x - 1) \text{ ó } 4y + x - 5 = 0$$

Derivadas de las funciones trigonométricas.

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, obtendremos su derivada utilizando la definición de derivada.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cos\left(\dfrac{x + h + x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{x + h - x}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cos\left(\dfrac{2x + h}{2}\right) \operatorname{sen}(h/2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos(x + h/2) \frac{\operatorname{sen} h/2}{h/2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos(x + h/2) \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h/2}{h/2}$$

$$= \cos(x + 0/2)\,(1)$$

$$= \cos x$$

así:

De manera similar se puede demostrar que:

$$\boxed{D_x (\cos x) = \operatorname{sen} x}$$

Las restantes funciones trigonométricas se obtienen utilizando teoremas de derivadas y las derivadas de sen x y cos x.

$$D_x (\tan x) = D_x \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) = \frac{\cos x (\cos x) - \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{D_x (\tan x) = \sec^2 x}$$

$$D_x (\cot x) = D_x \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x) - \cos x (\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\boxed{D_x (\cot x) = -\csc^2 x}$$

$$D_x (\sec x) = D_x \left(\frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= \frac{(\cos x)(0) - (1)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{+\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \tan x \sec x$$

$$\boxed{D_x (\sec x) = \sec x \tan x}$$

$$D_x (\csc x) = D_x \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x (0) - (1) (\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\boxed{D_x (\csc x) = -\csc x \cot x}$$

Ejemplos.

39. Si $f(x) = x \operatorname{sen} x$
$f'(x) = x (\cos x) + \operatorname{sen} x (1)$
$f'(x) = x \cos x + \operatorname{sen} x$

40. Si $f(x) = (\tan x) (\operatorname{sen} x - x^2)$
$f'(x) = (\tan x) (\cos x - 2x) + (\operatorname{sen} x - x^2) (\sec^2 x)$
$= \operatorname{sen} x - 2x \tan x + \tan x \sec x - x^2 \sec^2 x$

41. Si $f(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x - \tan x}$

$$f'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x - \tan x) (-\operatorname{sen} x) - \cos x (\cos x - \sec^2 x)}{(\operatorname{sen} x - \tan x)^2}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \tan x - \cos^2 x + \cos x \sec^2 x}{(\operatorname{sen} x - \tan x)^2}$$

$$= \frac{-(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) + \operatorname{sen} x \tan x + \cos x \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} \right)}{(\operatorname{sen} x - \tan x)^2}$$

$$= \frac{-1 + \operatorname{sen} x \tan x + \sec x}{(\operatorname{sen} x - \tan x)^2}$$

Ejercicio.

Obtener la derivada de cada una de las siguientes funciones. Utilizar los teoremas de esta sección.

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = -1/2$
3. $f(x) = -3$
4. $f(x) = .01$
5. $f(x) = 6x^3 - 4x^2 + 12x - 1$
6. $f(x) = 5x^4 - 3x + 3$
7. $f(x) = (1/9)\,x^9 - (1/5)\,x^5$
8. $f(x) = x^6 - 2x^3 + x - 1$
9. $f(x) = (1/4)\,x^4 - (3/2)\,x^2 + x + 3$
10. $f(x) = 8x^8 - (2/5)\,x^{5/2} + 1/5$
11. $f(x) = (1/3)\,x^{8/7} - \sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2}$
12. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1 + 3x^{-1} - 5x^{-2} + 6x^{-3}$
13. $f(x) = (1/x^2) - (3/x^3) - (5/x^4)$
14. $f(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$
15. $f(x) = x^{100} - 2x + 3$
16. $f(x) = 3\sqrt{x} + 4\sqrt{x^3} + 2x$
17. $f(x) = 2\sqrt[3]{x} - 4\sqrt{x} - 9x$
18. $f(x) = (5/3)\,x^{-2} - x^{6/7}$
19. $f(x) = \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{x^2}{5} + 5$
20. $f(x) = \dfrac{6}{x} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} - x^{-4}$
21. $f(x) = x^{-3} + 3x^{-4} - 2x^{-1} + x^{-2} - x^{-1}$
22. $f(x) = 5\,(x^2 - x)$
23. $f(x) = -8\,(5x^3 - 20x^2 + 3x - 1)$
24. $f(x) = 4x^2\,(7x^2 - 9x)$
25. $f(x) = (x - 1)\,(x + 1)$
26. $f(x) = (3x^2 + 6)\,(5x - 2)$
27. $f(x) = (3x^3 - 1)\,(4x^2 + 3x)$
28. $f(x) = (7x + 3)^2$
29. $f(x) = (x - 2)\,(x^2 + 2x + 4)$
30. $f(x) = (x^2 + 6x - 2)\,(x^3 + 6x + 1)$
31. $f(x) = (x - 2)\,(x + 1)\,(2x^2 - 1)$
32. $f(x) = (2x - 3)\,(6x - 7)\,(5x - 6)$

33. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

34. $f(x) = \dfrac{x^2}{5x - 1}$

35. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 10x}$

36. $f(x) = \dfrac{5}{9x^2 + 6x - 1}$

37. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{3x - 4}$

38. $f(x) = \dfrac{8x}{1 - 3x^3}$

39. $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x^3 + 27}$

40. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3 + 2x^2 - 5x - 3}$

41. $f(x) = \dfrac{5x - 1}{x + 10}(4x + 2)$

42. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4}(x^2 + 2x - 1)$

43. $f(x) = \dfrac{(2x - 1)(5x + 9)}{x^3 - 1}$

44. $f(x) = \dfrac{6x + 10}{(x + 1)(2x^3 - 2x + 3)}$

45. $f(x) = \dfrac{(x + 3)(5x^3 - 3x^2 + 8x - 1)}{x^5 - 1}$

46. Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación

$$y = 3x^2 - 2$$

en el punto: i) $P(0, -2)$ ii) $P(1, 1)$

47. Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación

$$y = \frac{1}{x - 1}$$

en el punto: i) $P(0, -1)$ ii) $P(2, 1)$

48. Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación

$$y = \frac{x - 1}{x + 3}$$

cuando: i) $x = 0$ ii) $x = -4$

49. Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación

$$y = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

cuando: i) $x = 1$ ii) $x = -1$

50. Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación

$$y = \frac{2}{x^2 - 1}$$

en el punto: i) $P(2, 2/3)$ ii) $P(-2, 2/3)$.

Para las funciones dadas en los ejercicios del 51 al 64, obtener la derivada de $f(x)$.

51. $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$

52. $f(x) = 5 \tan x \sec x$

53. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

54. $f(x) = 3x^2 \cos x$

55. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

56. $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$

57. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

58. $f(x) = x \operatorname{sen} x - \cos x$

59. $f(x) = x \cos x + \operatorname{sen} x$

60. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$

61. $f(x) = \dfrac{\tan x}{\cot x}$

62. $f(x) = \cot x \csc x$

63. $f(x) = (x - 1) \csc x$

64. $f(x) = x^3 \sec x$

65. Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, obtener la Ecuación de la recta tangente y normal a $f(x)$ cuando $x = \pi/4$.
66. Si $f(x) = \cos x$, obtener la Ecuación de la recta tangente y normal a $f(x)$ en el punto $(\pi/2, 0)$.
67. Si $f(x) = \tan x$, obtener la Ecuación de la recta tangente y normal a $f(x)$ cuando $x = \pi$.

Sección 12.7

REGLA DE LA CADENA PARA DERIVADAS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Enunciar el teorema, regla de la cadena para derivadas.
2. Empleando el teorema de regla de la cadena, obtener la derivada de una función compuesta.

El siguiente teorema conocido como Regla de la Cadena, nos servirá para obtener la derivada de una función compuesta.

Teorema "Regla de la Cadena".

Si y es una función de u, definida por $y = f(u)$ y $D_u y$, existe y si u es una función de x definida por $u = g(x)$ y $D_x u$ existe, entonces y es una función de x y $D_x y$ existe y está definida por:

$$D_x y = D_u y \, D_x u$$

Ejemplos.

1. $y = u^2$ y $u = 3x^2 - 1$
   $D_u y = 2u \quad D_x u = 6x$

$$D_x y = D_u y \, D_x u$$
$$D_x y = (2u)(6x)$$

sustituyendo u por su valor, tenemos:

$$D_x y = 2(3x^2 - 1)(6x)$$
$$D_x y = 12x(3x^2 - 1)$$

Es decir, si: $y = (3x^2 - 1)^2$ entonces $D_x y = 12x(3x^2 - 1)$

2. $y = u^5 \quad u = g(x) = (5x + 3)$
$D_u y = 5u^4 \quad D_x u = 5$

$$D_x y = D_u y \, D_x u$$
$$D_x y = 5u^4 (5)$$

y sustituyendo u por su valor, tenemos:

$$D_x y = 5(5x + 3)^4 (5)$$
$$D_x y = 25(5x + 3)^4$$

Es decir, si $y = (5x + 3)^4$, entonces:

$$D_x y = D_x(u^5) = D_x(5x + 3)^5 = 5(5x + 3)^4 (5) = 25(5x + 3)^4$$

3. Si $y = u^{1/2} \quad u = x^3 - 1$

y

$$D_u y = (1/2)u^{-1/2} \quad D_x u = 3x^2$$

entonces: $D_x y = D_u y \, D_x u$
$$D_x y = (1/2)\, u^{-1/2} (3x^2)$$
$$D_x y = \frac{3x^2}{2u^{1/2}}$$

y sustituyendo u por su valor, tenemos:

$$D_x y = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}$$

Es decir: si $y = (x^3 - 1)^{1/2}$, entonces:

$$D_x y = D_x(u^{1/2}) = D_x(x^3 - 1)^{1/2} = D_x(\sqrt{x^3 - 1})$$

$$D_x y = (1/2)(x^3 - 1)^{-1/2}(3x^2) = 3x^2/2(x^3 - 1)^{1/2}$$
$$D_x y = 3x^2/2\sqrt{x^3 - 1}$$

4. Si $y = 5u^{3/5}$ $u = x^2 + 3$

y

$$D_u y = 3u^{-2/5} \quad D_x u = 2x$$

entonces: $D_x y = D_u y\, D_x u = (3u^{-2/5})(2x)$

$$D_x y = \frac{6x}{u^{2/5}} = \frac{6x}{\sqrt[5]{u^2}} = \frac{6x}{\sqrt[5]{(x^2 + 3)^2}}$$

es decir, si: $y = 5(x^2 + 3)^{3/2}$, entonces:

$$D_x y = D_x (5u^{3/5}) = D_x (5(x^2 + 3)^{3/5}) = (3/5)5(x^2 + 3)^{-2/5}(2x)$$

$$D_x y = \frac{6x}{(x^2 + 3)^{2/5}} = \frac{6x}{\sqrt[5]{(x^2 + 3)^2}}$$

TEOREMA 2.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones tales que $g(x) = [f(x)]^n$, n es cualquier número y si $f'(x)$ existe, entonces:

$$D_x[g(x)] = D_x[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x).$$

Demostración.

Si $y = u^n$, donde $u = f(x)$ y $D_u y = nu^{n-1}$ y $D_x f(x) = f'(x)$ entonces, por el teorema de regla de la cadena, $D_x y = D_u y\, D_x u$, y así:

$$D_x y = nu^{n-1}(f'(x)) = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$$

Es decir:

$$D_x [f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$$

y

$$D_x c[f(x)]^n = nc[f(x)]^{n-1} f'(x)$$

Ejemplos.

5. Si $f(x) = (3x^2 + 5x - 2)^4$

$$f'(x) = 3(3x^2 + 5x - 2)^2 (6x + 5)$$

$$f'(x) = (18x + 15)(3x^2 + 5x - 2)^2$$

6. Si $f(x) = \sqrt[4]{(6x^2 - 8x + 1)}$

$$f(x) = (6x^2 - 8x + 1)^{1/4}$$

$$f'(x) = (1/4)(6x^2 - 8x + 1)^{-3/4}(12x - 8)$$

$$f'(x) = \frac{12x - 8}{4(6x^2 - 8x + 1)} = \frac{3x - 2}{(6x^2 - 8x + 1)}$$

7. Si $f(x) = \frac{2}{5x^2 + 3x - 1}$

$$f(x) = 2(5x^2 + 3x - 1)^{-1}$$

entonces: $f'(x) = (-1)(2)(5x^2 + 3x - 1)^{-2}(10x + 3)$

$$f'(x) = \frac{-2(10x + 3)}{(5x^2 + 3x - 1)^2}$$

8. $f(x) = \sqrt{5x^2 - 2x + 7}$

$$f(x) = (5x^2 - 2x + 7)^{1/2}$$

entonces: $f'(x) = (1/2)(5x^2 - 2x + 7)^{-1/2}(10x - 2)$

$$f'(x) = \frac{10x - 2}{2\sqrt{5x^2 - 2x + 7}}$$

$$f'(x) = \frac{5x - 1}{\sqrt{5x^2 - 2x + 7}}$$

9. Si $f(x) = \frac{x^4}{\sqrt[3]{(6x - 2)^2}}$

$$f(x) = \frac{x^4}{(6x - 2)^{2/3}} = x^4 (6x - 2)^{-2/3}$$

Utilizando la derivada de un producto tenemos:

$$f'(x) = x^4 [(-2/3)(6x - 2)^{-5/3}(6)] + (6x - 2)^{-2/3}(4x^3)$$

$$f'(x) = \frac{-4x^4}{(6x - 2)^{5/3}} + \frac{4x^3}{(6x - 2)^{2/3}}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^4}{(6x - 2)\sqrt[3]{(6x - 2)^2}} + \frac{4x^3}{\sqrt[3]{(6x - 2)^2}}$$

10. Si $f(x) = (3x - 8)^2 (5x^2 - 2)^3$

$$f'(x) = (3x - 8)^2\,[3(5x^2 - 2)^2\,10x] + (5x^2 - 2)^3\,[2\,(3x - 8)\,3]$$

11. $$f(x) = \frac{(5x - 9)^3}{(2 - 3x)^3}$$

$$f'(x) = \frac{(2 - 3x)^3[3(5x - 9)^2(5)] - (5x - 9)^3[3(2 - 3x)^2(-3)]}{[(2 - 3x)^3]^2}$$

$$= \frac{15\,(2 - 3x)^3\,(5x - 9)^2 - (-9)\,(5x - 9)^3\,(2 - 3x)^2}{(2 - 3x)^6}$$

$$= \frac{(2 - 3x)^2\,(5x - 9)^2\,[15(2 - 3x) - (-9)\,(5x - 9)]}{(2 - 3x)^6}$$

$$f'(x) = \frac{-51\,(5x - 9)^2}{(2 - 3x)^4}$$

12. Si $f(x) = [(12x - 9)\,(5x^{1/3} - x)]^3$

$$f'(x) = 3[(12x - 9)\,(5x^{1/3} - x)]^2\,[(12x - 9)\,((5/3)\,x^{-2/3} - 1) + (5x^{1/3} - x)\,(12)]$$

$$f'(x) = 3(12x - 9)^2\,(5x^{1/3} - x)^2\,(12x - 9)\left\{(5/3)\,x^{-2/3} - 1\right\} + 3(12x - 9)^2\,(5x^{1/3} - x)^2\,(5x^{1/3} - x)\,(12)$$

$$f'(x) = 3(12x - 9)^3\,(5x^{1/3} - x)^2\left\{(5/3)\,x^{-2/3} - 1\right\} + 36(12x - 9)^2\,(5x^{1/3} - x)^3$$

13. Si $f(x) = \sqrt{x^3 + \sqrt{x^2 - 1}}$

$$f(x) = (x^3 + (x^2 - 1)^{1/2})^{1/2}$$

$$f'(x) = (1/2)\,(x^3 + (x^2 - 1)^{1/2})^{-1/2}\left[3x^2 + (1/2)\,(x^2 - 1)^{-1/2}\,(2x)\right]$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{2\sqrt{x^3 + \sqrt{x^2 - 1}}}$$

14. Obtener la ecuación de la recta **tangente** y **normal** a la curva de la ecuación: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ cuando $x = 0$

Para obtener la pendiente de la recta tangente encontraremos la derivada de $f(x)$ cuando $x = 0$. Es decir, si $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ó $f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$

$$f'(x) = (1/2)(x^2 + 1)^{-1/2}(2x)$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

y si $x = 0$, entonces la pendiente de la recta tangente es:

$$m = f'(x) = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 1}} = 0$$

el punto donde es tangente es: P (0, 1), ya que si $x = 0$, entonces:

$$y = \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{0^2 + 1} = \sqrt{1} = 1$$

por lo que la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 1 = 0(x - 0)$$
$$y - 1 = 0$$
$$y = 1$$

La pendiente de la recta normal (m_n) es la inversa y de signo contrario de la pendiente de la recta tangente, por lo que:

$$m_n = \frac{-1}{m_t} = \frac{-1}{0}$$

no existe, por lo que la recta normal es paralela al eje y el ángulo de inclinación de la recta es de 90°, y pasa por el punto (0, 1), por lo que la recta normal tiene ecuación $x = 0$.

Ejercicios.

I. Obtener la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = (6x^2 - 7x + 1)^2$
2. $f(x) = 2(7 - 10x)^3$
3. $f(x) = (3x^2 - 6x + 1)^5$
4. $f(x) = (1/2)(1/x^2 - 1/x + 1/3)^4$
5. $f(x) = 5(2x^3 - 7x + 3)^{-3}$
6. $f(x) = (5x^4 + 3x^2 + 1)^{-4}$
7. $f(x) = (2x^2 - 1)^{1/4}$
8. $f(x) = \sqrt{5 - 3x^2}$
9. $f(x) = \sqrt[3]{(7x^2 + 8x + 9)^2}$
10. $f(x) = \sqrt[3]{5x^3 - 6x^2 + 8x - 1}$
11. $f(x) = \sqrt{3x^2} + \sqrt{1/3x^2}$
12. $f(x) = \sqrt{5/x} - \sqrt{4/x}$

13. $f(x) = (\sqrt{x} + x)^4$
14. $f(x) = (x^3/3 + x^2/2 - x)^{5/6}$
15. $f(x) = (4x^3 + 5)^4 (4x - 2)^3$
16. $f(x) = \sqrt{8x^2 + 5}\sqrt[3]{7x^3 - 1}$
17. $f(x) = (5x - 1)^{-1}(2x - 1)^{-2}$
18. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}\sqrt[3]{x^2 + 4}$
19. $f(x) = (x^{-1} + 6x^{-2})^{-1/2} (1 - x^{-2})^{-1/3}$
20. $f(x) = (4x + 3)^3 (x + 1)^{1/3}$
21. $f(x) = (x + 1)^3 (2x - 3)^2 (3x^2 - 5)^2$
22. $f(x) = (3x - 7)^3 (5x^3 + 4x^2 - 3x + 7)^2$
23. $f(x) = \dfrac{1}{6x^3 - x - 3}$
24. $f(x) = \dfrac{-3}{4x^2 + 8x - 1}$
25. $f(x) = \dfrac{2}{(5x^2 - 1)^2}$
26. $f(x) = \dfrac{1}{(5x + 9)^{3/2}}$
27. $f(x) = \dfrac{3x}{(x^2 + 2x - 1)^{1/3}}$
28. $f(x) = \dfrac{x^2}{(5x + 2)}$
29. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$
30. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x}}{\sqrt[3]{x - 4}}$
31. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 8x - 1}}{\sqrt{6x}}$
32. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{6x^3 - 2x^2}}$
33. $f(x) = \dfrac{(5x - 9)^{10}}{\sqrt[3]{x - 1}}$
34. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{x + 1}}$
35. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x + 4}}{\sqrt{3x - 4}}$
36. $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^3 - 1}}{\sqrt[4]{x^3 + 1}}$
37. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{(x^2 + 1)^3} (x + 4)^{1/3}$
38. $f(x) = (x^3 - x - 1)^{3/2} (x^2 + x + 1)^{1/3}$
39. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}$
40. $f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 3}$
41. $f(x) = \dfrac{(1 - 2x^2)^2}{(1 - 3x^3)^2}$
42. $f(x) = \dfrac{(x^2 - 10)^3}{(x^2 - 1)^2}$
43. $f(x) = \dfrac{(6x - 1)^2 (2x^2 + 5)^3}{(3x^2 + 1)^2}$
44. $f(x) = \dfrac{(3x + 9)^3}{(x^2 - 1)^{-4}}$
45. $f(x) = \left(\sqrt{x - 1/x} + 1\right)^2$
46. $f(x) = \sqrt{1 + (1 - x)^{1/2}}$
47. $f(x) = \sqrt{\sqrt[3]{x^4 - 1} - x^2}$

48. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}}$

II. Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto indicado.

1. $f(x) = \dfrac{1}{(2x - 1)^2}$, $P\ (0, 1)$

2. $f(x) = \sqrt{5 - x}$, $P\ (1, 2)$

3. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $P\ (0, 3)$

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $P\ (0, 1)$

5. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$, $P\ (0, -1)$

III. Obtener la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 2x^2 \operatorname{sen}^2 x$

2. $f(x) = \operatorname{sen}(2x + 5)$

3. $f(x) = \tan^2 (x^2 + 5x)$

4. $f(x) = \cos^2 x \cot 3x$

5. $f(x) = \dfrac{\tan 2x}{1 - \cot 2x}$

6. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

7. $f(x) = \operatorname{sen}^2 (3x - 2)$

8. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\sec 2x}$

9. $f(x) = 2 \tan (x/2) - x$

10. $f(x) = 2 \sec^2 \sqrt{x}$

11. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$

12. $f(x) = \sec(\csc 2x)$

13. $f(x) = \operatorname{sen} 3x \cos 4x$

14. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 3x}{\cos^2 2x}$

15. $f(x) = \dfrac{x + \operatorname{sen} 2x}{5 + \cos 3x}$

16. $f(x) = (\tan 2x + \cot 2x)^3$

17. $f(x) = \tan^3 x - \tan x^3$

18. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^4 (3x^2 + x)}$

19. $f(x) = (-1 + \operatorname{sen} 3x)^2$

20. $f(x) = x - \tan x/2$

Sección 12.8

DERIVACIÓN IMPLÍCITA Y DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Objetivos

Después de estudiar esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Dada una función, implícitamente obtener la derivada de y con respecto a x.
2. Obtener la derivada de orden n de una función dada.

Si y es una función definida por una expresión algebraica en términos de la variable x, se dice que f está definida EXPLÍCITAMENTE en términos de x.

Por ejemplo, las siguientes funciones están definidas explícitamente en términos de x.

$$f(x) = 6x^2 - x + 3 \quad \text{ó} \quad y = 6x^2 - x + 3$$
$$f(x) = \sqrt{x - 1} \quad \text{ó} \quad y = \sqrt{x - 1}$$
$$f(x) = 1/x \quad \text{ó} \quad y = 1/x$$

Sin embargo, no todas las funciones están definidas explícitamente. Por ejemplo, si tenemos la ecuación:

$$x^3 + 2x^2 = 3y^2 - y^3$$

no se puede resolver explícitamente para "y" como una función de x. Sin embargo, pueden existir una o más funciones f tales que si $y = f(x)$, la ecuación anterior se satisface, esto es, la ecuación:

$$x^3 + 2x^2 = 3[f(x)]^2 - [f(x)]^3$$

es verdadero para todos los valores x en el dominio de f. Y en este caso, se dice que la función f está definida IMPLÍCITAMENTE por la ecuación dada.

Usando la hipótesis de que la ecuación

$$x^3 + 2x^2 = 3[f(x)]^2 - [f(x)]^3$$

define a y como una función $f(x)$ que es derivable, podemos obtener la derivada de "y" con respecto a "x" por el proceso llamado DERIVACIÓN IMPLÍCITA.

Con los siguientes ejemplos, mostraremos el proceso de derivación implícita

Ejemplos.

Obtener $D_x y$ por derivación implícita si:

1. $x^3 + 2x^2 = 4y^2 - y^3$

Suponiendo que y es una función en x, tenemos:

$$x^3 + 2x^2 = 4[f(x)]^2 - [f(x)]^3$$

y para todos los valores de x, para los cuales $f(x)$ es derivable, podemos afirmar que:

$$D_x [x^3 + 2x^2] = D_x [4[f(x)]^2 - [f(x)]^3]$$

y derivando a ambos lados de la ecuación tenemos:

$$3x^2 + 4x = 8[f(x)] (f'(x)) - 3[f(x)]^2 f'(x)$$

Se observa que en el lado derecho usamos regla de la cadena, ya que $f(x)$ es una función.

El siguiente paso será despejar $f'(x)$ de la ecuación que se obtuvo al derivar:

$$3x^2 + 4x = 8(f(x)) f'(x) - 3[f(x)]^2 f'(x)$$

$$3x^2 + 4x = f'(x) [8f(x) - 3 [f(x)]^2]$$

$$\frac{3x^2 + 4x}{8f(x) - 3[f(x)]^2} = f'(x)$$

Como $f(x) = y$, haremos esta sustitución en la última ecuación, es decir:

$$\frac{3x^2 + 4x}{8y - 3y^2} = y' \text{ o } D_x y = \frac{3x^2 + 4x}{8y - 3y^2}$$

2. $2x^3y^2 - 6x^2 = 5 - 3y + 2y^2$

Suponiendo que existen una o más funciones derivables f, tales que si $y = f(x)$, la ecuación anterior se satisface, tenemos:

$$2x^3 [f(x)]^2 - 6x^2 = 5 - 3 [f(x)] + 2 [f(x)]^2$$

y

$$D_x [2x^3 [f(x)]^2 - 6x^2] = D_x [5 - 3[f(x)] + 2[f(x)]^2]$$

y derivando tenemos:

$$2x^3(3[f(x)]^2 f(x)) + [f(x)]^3 (6x^2) - 12x = [0 - 3f'(x) + 4[f(x)] f'(x)]$$

$$6x^3 [f(x)]^2 f'(x) + 6x^2 [f(x)]^3 - 12x = -3f'(x) + 4 f(x) f'(x)$$

$$6x^3 [f(x)]^2 f'(x) + 3f'(x) - 4f(x) f'(x) = 12x - 6x^2 [f(x)]^3$$

$$f'(x) [6x^3 [f(x)]^2 + 3 - 4f(x)] = 12x - 6x^2 [f(x)]^3$$

$$f'(x) = \frac{12x - 6x^2 [f(x)]^3}{6x^3 [f(x)]^2 + 3 - 4f(x)}$$

y como $y = f(x)$, entonces:

$$D_x y = \frac{12x - 6x^2 y^3}{6x^3 y^2 + 3 - 4y}$$

Observación. Al obtener la derivada por este proceso, hacemos la suposición de que $y = f(x)$ (y es una función) y sustituimos y por $f(x)$.

La sustitución la podemos evitar y proceder a derivar la expresión dada, pero se tiene que tener especial cuidado al derivar "y", ya que estamos suponiendo que es una función, es decir: $y = f(x)$.

En el ejemplo anterior, podemos proceder de la siguiente manera para obtener $D_x y$:

$$D_x [2x^3 y^3 - 6x^2] = D_x [5 - 3y + 2y^2]$$

$$2x^3 (3y^2 y') + y^3(6x^2) - 12x = 0 - 3y' + 4yy'$$

$$6x^3 y^2 y' + 3y' - 4yy' = 12x - 6x^2 y^3$$

$$y' [6x^3 y^2 + 3 - 4y] = 12x - 6x^2 y^3$$

$$y' = \frac{12x - 2x^3 y^3}{6x^3 y^2 + 3 - 4y}$$

o

$$D_x y = \frac{12x - 2x^3 y^3}{6x^3 y^2 + 3 - 4y}$$

3. $x/y - 5x = y$

Suponiendo que $y = f(x)$, es derivable, tenemos:

$$x/f(x) - 5x = f(x)$$

$$Dx [x/f(x) - 5x] = D_x [f(x)]$$

$$\frac{f(x)(1) - xf'(x)}{[f(x)]^2} - 5 = f'(x)$$

$$\frac{f(x)}{[f(x)]^2} - \frac{xf'(x)}{[f(x)]^2} - 5 = f'(x)$$

$$\frac{1}{[f(x)]} - 5 = f'(x) + \frac{xf'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$\frac{1}{f(x)} - 5 = f'(x)\left[1 + \frac{x}{[f(x)]^2}\right]$$

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - 5}{1 + \frac{x}{[f(x)]^2}} = f'(x)$$

Y como $y = f(x)$, tenemos:

$$\frac{1/y - 5}{1 + x/y^2} = y'$$

o

$$D_x y = \frac{1/y - 5}{1 + x/y^2} = \frac{(1 - 5y)/y}{(y^2 + x)/y^2} = \frac{y^2(1 - 5y)}{y(y^2 + x)} =$$

$$D_x y = \frac{y(1 - 5y)}{y^2 + x} = \frac{y - 5y^2}{y^2 + x}$$

Observación. Sin sustituir y por $f(x)$ en el primer paso del ejemplo anterior, tenemos:

$$x/y - 5x = y$$

$$D_x[x/y - 5x] = D_x[y]$$

$$\frac{y(1) - xy'}{y^2} - 5 = y'$$

$$\frac{y}{y^2} - \frac{xy'}{y^2} - 5 = y'$$

$$\frac{1}{y} - 5 = y' + \frac{xy'}{y^2}$$

$$\frac{1}{y} - 5 = y'\left[1 + \frac{x}{y^2}\right]$$

$$\frac{1/y - 5}{1 + x/y^2} = y'$$

$$\frac{y(1 - 5y)}{y^2 + x} = D_x y$$

4. $\sqrt{xy} = x\sqrt{y} = 1$

Suponiendo que $y = f(x)$, tenemos que:

$$D_x[\sqrt{xy} - x\sqrt{y}] = D_x[1]$$

$$(1/2)(xy)^{-1/2}[xy' + y(1)] - [x[(1/2)y^{-1/2}y'] + y^{1/2}(1)] = 0$$

$$\frac{xy' + y}{2(xy)^{1/2}} - \frac{xy'}{2y^{1/2}} - y^{1/2} = 0$$

$$\frac{xy'}{2(xy)^{1/2}} + \frac{y}{2(xy)^{1/2}} - \frac{xy'}{2y^{1/2}} - y^{1/2} = 0$$

$$\frac{xy'}{2\sqrt{xy}} - \frac{xy'}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y} - \frac{y}{2\sqrt{xy}}$$

$$y'\left[\frac{x}{2\sqrt{xy}} - \frac{x}{2\sqrt{y}}\right] = \sqrt{y} - \frac{y}{2\sqrt{xy}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{y} - \frac{y}{2\sqrt{xy}}}{\frac{x}{2\sqrt{xy}} - \frac{x}{2\sqrt{y}}} = \frac{\frac{2\sqrt{xy}\ \sqrt{y} - y}{2\sqrt{xy}}}{\frac{x - 2\sqrt{x}\ x}{2\sqrt{xy}}}$$

$$D_x y = \frac{2\sqrt{xy^2} - y}{x - 2x\sqrt{x}} = \frac{2y\sqrt{x} - y}{x - 2x\sqrt{x}}$$

5. $y/(x + y) = x^2 - 1$

Suponiendo que: $y = f(x)$

$$D_x[y/(x + y)] = D_x[x^2 - 1]$$

$$\frac{(x + y)y' - y(1 + y')}{(x + y)^2} = 2x$$

$$\frac{(x + y)y'}{(x + y)^2} - \frac{y}{(x + y)^2} - \frac{yy'}{(x + y)^2} = 2x$$

$$y'\left[\frac{(x + y)}{(x + y)^2} - \frac{y}{(x + y)^2}\right] = 2x + \frac{y}{(x + y)^2}$$

$$y' = \frac{2x + \dfrac{y}{(x+y)^2}}{\dfrac{(x+y)}{(x+y)^2} - \dfrac{y}{(x+y)^2}} = \frac{\dfrac{2x(x+y)^2 + y}{(x+y)^2}}{\dfrac{x+y-y}{(x+y)^2}}$$

$$y' = \frac{2x(x+y)^2 + y}{x}$$

$$D_x y = 2(x+y)^2 + y/x$$

Derivadas de orden superior

Puesto que la derivada de una función $f(x)$, "$D_x f(x)$" es también una función, podemos pensar en obtener la derivada de esta nueva función "$D_x f(x)$" que llamaremos la segunda derivada de $f(x)$ y que denotamos por:

"$D_x^2 f(x)$", es decir: $D_x^2 f(x) = D_x [D_x f(x)]$

también, "$D_x^2 f(x)$" es una nueva función y se puede hablar de la derivada de ella, que será la tercera derivada de $f(x)$ y se denotará por:

$$D_x^3 f(x) = D_x [D_x(D_x f(x))]$$

Este proceso se puede continuar de tal manera que se pueda derivar n veces la función $f(x)$, y a la función que resulta se le llamará la DERIVADA n — ésima de $f(x)$, denotada como:

$D_x^n f(x)$ que será una función.

Otra forma de denotar las n derivadas de una función $f(x)$ es:

$f'(x)$, primera derivada de $f(x)$
$f''(x)$, segunda derivada de $f(x)$
$f'''(x)$, tercera derivada de $f(x)$
$f^{(iv)}(x)$, cuarta derivada de $f(x)$
$f^{(v)}(x)$, quinta derivada de $f(x)$
. . . . .
. . . . .
$f^n(x)$ n-ésima derivada de $f(x)$.

Observaciones.

1. La segunda derivada de una función $f(x)$ puede representar:

i). La aceleración instantánea de una partícula.

ii). La razón de cambio de la pendiente de la recta tangente con respecto a "x" en el punto (x, y).

2. En la siguiente sección, haremos uso de algunos criterios donde se utiliza la segunda derivada para el análisis de la gráfica de una función.

Ejemplos.

1. Si $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 8x^2 - x + 1$
   $f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 16x - 1$
   $f''(x) = 60x^2 - 18x + 16$
   $f'''(x) = 120x - 18$
   $f^{iv}(x) = 120x$
   $f^{v}(x) = 120$
   $f^{vi}(x) = 0$
   $f^{n}(x) = 0, \qquad$ si $n \geq 6$

2. Si $f(x) = 1/x$ ó $f(x) = x^{-1}$
   entonces: $f'(x) = -x^{-2} = -1/x^2$
   $f''(x) = 2x^{-3} = 2/x^3$
   $f'''(x) = -6x^{-4} = -6/x^4$
   $f^{iv}(x) = 24x^{-5} = 24/x^5$

   $$f^{n}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$$

   Observe que, $f^{n}(x) \neq 0$ para toda n

3. Si $f(x) = \sqrt{x}$ ó $f(x) = x^{1/2}$

   Obtener primera, segunda y tercera derivada de $f(x)$

   $f'(x) = (1/2)x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x})$

   $f''(x) = (-1/4)x^{-3/2} = -1/(4\sqrt{x^3}) = -1/(4x\sqrt{x})$

   $f'''(x) = +3/8x^{-5/2} = 3/(8\sqrt{x^5}) = 3/(8x^2\sqrt{x})$

4. Si $x/y + y = x$

   Obtener: $D^2_x y$

   $Dx\,[x/y + y = x]$

$$\frac{y(1) - xy'}{y^2} + y' = 1$$

$$y/y^2 - xy'/y^2 + y' = 1$$

$$y'(-x/y^2 + 1) = 1 - y/y^2$$

$$y' = \frac{1 - 1/y}{-x/y^2 + 1}$$

$$y' = \frac{(y - 1)/y}{(-x + y^2)/y^2} = \frac{y^2(y - 1)}{y(-x + y^2)}$$

$$y' = \frac{y(y - 1)}{-x + y^2}$$

$$y' = \frac{y^2 - y}{y^2 - x}$$

D. $\left[y' = \dfrac{y^2 - y}{y^2 - x} \right]$

$$y'' = \frac{(y^2 - x)(2yy' - y') - (y^2 - y)(2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2}$$

$$y'' = \frac{(y^2 - x)(y')(2y - 1) - (y^2 - y)(2yy') + (y^2 - y)}{(y^2 - x)^2}$$

$$y'' = \frac{y'[(y^2 - x)(2y - 1) - 2y(y^2 - y)] + y^2 - y}{(y^2 - x)^2}$$

sustituimos y' por su valor:

$$y'' = \frac{\dfrac{y^2 - y}{y^2 - x}[(y^2 - x)(2y - 1) - 2y(y^2 - y)] + y^2 - y}{(y^2 - x)^2}$$

$$y'' = \frac{(y^2 - y)(2y - 1) - \dfrac{2y(y^2 - y)^2}{y^2 - x} + y^2 - y}{(y^2 - x)^2}$$

$$= \frac{(y^2 - x)(y^2 - y)(2y - 1) - 2y(y^2 - y)^2 + (y^2 - y)(y^2 - x)}{(y^2 - x)(y^2 - x)^2}$$

5. Si $xy^2 + y = 1$, obtener $D^2_x y$

D. $[xy^2 + y = 1]$

$$x\,2yy' + y^2(1) + y' = 0$$
$$2xyy' + y' = -y^2$$
$$y'(2xy + 1) = -y^2$$
$$y' = \frac{-y^2}{2xy + 1}$$

$$D_x\left[\, y' = \frac{-y^2}{2xy + 1}\,\right]$$

$$y'' = \frac{(2xy + 1)(-2yy') - (-y^2)(2xy' + y(2) + 0)}{(2xy + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{4xy^2y' - 2yy' + 2xy^2y' - 2y}{(2xy + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6xy^2y' - 2yy' - 2y}{(2xy + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6xy^2\,[-y^2/(2xy + 1)] - 2y\,[-y^2/(2xy + 1)\,] - 2y}{(2xy + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{\dfrac{-6xy^4}{2xy + 1} + \dfrac{2y^3}{2xy + 1} - 2y}{(2xy + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{\dfrac{-6xy^4}{2xy + 1} + \dfrac{2y^3}{2xy + 1} - \dfrac{2(2xy + 1)}{2xy + 1}}{(2xy + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{\dfrac{-6xy^4 + 2y^3 - 4xy - 2}{2xy + 1}}{\dfrac{(2xy + 1)^2}{1}}$$

$$y'' = \frac{-6xy^4 + 2y^3 - 4xy - 2}{(2xy + 1)^3}$$

Ejercicios.

1. Suponiendo que $y = f(x)$ (una función), obtener $D_x y$ para las siguientes expresiones:

1. $x^2 + y^2 = 1$ 2. $2x^2y^3 + 3x^3y^2 = 1$

3. $2xy = x^2 + y^2$
4. $x^3 = (2x - y)/(x + y)$
5. $2/x - 3/y = 1$
6. $y/x - 3xy = x - y$
7. $y/x - 2y = 2x$
8. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$
9. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = xy$
10. $x + \sqrt{xy} = 3y^2$
11. $x^2 - y^2 = 2x^2y^2$
12. $x\sqrt{2x - y} = y\sqrt{x + y}$
13. $(x + y)^2 = x^4 + y^4$
14. $(3x - 1)^3 = 3y^3$
15. $y/(x - y) = y^2 + 1$
16. $x\sqrt{y} + \sqrt[3]{yx} + \sqrt[4]{y} = y$
17. $\sqrt{xy} - \sqrt{y} = \sqrt{2x}$
18. $x^3y^4 = x^3 - y^3$
19. $x^2y^2 + 2y^3 - x^3 = 0$
20. $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 1$
21. $xy^2 - 2x^3 + 2y^3 = x + y$
22. $x^{2/3} - y^{2/3} = 1$
23. $x^{4/5} + y^{4/5} = 2$
24. $2x + 3y = \sqrt{x + y}$
25. $\sqrt{2x - y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
26. $\sqrt{2x + y}/(3x + 2y) = 2y$
27. $x = (x + y)/\sqrt{x + y}$

2. Obtener $D^2f(x)$ (segunda derivada), de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x + 12$
2. $f(x) = x^2 + 8x + 16$
3. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 3$
4. $f(x) = 3x^5 + 8x^3 + 12$
5. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
6. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$
7. $f(x) = 2x^{2/3} - x^{5/3}$
8. $f(x) = x^2(x + 1)^3$
9. $f(x) = 2x^5 + x^3$
10. $f(x) = 5x^{2/3} - x$
11. $f(x) = 1 + (x - 1)^{1/3}$
12. $f(x) = 5x^{1/3} - 2x$
13. $f(x) = 5 + (x - 2)^{5/3}$
14. $f(x) = 3\sqrt{2 - x}$
15. $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$
16. $f(x) = 6x/(x^2 + 36)$
17. $f(x) = (x - 5)\sqrt{x^2 - 25}$
18. $f(x) = 3/(x - 1)$
19. $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 4)$
20. $f(x) = 2/(x^2 - 9)$

Sección 12.9

APLICACIÓN DE DERIVADAS

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

1. Definir para una función f (x):

   a) Valores críticos de f (x).
   b) Función creciente en un intervalo.
   c) Función decreciente en un intervalo.
   d) Valores máximos y mínimos de f (x).

2. Utilizar la primera derivada para determinar si una función es creciente o decreciente en un intervalo.
3. Enunciar el criterio de la primera derivada para encontrar máximos y mínimos de una función.
4. Enunciar y aplicar el criterio de la segunda derivada para encontrar máximos y mínimos de una función.
5. Definir para una función f (x):

   a) Punto de inflexión.
   b) Concavidad hacia arriba en un intervalo $(c\ h\uparrow)$
   c) Concavidad hacia abajo en un intervalo $(c\ h\downarrow)$

6. Utilizando la segunda derivada, encontrar:

   a) Puntos de inflexión.
   b) Los intervalos donde f (x) es cóncava hacia arriba $(c\ h\uparrow)$
   c) Los intervalos donde f (x) es cóncava hacia abajo $(c\ h\downarrow)$

7. Dada una función f (x) determinar:

   a) En qué intervalos es creciente y decreciente.
   b) Los valores críticos, máximos y mínimos.
   c) Los puntos de inflexión.
   d) En qué intervalos es cóncava hacia arriba

$(c, h, \uparrow)$ y en qué intervalos es cóncava hacia abajo $(c, h, \downarrow)$.

e) Su gráfica.

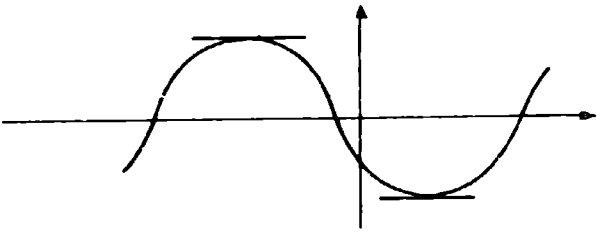
8. Resolver problemas que involucren máximos y mínimos de una función $f(x)$.

La geometría analítica nos proporciona herramientas para graficar funciones lineales y las cónicas. Existen algunas funciones de utilidad cuyas gráficas no se pueden obtener fácilmente con el uso de la geometría analítica.

El cálculo, y en particular el concepto de derivada, facilita el trazo de gráficas de funciones, proporcionando algunas características esenciales de las gráficas.

Análisis de la gráfica de una función

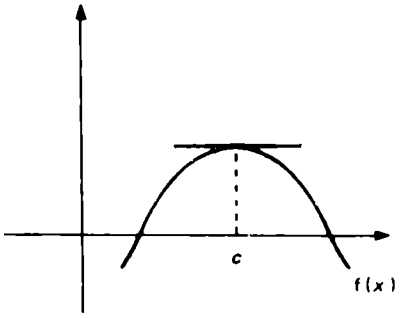
Al trazar la gráfica de una función, es importante determinar aquellos puntos del dominio donde la función f (x) es mayor o menor que todos los puntos a su alrededor. Sabemos que la derivada de una función en un punto se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva f (x) en ese punto, y es claro que esos puntos que nos interesan determinarán tangentes horizontales.

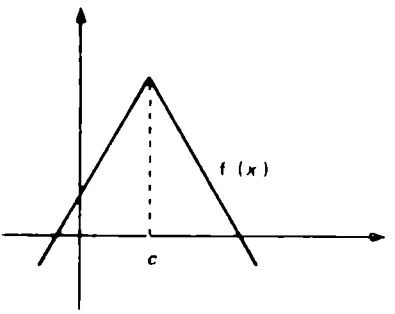


A continuación formalizaremos estos comentarios.

Definición. La función $f(x)$ se dice que tiene un valor máximo relativo en $x = c$, si existe un intervalo abierto que contenga a c sobre el cual está definida f tal que:

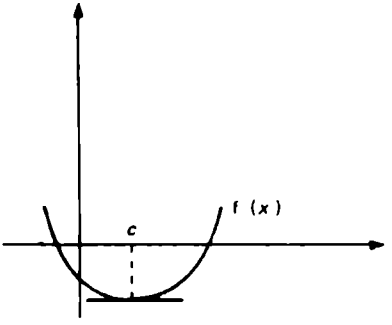
$$f(c) \geq f(x) \text{ para toda } x \text{ en ese intervalo.}$$

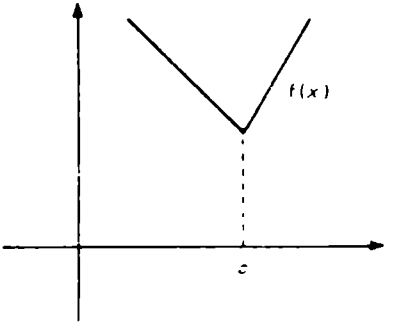




Definición. La función $f(x)$ se dice que tiene un valor mínimo relativo en $x = c$, si existe un intervalo abierto que contenga a c sobre el cual está definida f tal que:

$$f(c) \leq f(x) \text{ para toda } x \text{ en ese intervalo.}$$

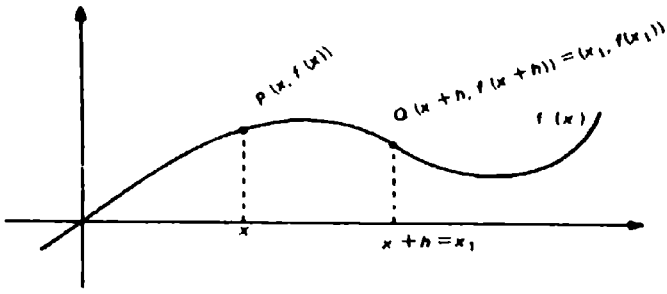




Definición. Los valores máximos y mínimos relativos de $f(x)$ son llamados valores extremos relativos de $f(x)$.

Una forma equivalente de definir la derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$



$$x + h = x_1 \ , \ h = x_1 - x$$
$$h \to 0 \text{ si y sólo si } x \to x_1.$$

Teorema 1.

Si f (x) existe para todos los valores x en el intervalo abierto (a, b) y si f tiene un extremo relativo en c, donde $a < c < b$, y si $f'(c)$ existe, entonces:

$$f'(c) = 0$$

Demostración.

Supongamos que el extremo es un máximo relativo; entonces, para x suficientemente cercano a c,

$$f(x) - f(c) \leq 0$$

también,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

a) Si $f'(c) > 0$, entonces:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

para toda x cercana a c. Sin embargo, si tomamos puntos a la derecha de c, esto es, $x > c$ o $x - c > 0$, deberíamos tener:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$$

ya que, por hipótesis, $f(x) - f(c) \leq 0$, lo cual contradice el hecho de que $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$

b) Si $f'(c) < 0$, entonces:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$$

para toda x cercana a c. Sin embargo, si tomamos puntos a la izquierda c, esto es, $x < c$ o $x - c < 0$, deberíamos tener:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

ya que, por hipótesis, $f(x) - f(c) \leq 0$, lo cual contradice el hecho de que:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$$

Puesto que $f'(x)$ no puede ser mayor que cero ni menor que cero se concluye que:

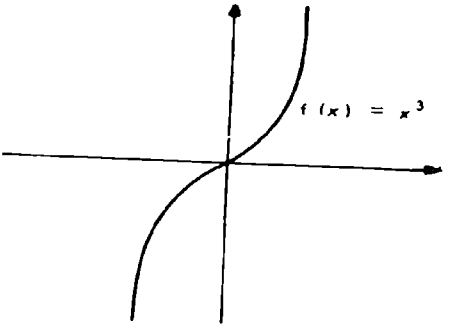
$$f'(c) = 0.$$

Definición. Si c es un número en el dominio de la función f y si $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no existe, entonces c se llama número CRÍTICO de f.

El último teorema nos dice que si $f(x)$ tiene un extremo relativo en c, y si $f'(c)$ existe, entonces, $f'(c) = 0$. El recíproco de este teorema no es verdadero, puesto que si $f'(c) = 0$, sabemos que la función tiene un valor crítico, pero se desconoce la naturaleza del número, es decir, no sabemos si en c hay un valor máximo, un valor mínimo o un valor que no es ni máximo ni mínimo.

Ejemplo.

1. Si $f(x) = x^3$

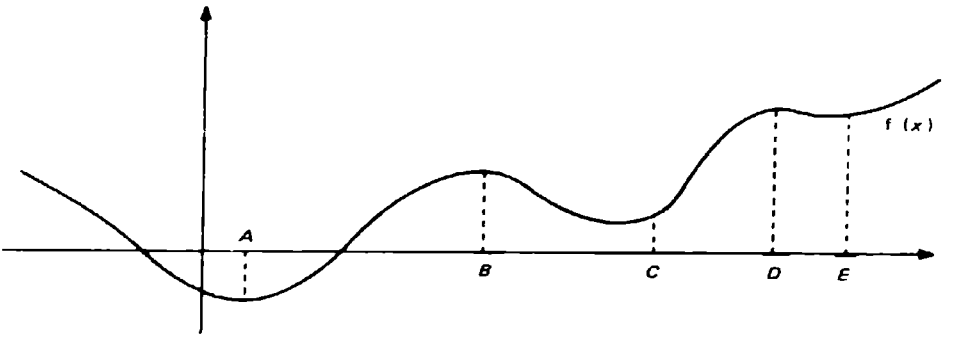


$f'(x) = 3x^2$
$f'(0) = 3(0)^2 = 0$
para $x = 0$
no es ni máximo ni mínimo.

Observación. Una condición necesaria para que f(x) tenga un extremo relativo en $x = c$ es que c sea un número crítico.

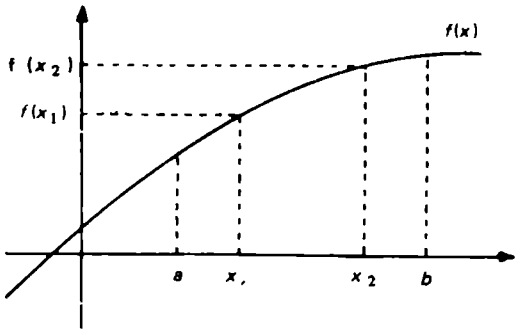
Función creciente y decreciente

Consideremos la gráfica de la siguiente función f (x):



Si un punto se mueve a lo largo de la curva desde A hasta B y de C a D, los valores de la función crecen cuando la abscisa crece. Cuando un punto se mueve a lo largo de la curva desde B hasta C y desde D hasta E, los valores de la función decrecen cuando la abscisa crece. Diremos entonces que la función f (x) es creciente en los intervalos [A, B] y [C, D] y que es decreciente en los intervalos [B, C] y [D, E]

Definición. *Sea* f: $R \to R$ una función.
Si f está definida en (a, b) diremos que f es CRECIENTE en ese intervalo si y sólo si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ donde x_1, x_2 están en el intervalo.

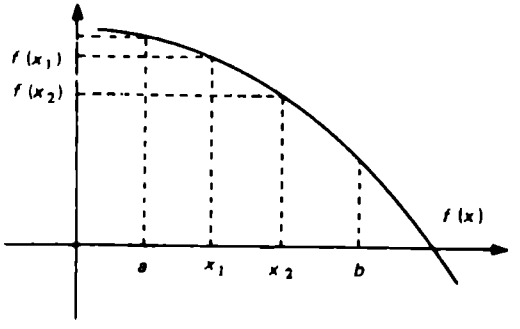


Si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

Definición. Sea f: $R - R$ una función.
Si f está definida en (a, b) diremos que f es DECRECIENTE en ese intervalo si y sólo si:

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2$$

donde x_1, x_2 están en el intervalo.



Es decir, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

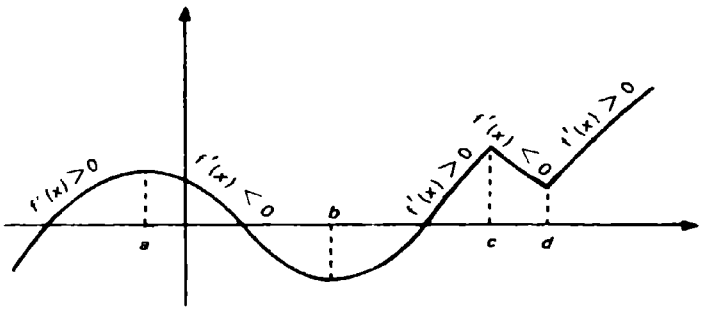
El siguiente teorema establece el criterio para determinar cuando una función es creciente o decreciente en un intervalo. La demostración no se incluye por no contar hasta el momento con herramientas suficientes.

Teorema 2.
Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b), y:

a) Si $f'(x) > 0$ para toda x en el intervalo abierto (a, b), entonces $f(x)$ es creciente en ese intervalo.

b) Si $f'(x) < 0$ para toda x en el intervalo abierto (a, b), entonces $f'(x)$ es decreciente en ese intervalo.

Observación. Consideremos la siguiente gráfica.



donde los valores a, b, c, y d marcan los cambios de signo de la derivada. Podemos observar que éstos son valores críticos, pues $f'(a) = 0$: $f'(b) = 0$; $f'(c)$ no existe y $f'(d)$ no existe.

La derivada en $x = c$ no existe, ya que el cociente:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

toma valores siempre positivos para x cercanos y menores que c y toma siempre valores negativos para x cercanos y mayores que c, por lo que $\lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$ no existe, o sea $f'(c)$ no existe.

Lo mismo sucede si consideramos $x = d$.

Estamos en condiciones de establecer un criterio para encontrar valores máximos y mínimos relativos de una función $f(x)$.

Teorema 3.

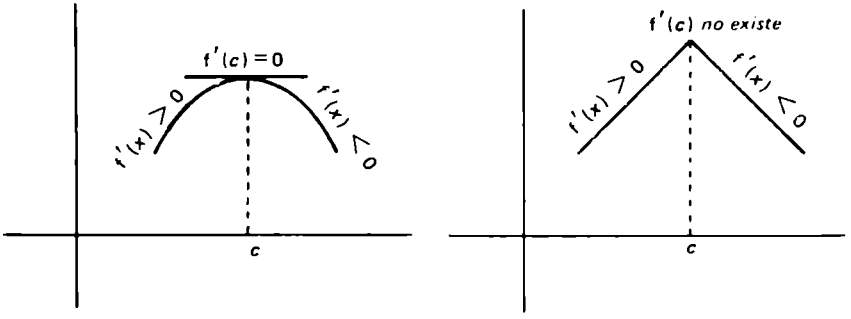
Si f es una función definida en un intervalo (a, b) donde $c \in (a, b)$ cuya derivada existe y es continua y si al crecer x pasando por el valor crítico $x = c$, $f'(x)$ cambia signo de positivo a negativo, entonces en $x = c$, $f(x)$ tiene

un máximo relativo cuyo valor es f (c). Al punto $(c, f(c))$ lo llamaremos punto máximo relativo.

Demostración.

Para x cercano a c, pero menor que el $f'(x) > 0$ por hipótesis y si $f'(x) > 0$, entonces f (x) es creciente en (a, c) y para x cercano c, pero mayor que el $f'(x) < 0$ por hipótesis y si $f'(x) < 0$, entonces f (x) es decreciente (c, b).

Como $f'(x)$ cambió signo de positivo a negativo al pasar por c, entonces puesto que f es continua en $x = c$, deja de crecer en c y empieza a decrecer. Es decir, en $x = c$ hay un valor máximo.



Teorema 4.

Si f es una función definida en un intervalo (a, b) cuya derivada existe y es continua y si al crecer x pasando por el valor crítico $x = c$, $f'(x)$ cambia signo de negativo a positivo, entonces en $x = c$ la función f (x) tiene un mínimo relativo cuyo valor es f (c). Al punto $(c, f(c))$ lo llamaremos punto mínimo relativo.

La demostración de este teorema es similar al anterior y se dejará como ejercicio.

Observación. De los dos teoremas anteriores podemos deducir que si $f'(c) = 0$ y $f'(x)$ no cambia de signo antes y después de c, entonces, en $x = c$ no existe ni máximo ni mínimo.

Ejemplo.

2. $f(x) = (1/3)x^3 + (1/2)x^2 - 6x + 1$.

Para encontrar los valores críticos de f (x) se necesita derivar y ver en que valores de x $f'(x) = 0$ ó $f'(x)$ no existe.

$$f'(x) = x^2 + x - 6 = 0$$
$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

así, los valores críticos son:

$$x = -3, x = +2$$

Con estos valores formaremos los intervalos para saber dónde es creciente o decreciente, que son:

$$(-\infty, -3) \quad (-3, 2) \quad (2, \infty)$$

De acuerdo a lo antes visto, es suficiente elegir un valor en cada intervalo y sustituirlo en f' (x) y observar si es positivo o negativo.

Sea $x = -4$, que está en $(-\infty, -3)$
entonces:

$$f'(-4) = (-4)^2 + (-4) - 6$$
$$= 6 > 0$$

Por lo que en $(-\infty, -3)$, f (x) es creciente.

Sea $x = 0$, que está en $(-3, 2)$, entonces:

$$f'(0) = (0)^2 - (0) - 6$$
$$= -6 < 0$$

Por lo que en $(-3, 2)$, f (x) es decreciente.

Sea $x = 3$, que está en $(2, \infty)$, entonces:

$$f'(3) = (3)^2 + 3 - 6$$
$$= 6 > 0$$

Por lo que en $(2, \infty)$, f (x) es creciente.

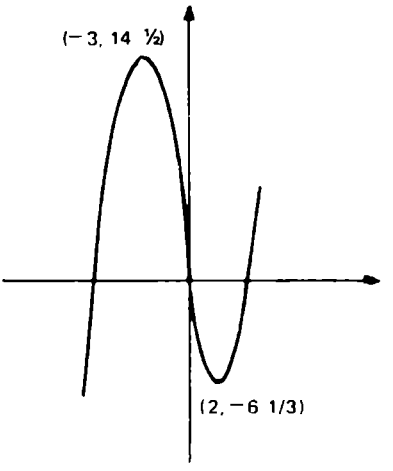
Para averiguar si los valores críticos $x = 3$ y $x = 2$, son máximos o mínimos, observamos el signo de la derivada antes y después de estos valores, de donde concluimos que:

en $x = -3$ existe un valor máximo y
en $x = 2$ existe un valor mínimo.

Resumiendo, tenemos:

Valores críticos:	$x = -3, x = 2$
Creciente:	$(-\infty, -3)\ (2, \infty)$
Decreciente:	$(-3, 2)$
Valor máximo en:	$x = -3$ de $29/2$
Valor mínimo en:	$x = 2$ de $-19/3$

Gráficamente:



3. Si $f(x) = x^{1/3}$ tenemos que: $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$

Si $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0$ se observa que no existe ningún valor real x que satisfaga esta ecuación.

y $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ no existe si $x = 0$.

Por lo que el único valor crítico es $x = 0$.
Los intervalos para creciente y decreciente son:

$$(-\infty, 0)\ (0, \infty)$$

Si $x = -1$, que está en $(-\infty, 0)$

$$f'(-1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-1)^2}} = \frac{1}{3} > 0$$

Por lo que $f(x)$ en $(-\infty, 0)$ es creciente, y si $x = +1$, que está en $(0, \infty)$:

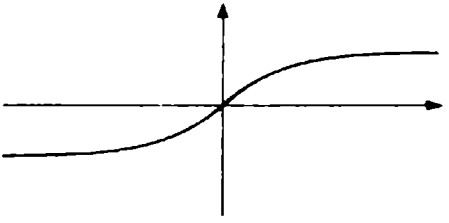
$$f'(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1)^2}} = \frac{1}{3} > 0$$

Por lo que también $f(x)$ en $(0, \infty)$ es creciente.

El único valor crítico de esta función se tiene en $x = 0$ y antes y después de este valor, la derivada es positiva (no hay cambio de signo), por lo que esta función no tiene ni máximo ni mínimo. O sea,

Valor crítico:	$x = 0$
Creciente:	$(-\infty, 0)$ $(0, \infty)$
Decreciente:	no hay
Valor máximo:	no existe
Valor mínimo:	no existe.

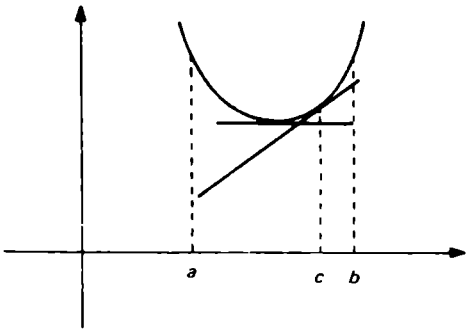
Gráficamente:



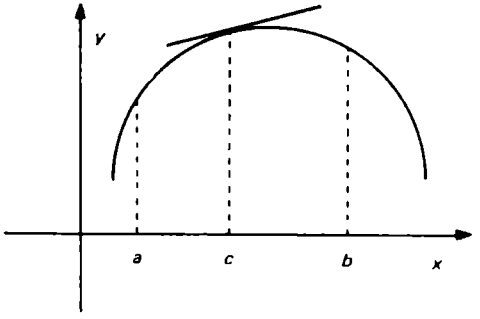
Recordemos que estamos interesados en obtener información acerca de las características de la gráfica de una función. Las siguientes definiciones nos ayudarán a realizar un mejor trazo de las gráficas.

Concavidades y puntos de inflexión

Definición. La gráfica de una función f es cóncava hacia arriba en el punto $(c, f(c))$ si existe $f'(c)$ y si existe un intervalo abierto que contenga a c, tal que para todos los valores x diferentes de c en el intervalo, el punto $(x, f(x))$ está arriba de la tangente a la gráfica en el punto $(c, f(c))$.



Definición. La gráfica de una función f es cóncava hacia abajo en el punto $(c, f(c))$ si existe $f'(c)$ y si existe un intervalo abierto que contenga a c, tal que para todos los valores x diferentes de c en el intervalo, el punto $(x, f(x))$ está bajo la tangente a la gráfica en el punto $(c, f(c))$.



Definición. Una curva es cóncava hacia arriba ($ch\uparrow$) en un intervalo si la pendiente de la tangente a la curva en ese intervalo es creciente; y es cóncava hacia abajo ($ch\downarrow$) en un intervalo si la pendiente en ese intervalo es decreciente.

En seguida mencionaremos un criterio que nos permitirá determinar la concavidad de la gráfica de una función en un intervalo.

Criterio para la concavidad

Si f es una función derivable en un intervalo (a, b) y:

a) Si $f''(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$ entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en (a, b).

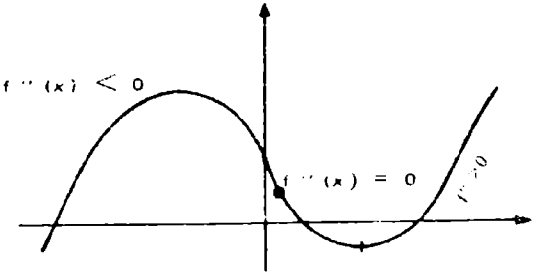
b) Si $f''(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$ entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en (a, b).

Definición. La curva de ecuación $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = c$ si $x = c$ está en el dominio de f y si en este punto sucede un cambio de concavidad.

Se puede probar el siguiente criterio que determina los puntos de inflexión

Teorema 5.

Si f es derivable en algún intervalo que contenga a c y si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces si $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$



Los puntos de inflexión serán los extremos de los intervalos donde la gráfica de f cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo.

Observaciones.

a) Consideremos la siguiente función, que no posee segunda derivada en $x = 0$.

$$f(x) = x^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

Observemos que $f''(0)$ no existe, sin embargo

si $x < 0$ entonces $f''(x) > 0$
y si $x > 0$ entonces $f''(x) < 0$

De donde se tiene un cambio de concavidad en $x = 0$, esto es, en $x = 0$ existe un punto de inflexión.

b) Para encontrar los posibles puntos de inflexión de $f(x)$ basta con determinar los valores donde:

$$f''(x) = 0 \quad \text{o} \quad f''(x) \text{ no existe.}$$

Aunque estos valores obtenidos no sean puntos de inflexión nos ayudarán para obtener los intervalos de concavidad.

Usaremos la segunda derivada para definir un criterio que determine los valores máximos y mínimos de una función $f(x)$, que se deriva del teorema anterior.

Corolario. Sea c un valor crítico de f donde $f'(c) = 0$, si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$ y si $f''(c) > 0$, f tiene un mínimo relativo en $x = c$.

Ejemplos

4. Sea $f(x) = (1/4)x^4 - (1/3)x^3 - x^2 + 1$.

$$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x$$
$$f''(x) = 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

Entonces en $x = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$, $x = \frac{1 - \sqrt{7}}{3}$

$f(x)$ puede tener puntos de inflexión y para determinar los intervalos de concavidad analizaremos los siguientes intervalos:

$$\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{7}}{3}\right), \left(\frac{1 - \sqrt{7}}{3}, \frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right), \left(\frac{1 + \sqrt{7}}{3}, \infty\right).$$

Sabemos que la gráfica de una función es cóncava hacia arriba en un intervalo si $f''(x) > 0$ en el intervalo y es cóncava hacia abajo si

$f''(x) < 0$, así es que basta verificar esta desigualdad en un solo punto del intervalo dado.

Si $x = -3 \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{3})$ entonces:

$$\begin{aligned} f''(-3) &= 3(-3)^2 - 2(-3) - 2 \\ &= 31 > 0 \end{aligned}$$

por lo que la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{3})$.

Si $x = 0 \in (\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3})$ entonces:

$$\begin{aligned} f''(0) &= 3(0)^2 - 2(0) - 2 \\ &= -2 < 0 \end{aligned}$$

por lo que la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3})$.

Y si $x = 2 \in (\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \infty)$ entonces:

$$\begin{aligned} f''(2) &= 3(2)^2 - 2(2) - 2 \\ &= 12 - 6 \\ &= 6 > 0 \end{aligned}$$

por lo que la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \infty)$.

Para determinar los valores críticos resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$. O sea,

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 2x &= 0 \\ x(x^2 - x - 2) &= 0 \\ x(x-2)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $x = 0$, $x = 2$, y $x = -1$, son los valores críticos y son los

posibles máximos y mínimos de f (x). Utilizaremos para esto el criterio de la segunda derivada.

Si $x = 0$, $f''(0) = -2 < 0$.
Entonces en $x = 0$ existe un valor máximo.

Si $x = 2$, $f''(2) = 6 > 0$
Entonces en $x = 2$ existe un valor mínimo.

y si $x = -1$, $f''(-1) = 3 > 0$
Entonces en $x = -1$ existe un valor mínimo.

Resumiendo lo anterior tenemos:

Valores críticos: $x = 0, x = 2, x = -1.$

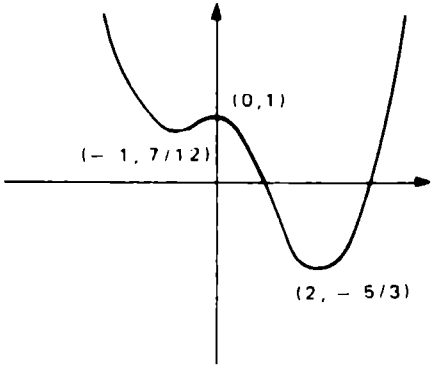
Puntos de inflexión en: $x = \dfrac{1 - \sqrt{7}}{3}, \quad x = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{3}$

Concavidad hacia arriba en: $(-\infty, \dfrac{1 - \sqrt{7}}{3}), (\dfrac{1 + \sqrt{7}}{3}, \infty)$

Concavidad hacia abajo en: $(\dfrac{1 - \sqrt{7}}{3}, \dfrac{1 + \sqrt{7}}{3})$

Valor máximo en: $x = 0$
Valor mínimo en: $x = 2, \ x = -1.$

La gráfica de f (x) es:



$f'(x) = 15x^4 + 20x^3$
$15x^4 + 20x^3 = 0$
$5x^3(3x + 4) = 0$
$x = 0; x = -4/3$

$f''(x) = 60x^3 + 60x^2$
$60x^3 + 60x^2 = 0$
$60x^2(x + 1) = 0$
$x = 0; x = -1$

$f'(-2) = 15(-2)^4 + 20(-2)^3 = 80 > 0$

$f''(-2) = 60(-2)^3 + 60(-2)^2 = -240 < 0$

$f'(-1) = 15(-1)^4 + 20(-1)^3 = -5 < 0$

$f''(-1/2) = 60(-1/2)^3 + 60(-1/2)^2 = 7.5 > 0$

$f'(-1) = 15(1)^4 + 20(1) = 35 > 0$

$f''(1) = 60(1)^3 + 60(1)^2 = 120 > 0$

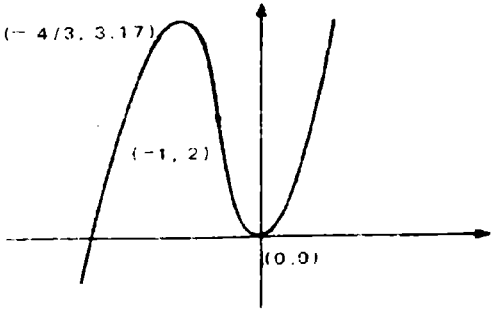
así:

$(-\infty, -4/3)$	$(-4/3, 0)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
creciente	decreciente	creciente	$ch \downarrow$	$ch \uparrow$	$ch \uparrow$

Si $x = 0$, $f''(0) = 0$
Si $x = -4/3$, $f''(-4/3) = -35.6 < 0$

O sea, que para $f(x)$ se tiene:

Puntos críticos en:	$x = 0, x = -4/3$
Puntos de inflexión en:	$x = -1$
Intervalos donde es creciente:	$(-\infty, -4/3)\ (0, \infty)$
Intervalos donde es decreciente:	$(-4/3, 0)$
Intervalos donde es $ch\uparrow$	$(-1, 0)\ \ (0, \infty)$
Intervalos donde es $ch\downarrow$	$(-\infty, -1)$
Valor máximo en:	$x = -4/3$
Valor mínimo en:	$x = 0$



Observaciones:

a) Sabemos que si en $x = c$ existe un punto de inflexión, entonces $f''(c) = 0$, lo contrario no es necesariamente cierto, es decir, si $f''(c) = 0$, entonces en $x = c$ no hay necesariamente un punto de inflexión; en nuestro último ejemplo $f''(0) = 0$ y en $x = 0$ no hay punto de inflexión.

b) Si $x = c$, es un valor crítico y si $f''(c) = 0$, el criterio de la segunda derivada no nos proporciona información para averiguar si en $x = c$ hay un valor máximo o un mínimo y en esos casos se recurre al criterio de la primera derivada.

Aplicaciones de máximos y mínimos

Muchos de los problemas que se nos presentan consisten en optimizar. Con frecuencia nos interesa el máximo o mínimo de algo. Si al problema que se nos presenta podemos asociarle una función, se reduce a encontrar los máximos y mínimos de esta función.

Ejemplos.

6. Encontrar dos números que su suma sea 18, pero que su producto sea el máximo posible.

   Sean x y y estos números.
   Entonces: $x + y = 18$
   Llamemos $f(x, y) = xy$ (producto).
   Puesto que deseamos que x y y sean el máximo, entonces debemos encontrar los valores donde $f(x, y)$ tiene un máximo. Podríamos pensar en aplicar los criterios vistos en esta sección. Sin embargo, éstos se refieren a funciones de una variable y nuestra función: $f(x, y) = xy$ depende de dos variables x, y.
   Esta dificultad se puede eliminar si hacemos uso de la primera condición que dice que: $x + y = 18$ y despejando de cualquiera de las dos variables, sustituyéndola en $f(x, y)$ para transformarla a una función de una sola variable. O sea:

$$\begin{aligned} y &= 18 - x \\ f(x, y) &= xy \\ f(x) &= x(18 - x) \\ f(x) &= 18x - x^2 \end{aligned}$$

   Ahora sí estamos en condiciones de aplicar los criterios aprendidos para encontrar los máximos y mínimos de $f(x)$.

$$f'(x) = 18 - 2x$$
$$f''(x) = -2$$

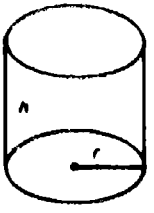
$$18 - 2x = 0$$
$$18 = 2x$$
$$x = 9$$
$$f''(9) = -2 < 0$$

Por lo que en $x = 9$, $f(x)$ tiene un máximo.

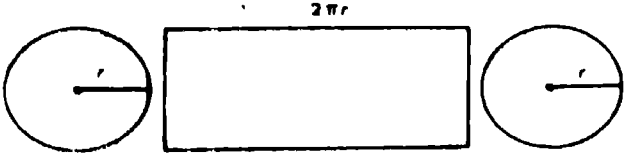
Ahora, como $y = 18 - x$
tenemos: $y = 18 - 9$
$y = 9$.

De donde concluimos que los números buscados son 9 y 9.

7. Se desea almacenar aceite en botes cilíndricos con volumen de 375 cm^3, con dimensiones que requieran la menor cantidad de material superficial, donde el espesor del material es una cantidad que no se considera. ¿Cuáles son estas dimensiones?



Volumen $= \pi r^2 h = 375\ cm^3$
Área $= 2\pi r h + 2\pi r^2$



Lo que se desea minimizar es el área, $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$, que depende de r y h, por lo que despejaremos h del volumen y lo sustituiremos en el área

$$\pi r^2 h = 375$$

$$h = \frac{375}{\pi r^2}$$

$$A(r, h) = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$A(r) = 2\pi r \left(\frac{375}{r^2}\right) + 2\pi r^2$$

$$A(r) = \frac{750}{r} + 2\pi r^2$$

$$A(r) = \frac{-750}{r^2} + 4\pi r \qquad A''(r) = \frac{1500}{r^3} + 4\pi$$

$$\frac{-750}{r^2} = 4\pi r = 0 \qquad A''(3.907) = \frac{1500}{(59.68)} + 4\pi$$

$$\frac{-750}{r^2} = -4r \qquad A''(3.907) > 0$$

$r^3 = 59.63$ Por lo que en $r = 3.907$

$r = 3.907$ $A(r)$ tiene un valor mínimo.

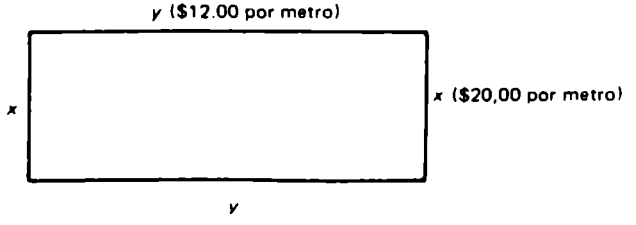
Para encontrar h sustituiremos en:

$$h = \frac{375}{\pi r^2} = \frac{375}{\pi(15.26)} \cong \frac{375}{47.94} = 7.82$$

Así, las dimensiones deseadas para que el área sea mínima son:

$$r = 3.907 \quad \text{y} \quad h = 7.82$$

8. Un terreno rectangular va a ser cercado. El material que se necesita para dos de sus lados paralelos cuesta \$12.00 por metro lineal; y los otros dos lados paralelos serán cercados con un material que cuesta \$20.00 por metro lineal. Encontrar las dimensiones del terreno de mayor área posible que puede ser encerrado con un costo de \$1,800.



$2x\,(20) + 2y\,(12) = 1{,}800$ (costo)

Área $= A\,(x, y) = xy$

$40x + 24y = 1{,}800$

$40x = 1{,}800 - 24y$

$$x = \frac{1{,}800}{40} - \frac{24}{40}\,y$$

$$x = 45 - \frac{3}{5}\,y$$

$A\,(x, y) = xy$

$$A\,(y) = \left(45 - \frac{3}{5}\,y\right)(y)$$

$$A\,(y) = 45y - \frac{3}{5}\,y^2$$

$$A'\,(y) = 45 - \frac{6}{5}\,y \qquad A''\,(y) = -\frac{6}{5}$$

$$45 - \frac{6}{5}\,y = 0 \qquad A''\,(37.5) = -\frac{6}{5} < 0$$

$$45 = \frac{6}{5}\,y$$ Por lo que en:

$$y = \frac{225}{6}$$ $y = 37.5$

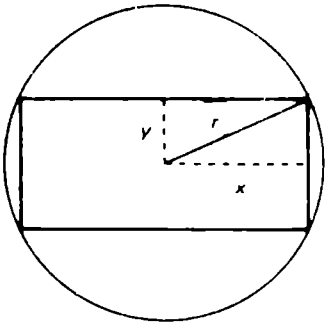
$y = 37.5$ $A\,(y)$ tiene un máximo.

$$x = 45 - \frac{3}{5}\,(37.5)$$

$x = 22.5$

Así, los valores de $x = 22.5$, $y = 37.5$ hacen que el área sea la máxima con un costo de $1.800.00.

9. Encontrar las dimensiones del mayor rectángulo que puede ser inscrito en un círculo de radio r.



$$\text{Área} = A(x, y) = 4xy$$
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Entonces:

$$A(x,y) = 4xy$$
$$A(x) = 4x\sqrt{r^2 - x^2} \qquad (\text{si } 0 \leqslant x \leqslant r)$$

$$A'(x) = \frac{4}{\sqrt{r^2 - x^2}}(r^2 - 2x^2) = 0 \text{ si } x = \pm \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$A''(x) = \frac{4x(-3r^2 + 2x^2)}{(r^2 - x^2)3/2}$$

Por lo que:

$$A''\left(\frac{+r}{\sqrt{2}}\right) < 0$$

y en $x = \frac{+r}{\sqrt{2}}$ $A(x)$ tiene un valor máximo.

Observación. Puesto que x es una distancia, no tiene ningún sentido considerar el valor de $x = \frac{-r}{\sqrt{2}}$.

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r^2}{2}\right)} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Ejercicios.

1. Para las funciones que aparecen en los ejercicios siguientes, encontrar:

   i) Valores críticos.
   ii) Intervalos donde f (x) es creciente o decreciente.
   iii) Puntos de inflexión.

iv) Intervalos donde $f(x)$ es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo
v) Valores máximos y mínimos.
vi) Su gráfica.

a) $f(x) = x^2 + x - 5$
b) $f(x) = 8 - x^2$
c) $f(x) = (1/3)x^2 + 2x - 9$
d) $f(x) = 5 - 3x - 2x^2$
e) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$
f) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$
g) $f(x) = (1/4)x^4 - (7/2)x^2 - 6x + 2$
h) $f(x) = (1/4)x^4 + (2/3)x^3 - (1/2)x^2 - 2x + 8$
i) $f(x) = (x - 1)^3 (x - 2)^2$
j) $f(x^4) = 3x^5 + 5x^4$
k) $f(x) = x^2 + 1/x$
l) $f(x) = x^3 + 1/x$
m) $f(x) = 3x^{1/3} - x$
n) $f(x) = 3x^{4/3} - 4x$
ñ) $f(x) = 2x^{1/3} + 3x^{4/3}$
o) $f(x) = x^{1/4} + x^{5/4}$

2. Hallar dos números enteros cuya suma sea 12 y cuyo producto sea el máximo.

3. Hallar el volumen de una caja abierta de base cuadrada y volumen máximo que se pueda hacer a partir de una pieza cuadrada de cartón de 20 cm. de lado, cortando cuadrados de igual tamaño en las esquinas y doblando éstas hacia arriba.

4. En una página se han de imprimir 50 pulgadas cuadradas. Si los márgenes han de tener una pulgada arriba y abajo, y 2 pulgadas en los lados, hallar las dimensiones más económicas para la página.

5. Una caja rectangular de base cuadrada, es construída de tal forma que el área de sus seis lados es de 18 cm^2. ¿Cuáles son las medidas de la caja que hacen su volumen máximo?

6. Un recipiente cilíndrico ha de tener 54 cm^2. Hallar las dimensiones de modo que la cantidad requerida sea el mínimo:

a) si el recipiente no tiene tapa
b) si está tapado.

7. Un cilindro cerrado tiene una superficie (lado y tapas) de 10 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones que hacen su volumen máximo?

8. La base de un triángulo isósceles tiene 20 m y su altura 40 m. Hallar las dimensiones del máximo rectángulo inscrito en él si dos de los vértices quedan en la base del triángulo.

9. Encontrar el área del mayor rectángulo que puede ser inscrito en un triángulo rectángulo del medidas 3, 4 y 5, si dos de sus lados coinciden con los catetos.

10. Encontrar las dimensiones del mayor cilindro circular recto que puede inscribirse en una esfera de radio r.

11. Definir el $P(x, y)$ en la curva $y = x^2$ más cercano al punto de coordenadas $(1, 0)$.

12. Definir la diagonal más pequeña de un rectángulo cuya área es Am^2.

13. Hallar las dimensiones del cono circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio r.

14. Desmostrar el teorema 4 de esta sección.

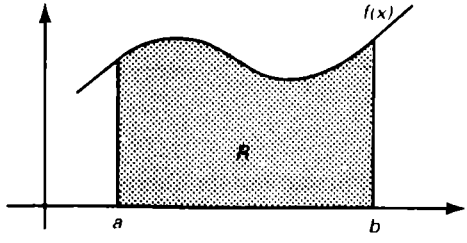
Sección 12.10

LA INTEGRAL

Objetivos

Después de estudiada esta sección, el estudiante deberá ser capaz de:

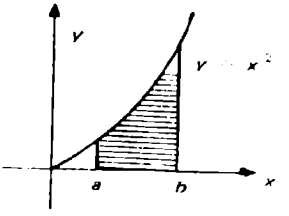
1. Encontrar el área bajo una curva utilizando rectángulos.
2. Definir antiderivadas de una función.
3. Enunciar los teoremas para calcular antiderivadas.
4. Dada una función, encontrar su antiderivada.
5. Definir la integral definida de una función.
6. Enunciar el teorema fundamental del cálculo.
7. Utilizar el teorema fundamental del cálculo para calcular integrales y áreas.
8. Sabemos que se tienen fórmulas que permiten calcular el área de algunas figuras geométricas como triángulos, polígonos, circunferencias. Si quisieramos encontrar el área de una región acotada por una curva, como en la región indicada en la figura siguiente:



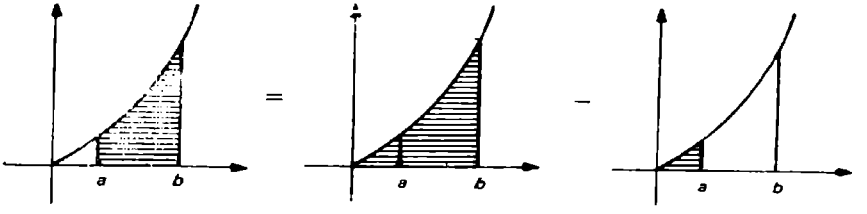
nos damos cuenta que no se tienen fórmulas para ello.

En esta sección veremos una forma de resolver este problema.

Consideramos la función $f(x) = x^2$. Se desea encontrar el área de la región limitada por $y = x^2$, el eje de las x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

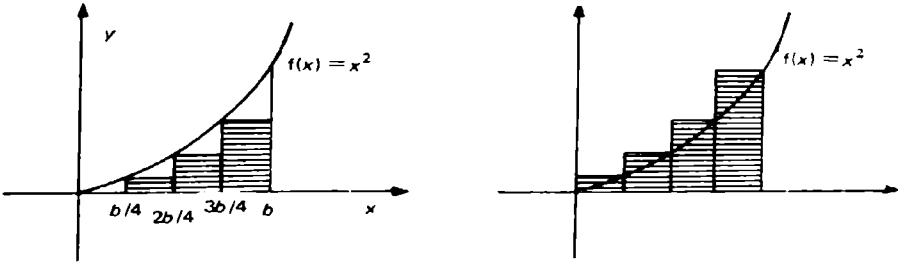


Denotemos esta área por A_a^b y observemos que $A_a^b = A_0^b - A_0^a$.
Gráficamente tenemos:



Para obtener A_a^b empezaremos por encontrar el área A_0^b.

Una aproximación del área buscada es el área cubierta por los rectángulos en las figuras siguientes.



La aproximación en la primera figura es por defecto, es decir, esta área

es menor que la real y en la segunda, la aproximación es por exceso, es decir, esta área es mayor que la real y por lo tanto, determinaremos el valor numérico (en función de b) de estas áreas.

Primero dividimos el intervalo $[\ 0, b\ ]$ en cuatro partes iguales. Y se obtienen 4 intervalos de longitud $b/4$, que son:

$$[\ 0, b/4\ ], \qquad [\ b/4, 2b/4\ ], \qquad [\ 2b/4, 3b/4\ ], \qquad [\ 3b/4, b\ ]$$

Las alturas de los rectángulos en la primera figura son:

$$f(0) = (0)^2 = 0$$

$$f(\frac{b}{4}) = (\frac{b}{4})^2 = \frac{b^2}{4^2}$$

$$f(\frac{2b}{4}) = (\frac{2b}{4})^2 = \frac{2^2 b^2}{4^2}$$

$$f(\frac{3b}{4}) = (\frac{3b}{4})^2 = \frac{3^2 b^2}{4^2}$$

$$f(b) = b^2$$

Entonces, el área cubierta por los rectángulos es:

$$\text{Área} = (\frac{b}{4})(0) + (\frac{b}{4})(\frac{b^2}{4^2}) + (\frac{b}{4})(\frac{2^2 b^2}{4^2}) + (\frac{b}{4})(\frac{3^2 b^2}{4^2})$$

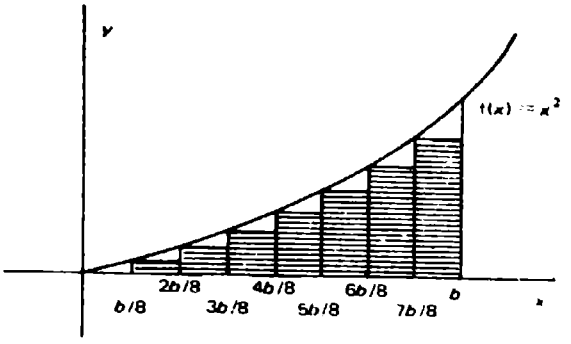
$$\text{Área} = 0 + \frac{b^3}{4^3} + \frac{2^2 b^3}{4^3} + \frac{3^2 b^3}{4^3}$$

$$= \frac{b^3}{4^3}(1^2 + 2^2 + 3^2)$$

$$= \frac{b^3}{4^3}(14)$$

$$\text{Área}_1 = \frac{14}{64} b^3$$

Esta área obtenida es realmente menor que el área buscada. Ahora dividamos el intervalo $[\ 0, b\ ]$ en 8 subintervalos de la misma longitud $b/8$.



Procediendo de la misma manera, calcularemos el área formada por estos nuevos rectángulos.

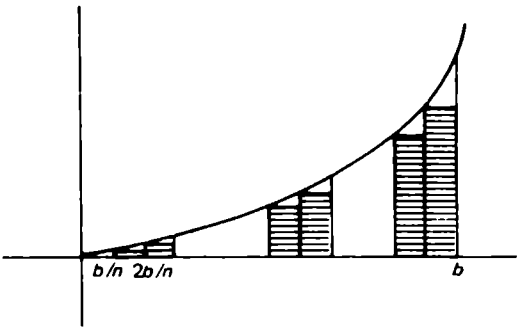
$$\text{Área}_2 = (\frac{b}{8})\, f(\frac{b}{8}) + (\frac{b}{8})\, f(\frac{2b}{8}) + (\frac{b}{8})\, f(\frac{3b}{8}) + (\frac{b}{8})\, f(\frac{4b}{8})$$
$$+ (\frac{b}{8})\, f(\frac{5b}{8}) + (\frac{b}{8})\, f(\frac{6b}{8}) + (\frac{b}{8})\, f(\frac{7b}{8})$$
$$= \frac{b}{8}\,[\, f(\frac{b}{8}) + f(\frac{2b}{8}) + f(\frac{3b}{8}) + f(\frac{4b}{8}) + f(\frac{5b}{8})$$
$$+ f(\frac{6b}{8}) + f(\frac{7b}{8})\,]$$
$$= \frac{b}{8}\,[\, \frac{b^2}{8^2} + \frac{2^2b^2}{8^2} + \frac{3^2b^2}{8^2} + \frac{4^2b^2}{8^2} + \frac{5^2b^2}{8^2} + \frac{6^2b^2}{8^2} + \frac{7^2b^2}{8^2}$$
$$= \frac{b^3}{8^3}\,[\, 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2\,]$$
$$= \frac{140}{512}\, b^3$$
$$\text{Área}_2 = \frac{140}{512}\, b^3$$

Observamos que: $\text{Área}_1 < \text{Área}_2$

esto es: $\frac{14}{64}\, b^3 < \frac{140}{512}\, b^3$

Esta nueva área es una mejor aproximación del área real.

Continuando de esta manera, podemos dividir el intervalo $[\, 0,\, b\,]$ en subintervalos más pequeños. Así, si lo dividimos en n-subintervalos, la longitud de ellos será $(\frac{b}{n})$ y podemos calcular el área formada por estos n-rectángulos.



$$\text{Área}_n = \left(\frac{b}{n}\right) f\left(\frac{b}{n}\right) + \left(\frac{b}{n}\right) f\left(\frac{2b}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{b}{n}\right) f\left(\frac{(n-2)b}{n}\right) + \frac{b}{n} f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)$$

$$= \frac{b}{n}\left[f\left(\frac{b}{n}\right) + f\left(\frac{2b}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{(n-2)b}{n}\right) + f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{b}{n}\left[\frac{b^2}{n^2} + \frac{2^2 b^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-2)^2 b^2}{n^2} + \frac{(n-1)^2 b^2}{n^2} \right]$$

$$= \frac{b^3}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-2)^2 + (n-1)^2\right]$$

Por inducción matemática se demostró que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + P^2 = \frac{1}{6} P(P+1)(2P+1)$$

Si $P = (n-1)$ se tiene que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{1}{6}(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1)$$

Por lo que:

$$\text{Área}_n = \frac{b^3}{n^3}\left[\frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1)\right]$$

$$\text{Área}_n = \frac{b^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

Intuitivamente, esta área crecerá a medida que tomemos más intervalos. Esto es, si n crece, el área crecerá aproximadamente cada vez más el área real. Una formalización de esto se tiene si se prueba la siguiente desigualdad:

$$\text{Área}_n < \text{Área}_{n+1}$$

$$\text{Área}_n = \frac{b^3}{n^3}\left[\frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1)\right]$$

$$\text{Área}_n = \frac{b^3(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$\text{Área}_{(n+1)} = \frac{b^3[(n+1)-1][2(n+1)-1]}{6(n+1)^2}$$

$$\text{Área}_{(n+1)} = \frac{b^3[(n)(2n+1)]}{6(n+1)^2}$$

Tenemos que probar que:

$$\text{Área}_{(n+1)} - \text{Área}_n > 0$$

$$\frac{b^3(n)(2n+1)}{6(n+1)^2} - \frac{b^3(n-1)(2n-1)}{6n^2} > 0$$

$$b^3\left[\frac{n^3(2n+1) - (n+1)^2(n-1)(2n-1)}{6n^2(n+1)^2}\right] > 0$$

$$b^3\left[\frac{3n^2+n-1}{6n^2(n+1)^2}\right] > 0$$

Como $n > 1$, esta desigualdad siempre se cumple.
De esto podemos concluir que el área real se obtiene si el

$$\lim_{n\to\infty}(\text{Área}_n) \text{ existe.}$$

O sea:

$$A_0^b = \lim_{n\to\infty}(\text{Área}_n)$$

$$A_0^b = \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\left[\frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}\left[(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})\right]$$

$$= \frac{b^3}{6}(1)(2) = \frac{b^3}{3}$$

$$A_0^b = \frac{b^3}{3}$$

En forma similar, si observamos la segunda figura, podemos decir que el área formada por esos rectángulos es mayor que la real, y si tomáramos 4 intervalos obtendríamos que esta área es $\frac{30}{64} b^3$ y continuando con 8 divisiones, el área será $\frac{204}{512} b^3$ y nos damos cuenta que:

$$\frac{204}{512} b^3 < \frac{30}{64} b^3$$

Esto es, las áreas se van reduciendo y son una mejor aproximación de A_0^b. Continuando de esta misma forma con n subintervalos, obtenemos una área dada por:

$$A_n = \frac{b^3 (n + 1)(2n + 1)}{6n^2}$$

También se puede verificar que:

$$A_n > A_n + 1$$

Además,

$$A_0^b = \lim_{n \to \infty} \frac{b^3 (n + 1)(2n + 1)}{6n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{b^3}{6} (1)(2) = \frac{b^3}{3}$$

$$A_0^b = \frac{b^3}{3}$$

Con esto concluimos que el área real (A_0^b) existe si las aproximaciones por dentro y por fuera tienden a un mismo número y este número es el área.

Para obtener el área A_0^a se procede de la misma forma, dividiendo el intervalo $[0, a]$ en n subintervalos de igual longitud y se obtiene:

$$A_0^a = \frac{a^3}{3}$$

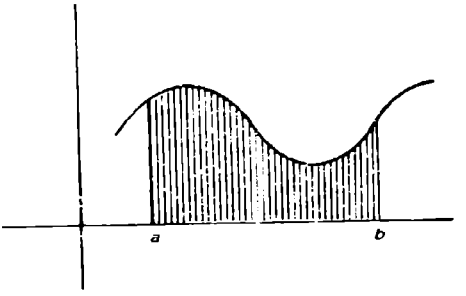
por lo que:

$$A_a^b = A_0^b - A_0^a$$

$$A_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

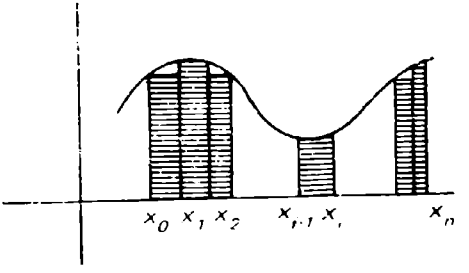
Para calcular esta área no es necesario calcular las dos aproximaciones, puesto que ellas son iguales, así es que basta con obtener una de ellas.

Si ahora consideramos una función continua $f(x) \geq 0$, para calcular el área de la región limitada por $y = f(x)$, el eje de las x y las rectas $x = a$ y $x = b$, se procede de la misma forma que en el problema anterior.



Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales de longitud:

$$h = \frac{b - a}{n}$$



El área formada por estos n rectángulos es:

$$A_n = h\, f(x_0) + h\, f(x_1) + h\, f(x_2) + \cdots + h\, f(x_{n-1})$$

$$A_n = h\,[\, f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\,]$$

y el área A_a^b está dada por el límite de estas áreas cuando n crece sin límite.

O sea,

$$A_a^b = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} h\ [\ f(x_0) + \ldots + f(x_{n-1})\ ]$$

Notemos que $n \to \infty$ es equivalente a decir que la longitud de cada subintervalo tiende a cero, o sea: $h \to 0$

El área obtenida A_a^b la denotaremos por:

$$A_a^b = \lim_{n\to\infty} A_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

que se lee: la integral de f con respecto a x desde a hasta b, y se llama la integral definida. A f se le llama integrando, los extremos de intervalo los llamaremos límites de integración, la variable x es llamada variable de integración y el proceso de evaluar una integral definida es llamado *integración*.

La integral definida es un número real que depende de f, a y b, pero no de la variable de integración, así que la variable x puede ser sustituida indistintamente por cualquier letra. O sea.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(m)\,dm$$

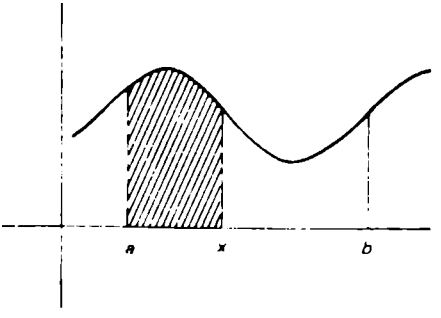
A continuación veremos que existe una relación entre los conceptos de integración y derivación.

Sea $f(x)$ función continua en el intervalo $[a, b]$, definimos una función:

$$A: [\ a, b] \to R$$

como

$$A(x) = A_a^x = \int_a^x f(x)\,dx$$



Observamos que:

$$A(a) = A_a^a = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

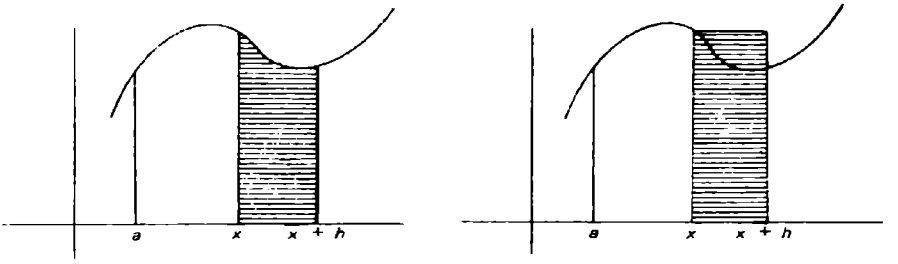
Teorema 1.

Sea f función continua en el intervalo $[a, b]$ y sea x un número en $[a,b]$. Si A es la función definida por $A(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ entonces:

$$A'(x) = f(x)$$

Demostración.

Sean x y $x + h$ dos números en $[a,b]$ con $h \neq 0$, entonces:



$$A(x + h) - A(x) \approx f(x)h$$

Como $h \neq 0$,

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \cong f(x)$$

y así,

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} = f(x)$$

pero, $$\lim_{h \to 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} = A'(x)$$

por lo que:

$$A'(x) = f(x)$$

Es facil probar que si dos funciones difieren en una constante, sus deri-

vadas son idénticas.

O sea, si $F(x) - G(x) = C$

entonces: $F'(x) - G'(x) = 0$

$$F'(x) = G'(x)$$

El recíproco de esto es un resultado de gran utilidad.

Teorema 2.

Si $F(x)$ y $A(x)$ son dos funciones tales que $A'(x) = F'(x)$, entonces, $A(x) - F(x) = C$.

Demostración.

Sea $H(x) = A(x) - F(x)$, entonces:

$$H'(x) = A'(x) - F'(x)$$

pero, por hipótesis, $A'(x) = F'(x)$
así que:

$$H'(x) = A'(x) - A'(x)$$
$$H'(x) = 0.$$

de donde $H(x)$ es una función constante, ya que en cada punto se tienen tangentes horizontales, o sea:

$$H(x) = C$$

o $$A(x) - F(x) = C$$

Teorema fundamental del cálculo para áreas.

a) Si $f(x)$ es una función no negativa y continua en el intervalo $[a, b]$.
b) $F'(x) = f(x)$.

El área acotada por $y = f(x)$, el eje de las x y las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por.

$$A_a^b = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Observación.

$\int_a^b f(x)\,dx$ también es denotada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Demostración.

Si A (x) es el área bajo f (x) desde a hasta x, donde $x \in [a, b]$, en un teorema anterior demostramos que:

$$A'(x) = f(x) \qquad (1)$$

También por hipótesis de este teorema,

$$F'(x) = f(x) \qquad (2)$$

y así, de 1 y 2:

$$A'(x) = F'(x)$$

Acabamos de ver que esto es equivalente a:

$$A(x) - F(x) = C$$
$$A(x) = F(x) + C$$

Si $x = a$,

$$A(a) = F(a) + C$$

pero, $A(a) = A_a^a = \int_a^a f(x)\,dx = 0$

Entonces,

$$0 = F(a) + C$$
$$C = -F(a).$$

Si $x = b$,

$$A(b) = F(b) + C$$

$$A(b) = A_a^b = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) + C$$

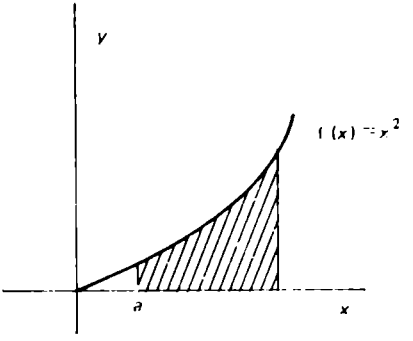
pero $C = -F(a)$, de donde:

$$A_a^b = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Que es lo que se quería demostrar.

Este último teorema nos dice que para encontrar el área bajo $y = f(x)$ necesitamos solamente encontrar una función $F(x)$ tal que, $F'(x) = f(x)$ y calcular $F(b) - F(a)$.

Si regresamos con el problema con el que iniciamos esta sección, podemos encontrar el área directamente.



Para este problema, $f(x) = x^2$ y si consideramos $F(x) = 1/3\, x^3$, tenemos que $F'(x) = 3\,(1/3)x^2 = x^2 = f(x)$ y usando el teorema tenemos:

$$\text{Área} = A_a^b = \int_a^b dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Puesto que $F(x) = x^3/3$, el problema de encontrar el área bajo la curva de ecuación $y = f(x)$ se reduce a encontrar una función $F'(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ le llamaremos una antiderivada de $f(x)$, o sea:

Definición. Una función $F(x)$ es llamada una antiderivada de la función $f(x)$ en un intervalo si:

$$F'(x) = f(x)$$

para toda x en el intervalo.

Ejemplo.

1. Si $f(x) = 9x^2 + 2x - 1$, entonces:

$$F(x) = 3x^3 + x^2 - x + 1$$
$$G(x) = 3x^3 + x^2 - x + 3$$
$$H(x) = 3x^3 + x^2 - x$$
$$P(x) = 3x^3 + x^2 - x + C$$

son antiderivadas de $f(x)$, ya que:

$$F'(x) = G'(x) = H'(x) = P'(x) = f(x)$$

Definición. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, o sea:

$$F'(x) = f(x)$$

entonces, el símbolo $\int f(x)\,dx$, definido por:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

(C constante), es llamado una integral indefinida de $f(x)$.

Ejemplos.

2. $$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

porque $D_x\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right) = 3\frac{1}{3}x^2 + 0 = x^2$

3. $$\int 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2 + C$$

porque $D_x\left(\frac{3}{2}x^2 + C\right) = \frac{6}{2}x + 0 = 3x$

Observación: Para demostrar que: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ es suficiente demostrar que $F'(x) = f(x)$.

Las siguientes fórmulas facilitan el cálculo de algunas integrales indefinidas.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

Demostración:

Debemos demostrar que:

$$D_x\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{(n+1)(x)^{(n+1)-1}}{(n+1)} + 0 = x^n$$

Ejemplos.

4. $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}\,x^4 + C$

5. $\int x^{-7}\,dx = \frac{-1}{6}\,x^{-6} + C$

6. $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}\,x^{3/2} + C$

7. $\int \sqrt[3]{x^4}\,dx = \int x^{4/3}\,dx = \frac{3}{7}\,x^{7/3} + C$

Si $\int f(x)\,dx$ existe y c es una constante, entonces:

$$\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

Demostración.

$D_x\,(c\,F(x)) = c\,[D_x\,F(x)]$ y como

$D_x\,F(x) = f(x)$

$D_x(c\,F(x)) = c\,D_x\,F(x) = c\,f(x)$, entonces:

$$\int c\,f(x) = c\,F(x) \text{ pero } D_x\,F(x) = f(x)$$

Es equivalente a:

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

entonces:

$$\int c\,f(x) = c\,F(x) = c\int f(x)\,dx$$

Si $\int f(x)\,dx$ y $\int g(x)\,dx$ existen, entonces:

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \int [\,f(x) + g(x)\,]\,dx$$

Demostración.

Puesto que: $\int f(x)\,dx$ y $\int g(x)\,dx$ existen, entonces también existen funciones $F(x)$ y $G(x)$ tales que $D_x F(x) = f(x)$ y $D_x G(x) = g(x)$; luego:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= D_x F(x) + D_x G(x) \\ &= D_x [\,F(x) + G(x)\,] \end{aligned}$$

entonces:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = F(x) + G(x) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int [\,f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\,]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx$$

Ejemplos.

8. $$\int (2x^2 - 7)\,dx = \frac{2x^3}{3} - 7x + C$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - 7x + C$$

9. $$\int \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \int (3x^{-3} - x^{-1/3})\,dx$$

$$= \frac{3x^{-2}}{-2} - \frac{x^{2/3}}{2/3} + C$$

$$= (-3/2)\,x^{-2} - (3/2)\,x^{2/3} + C$$

Si la derivada de f (x) existe, donde $n \neq -1$.

$$\int [\,f(x)\,]^n\, f'(x)\,dx = \frac{[\,f(x)\,]^{n+1}}{n+1} + C$$

Demostración.

$$D_x\left(\frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{(n+1)\,f(x)^{n+1-1}}{(n+1)}\,(f'(x)) + 0$$

$$= (\,f(x)\,)^n\, f'(x)$$

Ejemplos.

10. $\int 2\,(2x - 1)^3\,dx = (1/4)(2x - 1)^4 + C$

11. $\int (14x - 8)\,(7x^2 - 8x + 3)^2\,dx = (1/3)\,(7x^2 - 8x + 3)^3 + C$

12. $\int x\sqrt{2x^2 - 3}\,dx = \int x\,(2x^2 - 3)^{1/2}\,dx$

Observamos que aquí no se puede utilizar este último teorema, puesto que la derivada de $f(x) = 2x^2 - 3$ es $4x$ y nos hace falta el factor 4; sin embargo, podemos agregarlo multiplicando y dividiendo el integrando por 4, o sea:

$$\int x\,(2x^2 - 3)^{1/2}\,dx = \int \frac{1}{4}\,(4)\,(x)\,(2x^2 - 3)^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 4x\,(2x^2 - 3)^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{(2x^2 - 3)^{3/2}}{3/2}\right] + C$$

$$= \frac{2}{12}(2x^2 - 3)^{3/2} + C$$

13. $\int (7x-1)^3\,dx = \int \frac{1}{7}(7)(7x-1)^3\,dx$

$$= \frac{1}{7}\int 7(7x-1)^3\,dx$$

$$= \frac{1}{7}\frac{(7x-1)^4}{4} + C$$

$$= \frac{1}{28}(7x-1)^4 + C$$

14. $\int x^3 \sqrt[3]{8-3x^4}\,dx = \int x^3 (8-3x^4)^{1/3}\,dx$

$$= \int \frac{-1}{12}(-12)\,x^3 (8-3x^4)^{1/3}\,dx$$

$$= \frac{-1}{12}\cdot\frac{(8-3x^4)^{4/3}}{4/3} + C$$

$$= \frac{1}{16}(8-3x^4)^{4/3} + C$$

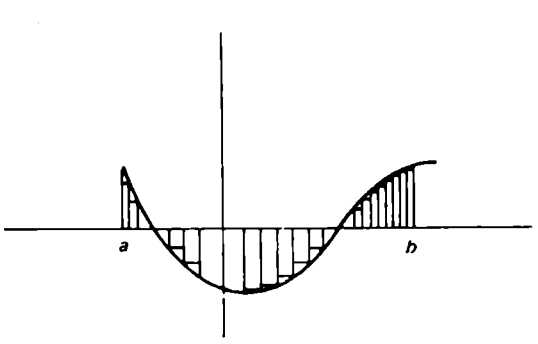
La integral definida se definió para funciones no negativas al relacionar éstas con áreas. El procedimiento empleado se puede extender para definir la integral definida de una función continua cualquiera, y se podrán tener casos de funciones cuya integral no puede ser interpretada como un área.

Definición. Sea f una función continua en $[a, b]$.
Definimos la integral definida de a a b como sigue:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h \to 0} (f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))\,h$$

donde $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_k = a + kh$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.



Ésta definición nos dice que:

1o. Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales de longitud

$$h = \frac{b-a}{n}$$

2o. Que seleccionemos n puntos en $[a, b]$ de la siguiente forma:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\,h$$

3o. Calcular los n productos y sumarlos.

$$f(x_0)\,h + f(x_1)\,h + f(x_2)\,h + \ldots + f(x_{n-1})\,h$$

4o. Obtener el límite de esta suma cuando h tiende a cero.

$$\lim_{h \to 0} [\, f(x_0)h + f(x_1)h + f(x_2)h + \ldots + f(x_{n-1})h \,]$$

Observaciones:

a) La integral definida es siempre un número real.
b) Decir que h tiende a cero es equivalente a decir que el número de intervalos es muy grande.
c) El intervalo $[\, a, b \,]$ puede estar en cualquier lugar de la recta numérica.
d) La función $f(x)$ en el intervalo $[\, a, b \,]$ puede ser positiva o negativa.
e) De acuerdo a lo anterior, la integral puede ser un número negativo, positivo o cero.
f) La integral definida no siempre representará un área.

De la definición de integral definida podemos concluir que:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Ahora generalizaremos el teorema fundamental del cálculo para áreas, enunciando el teorema equivalente para cualquier función continua.

Teorema 4.

Si f (x) es una función continua en [*a*, *b*] y si,

$$F'(x) = f(x)$$

entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Las propiedades que enunciamos para integrales indefinidas también serán válidas para la integral definida.

O sea, si f es cualquier función continua en [*a*, *b*].

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k \text{ es una constante}).$$

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{1}{n+1}\left[\,b^{n+1} - a^{n+1}\,\right] \quad n \neq -1$$

$$\int_a^b [\,f(x) + g(x)\,]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b [\,f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(dx)$$

$$+ \ldots + f_n(x)\,dx$$

También se cumple lo siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

donde *c* es cualquier número.

Ejemplos.

15. $$\int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{(1)^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

16. $\int_{-2}^{0} (x^2 - 4)\,dx = \frac{x^3}{3} - 4x \Big|_{-2}^{0}$

$$= \left[\frac{0^3}{3} - 4(0)\right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} - 4(-2)\right]$$

$$= 0 - \left[\frac{-8}{3} + 8\right]$$

$$= -\frac{16}{3}$$

17. $\int_{1}^{3} 4x\sqrt{2x^2 - 1} = \frac{(2x^2 - 1)^{3/2}}{3/2}$

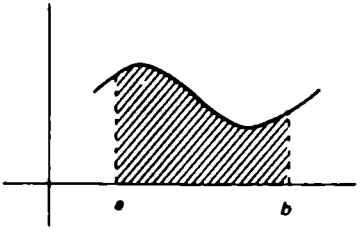
$$= \left[\frac{2}{3}(2x^2 - 1)^{3/2}\right]_1^3$$

$$= \frac{2}{3}\left[(17)^{3/2} - (1)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[17\sqrt{17} - 1\right]$$

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$, el área acotada o limitada por $y = f(x)$, el eje de las x y las rectas $x = a$ y $x = b$, las definimos anteriormente como:

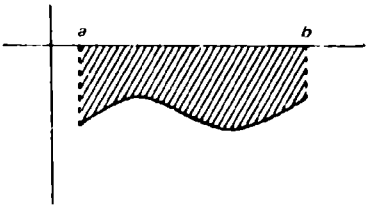
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



Si $f(x) < 0$, para toda x en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x)$ es con-

tinua, el área acotada por $y = f(x)$, el eje de las x y las rectas $x = a$ y $x = b$, la definiremos como:

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$



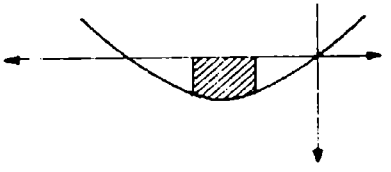
Ejemplos.

18. Encontrar el área limitada por la curva de ecuación:

$$f(x) = y = x^2 + 4x$$

el eje de las x y las rectas $x = -3$ y $x = -1$.

Como $f(x) < 0$ en el intervalo $[-3, -1]$



$$\text{Área} = -\int_{-3}^{-1} (x^2 + 4x)\,dx$$

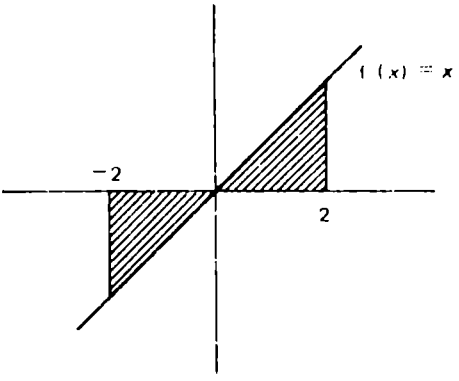
$$\text{Área} = -\int_{-3}^{-1} (x^2 + 4x)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_{-3}^{-1}$$

$$= -\left[\left(\frac{-1}{3} + 2\right) - \left(\frac{-27}{3} + 18\right)\right]$$

$$= -\left[\frac{5}{3} - 9\right] = -\left[\frac{-22}{3}\right]$$

$$= \frac{22}{3} \text{ unidades}^2$$

19. Encontrar el área de la región limitada por la recta $f(x) = x$ el eje de las x y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.



En este ejemplo, la función $f(x) = x$ en el intervalo $[-2, 2]$ es negativa en $[-2, 0]$; y es positiva en el intervalo $[0, 2]$ y para encontrar esta área tendremos que evaluar dos integrales.

$$\text{Área} = \left[-\int_{-2}^{0} x\, dx \right] + \left[\int_{0}^{2} x\, dx \right]$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0}^{2}$$

$$= -\left[\frac{0}{2} - \frac{4}{2} \right] + \left[\frac{4}{2} - 0 \right]$$

$$= -[-2] + [2]$$

$$\text{Área} = 4 \text{ unidades}^2$$

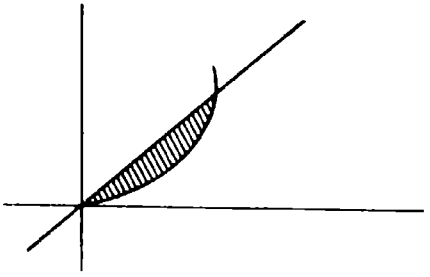
Si f y g son dos funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ podemos definir $h(x) = f(x) - g(x)$, desde luego $h(x)$ también es una función continua en $[a, b]$ y podemos calcular la integral de $h(x)$ en $[a, b]$.

$$\int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

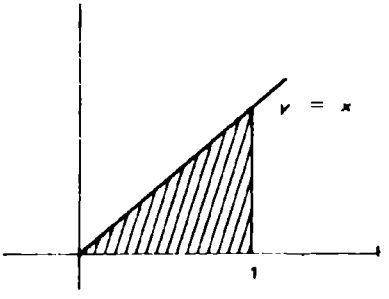
esta integral puede ser útil para encontrar el área entre dos curvas.

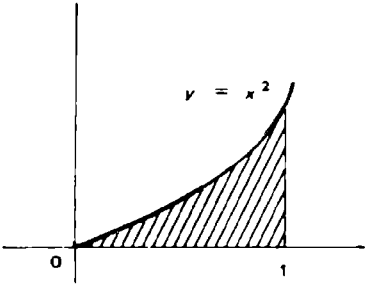
Ejemplo.

20. Encontrar el área de la región acotada por las curvas de la ecuación $y = x^2$ y $y = x$



El área buscada es la diferencia de las áreas que aparecen en las siguientes figuras.





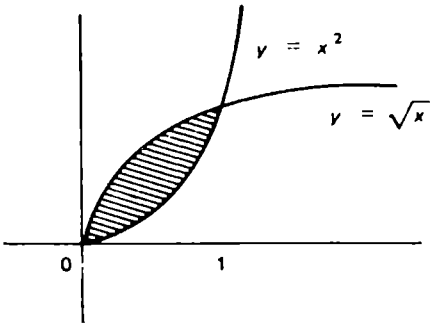
Puesto que $g(x) = x$, es mayor que $f(x) = x^2$ en el intervalo de $[0, 1]$ tenemos que el área buscada es:

$$\text{Área} = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)\,dx = 1/2 - 1/3 = 1/6$$

$$\text{Área} = 1/6 \text{ unidades}^2$$

21. Encontrar el área de la región limitada por las curvas de ecuación $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$.



$$\text{Área} = \int_0^1 \left[(\sqrt{x}) - x^2 \right] dx =$$

$$= \left[2/3\ x^{3/2} - x^3/_3 \right] = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right] - [\ 0 - 0\ ]$$

$$\text{Área} = 1/3 \text{ unidades}^2$$

Ejercicios.

1. En los ejercicios siguientes encontrar el área de la región limitada por las curvas dadas, utilizando suma de rectángulos.

a) $y = x^2 + 1$;	$x = 0$;	$x = 3$; $y = 0$
b) $y = 3x - 1$;	$x = 1$;	$x = 2$; $y = 0$
c) $y = 3x^2 + 5x + 1$;	$x = 0$;	$x = 2$; $y = 0$
d) $y = (1/2)x + 3$;	$x = 1$;	$x = 2$; $y = 0$
e) $y = -x^2 + 6x - 5$;	$x = 1$;	$x = 5$; $y = 0$
f) $y = x^2$;	$y = 1$	
g) $y = x^2$;	$y = x$	
h) $y = x$;	$y = 2$; $x = 0$	
i) $y = x^2$;	$y = -x^2 + 4x$	
j) $y = 2 - x^2$;	$y = x$; $x = 0$	

2. Para cada uno de los siguientes ejercicios encontrar una función cuya derivada es la función que se da (antiderivada).

a) $y = 5$

b) $y = -3$

c) $y = 3x - 1$

d) $y = -x$

e) $y = (1/3)x + 5$
f) $y = 2x - 1/2$
g) $y = -9x + 12$
h) $y = (-2/5)\,x + 13$
i) $y = x^2 - 8 + 2$
j) $y = -x^2 + 6x$
k) $y = -3 + 5x^2 - 1$
l) $y = -(1/2) - (1/3)x - (1/4)x^2$
m) $y = x^2 + 3$
n) $y = 5x^2 - 1/2$
ñ) $y = x^3$
o) $y = x^3 + 3x - 1$
p) $y = 1/5x^3 - 7x^2 + x - 1$
q) $y = 7x^3 - 3$

3. **Encontrar la integral indefinida para cada uno de los siguientes ejercicios.**

a) $\int dx$

b) $\int 5dx$

c) $\int -(1/3)\,dx$

d) $\int -4\,dx$

e) $\int (3x + 1)\,dx$

f) $\int ((1/2)x - 9)\,dx$

g) $\int (5x - 1/2)\,dx$

h) $\int (3 - 9x)\,dx$

l) $\int (x^5 - 7x^4 + 1)\,dx$

m) $\int 1/2x - 1/2\,dx$

n) $\int (5/x^2 - 8/x^3 + 3)\,dx$

ñ) $\int (\sqrt{2x}\,dx$

o) $\int x\sqrt{x}\,dx$

p) $\int (x^2\sqrt{x^3} + 5)\,dx$

q) $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

r) $\int (2/\sqrt{x} - 3/\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})\,dx$

i) $\int (5x^2 - 9x + 10x)\, dx$

j) $\int (7x^3 + 8x^2 - x + 3)\, dx$

k) $\int (-6x^4 + 3x)\, dx$

s) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x} \right) dx$

t) $\int x\,(7x^2 + 8)^3\, dx$

u) $\int (15x^2 - 6x)(5x^3 - 3x^2 + 3)^4 dx$

v) $\int (x-5)\sqrt{-x^2 + 10x}\, dx$

w) $\int \sqrt[3]{3x + 5}\, dx$

x) $\int 2x^2\sqrt{7x^3 - 1}\, dx$

y) $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{(1/3)x^2 - 3}}\, dx$

z) $\frac{9x^2 - 8x + 1}{(6x^3 - 8x^2 + 2x - 1)^2}\, dx$

a') $\int -x^2 (-3 - 10x^3)^{3/5}\, dx$

4. Utilizando el teorema fundamental del cálculo, encontrar la integral definida para cada uno de los siguientes ejercicios.

a) $\int_1^6 (x^3 - 2x)\, dx$

b) $\int_{-1}^{2} (4x^2 - 3x - 1)\, dx$

c) $\int_{-1}^{0} (x^3 - 1/2x^2 + 1)\, dx$

d) $\int_2^3 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

e) $\int_{-1}^{6} 14x\sqrt{5-7x^2}\,dx$

f) $\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt[3]{2x^2+1}}\,dx$

g) $\int_0^1 \frac{10x+3}{(5x^2+3x-1)^2}$

h) $\int_1^2 (3x^2-2)\sqrt[3]{(7x^3-14x)^2}$

i) $\int_{-2}^{0} (x^3-9x)\,dx$

j) $\int_2^3 3(x+1)^2\,dx$

5. Hallar el área que limita el eje x y la curva dada

a) $y = x^2$	entre $x = 1$ y $x = 5$
b) $y = 4 - 3x^2$	entre $x = -1$ y $x = 1$
c) $y = 4x$	entre $x = 0$ y $x = 5$
d) $y = 8 + 2x - x^2$	
e) $y = x^2 + 2x - 3$	entre $x = -2$ y $x = 0$
f) $y = x^{1/2}$	entre $x = 1$ y $x = 4$
g) $y = x^3$	entre $x = -2$ y $x = 4$

6. Encontrar el área entre las curvas de ecuación $y = -x$ y $y = 2 - x^2$.

7. Encontrar el área entre las curvas de ecuación $y = x^2$ y $y = 3$

8. Encontrar el área de la región limitada por las curvas de ecuación:

$$y = x^2 - x \quad \text{y} \quad y = 2x$$

9. Encontrar el área de la región limitada por las curvas de ecuación:

$$y = x^2 \quad \text{y} \quad y = x^3$$

10. Encontrar el área de la región limitada por las curvas de ecuación:

$$y = x^3 \quad \text{y} \quad y = \sqrt{x}$$

Bibliografía

Suppes, Patrick, Hill, Shirley. *Primer curso de lógica matemática.* Reverté, 1985.
Smith, Karl, J. *Introducción a la lógica.* Grupo Editorial Iberoamericana, 1991.
Arya, Jagdish. Lardner, Robin. *Matemáticas Aplicadas.* Segunda edición. Prentice Hall, 1986.
Haeussler, Ernest, F. Richard, S. Paul. *Matemáticas para administracción y Economía.* Grupo Editorial Iberoamericana, 1992.
Barnett, Raymond A. *Precálculo. Álgebra, Geometría Analítica y Trigonometría.* LIMUSA, 1992.
Calero, Ernesto S., Calero Eva L., Arzola Scott, Foresman, 1990.
Kindle, Joseph H. *Geometría Analítica.* Mc. Graw Hill, 1976.
Elbridge P. Vance. *Introducción a la Matemática Moderna.* Fondo Educativo Interamericano, 1979.
Lipschuts, Seymour. *Teoría de Conjuntos y Temas afines.* Mc. Graw - Hill. 1977.
Swokowski, Earl. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Segunda edición: Grupo Editorial Iberoamérica, 1983.
Barnett/Nolasco. *Álgebra Elemental. Estructura y Aplicaciones.* Mc Graw Hill, 1986.
Fuller, Gordon. *Álgebra Elemental.* CECSA, 1982.
Lehmann, Charles H. *Álgebra.* Limusa, 1992.
Loraglia, Florence. Elmore, Merritt. Conway Donald. *Álgebra,* Limusa, 1973.
Fuller, Gordon, Wilson, Jr. Walter L. Miller, Jr. Henry C. *Álgebra Universitaria.* CECSA, 1987.
Sobel, Max A., Lerner, Norbert. *Álgebra.* Prentice - Hall Hispano americana, S.A. Segunda edición, 1989.
Fuller, Gordon. Tarwater, Dalton. *Geometría Analítica.* Addison Wesley Iberoamericana, 1988.
Barnett, Rich. *Geometría.* Segunda edición. Mc. Graw Hill, 1990.
Gobran, Alfonse. *Álgebra Elemental.* Grupo Editorial Iberoamericano, 1990.
Taylor, Howard E., Wade, Thomas L. *Trigonometría Contemporánea.* Limusa, 1976.
Niles, Nathan O. *Trigonometría Plana.* Segunda edición, Limusa, 1986.
Hooper, Alfred. Griswold, Alice L. *Trigonometría.* Publicaciones Cultural, S.A. 1973.
Larson, Roland E., Hostetler, Robert P., Edwards, Bruce H. Calculus with Analytic Geometry. Fourth edition. Heat, 1990.
Larson, Roland E., Kanold, Timothy D. Stiff, Lee. *Álgebra 2.* Heat, 1993.

Larson, Roland E., Hostetler, Robert P. *Algebra and Trigonometry*. Third edition Heat, 1993.

Z.M.G. Dennis, Dewar Jacqueline M. *Álgebra y Trigonometría*, segunda edición, Mc. Graw Hill, 1992.

Fleming, Walter, Varberg, Dale. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Prentice Hall, tercera edición, 1991.

Budnick, Frank S. *Matemáticas Aplicadas*. Mc. Graw Hill, 1982.

Apostol, Tom M. *Matemáticas Básicas para técnicas*. Volumen 1. Editorial Reverté, S.A.

Lehmann, Charles H. *Geometría*. Limusa, 1986.

Leithold, Louis. *Álgebra Superior*. CECSA. 1985.

Leithold, Louis. El *Cálculo*. Cuarta edición. Harla, 1982.

Clemens/O'Daffer/Coonery. *Geometría*. Addison, Wesley Iberoamericana, 1989.

Zill, Dennis G. *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamericana, 1988.

Taylor, Howard E., Wade Thomas L. *Cálculo*. Limusa, 1976.

Thomas/Finney, *Cálculo con Geometría Analítica*. Sexta edición. Addison, Wesley Iberoamericana, 1987.

Taylor, Howard E., Wade Thomas L. *Geometría Analítica Bidimensional*. Limusa, 1965.

Rees, Paul K., Sparks, Fred W. *Álgebra*, Editorial Reverté. 1979.

Leithold, Louis. *Matemáticas previas al Cálculo*. Harla. 1989.

Peters, Max, Schaaf, William. *Álgebra y Trigonometría*. Editorial Reverté. 1972.

Richardson, Moses. Richardson Leonard. *Fundamentos de Matemáticas*. CECSA, 1976.

Apéndice A

Demostraciones de algunas identidades trigonométricas que aparecen en las secciones 9.3 y 9.6.

Problema 5 del ejercicio de la sección 9.3.

a) $\dfrac{\operatorname{sen} a \quad \sec a}{\tan a + \cot a} \equiv 1 - \cos^2 a$

$$\frac{\operatorname{sen} a \quad \dfrac{1}{\cos a}}{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \dfrac{\cos a}{\operatorname{sen} a}} \equiv \operatorname{sen}^2 a$$

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}{\operatorname{sen} a \cos a}} \equiv \operatorname{sen}^2 a$$

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} a \cos a}} \equiv \operatorname{sen}^2 a$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 a \quad \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a}} \equiv \operatorname{sen}^2 a$$

$$\operatorname{sen}^2 a \equiv \operatorname{sen}^2 a$$

b) $\operatorname{sen} \beta \cot \beta \equiv \cos \beta$

$$\operatorname{sen} \beta \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} \equiv \cos \beta$$

$$\frac{\cancel{\operatorname{sen} \beta} \quad \cos \beta}{\cancel{\operatorname{sen} \beta}} \equiv \cos \beta$$

$$\cos \beta \equiv \cos \beta$$

c) $\tan \alpha \csc \alpha \equiv \sec \alpha$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \equiv \sec \alpha$$

$$\frac{\cancel{\operatorname{sen} \alpha}}{\cos \alpha \cancel{\operatorname{sen} \alpha}} \equiv \sec \alpha$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} \equiv \sec \alpha$$

$$\sec \alpha \equiv \sec \alpha$$

d) $\tan \theta + \cot \theta \equiv \sec \theta \csc \theta$

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \equiv \sec \theta \csc \theta$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} \equiv \sec \theta \csc \theta$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} \equiv \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} \equiv \frac{1}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}$$

e) $\operatorname{sen}^2 u (1 + \cot^2 u) \equiv 1$

$$\operatorname{sen}^2 u (\csc^2 u) \equiv 1$$

$$\operatorname{sen}^2 u \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}\right) \equiv 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 u}{\operatorname{sen}^2 u} \equiv 1$$

$$1 \equiv 1$$

g) $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha - 1}{\cos \alpha} \equiv \tan \alpha - \sec \alpha$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} \equiv \tan\alpha \cdot \sec\alpha$$

$$\tan\alpha \cdot \sec\alpha \equiv \tan\alpha \cdot \sec\alpha$$

i) $$\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta\,(1+\cos\theta)} \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\,(1+\cos\theta)} \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\,(1+\cos\theta)} \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$

k) $$\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \equiv 2\csc x$$

$$\frac{(1+\cos x)(1+\cos x) + (\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)} \equiv 2\csc x$$

$$\frac{1+2\cos x+\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)} \equiv 2\csc x$$

$$\frac{2+2\cos x}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)} \equiv 2\csc x$$

$$\frac{2(1+\cos x)}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)} \equiv 2\csc x$$

$$\frac{2}{\operatorname{sen} x} \equiv 2\csc x$$

$$2\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = 2\csc x$$

$$2 \csc x \equiv 2 \csc x$$

m) $$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} \equiv \frac{\tan\theta}{1 + \tan\theta}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} \equiv \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} \equiv \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\cos\theta(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$$

n) $$\frac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} - \tan\theta \equiv \sec\theta$$

$$\frac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \equiv \sec\theta$$

$$\frac{\cos^2\theta - (1 - \operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta(1 - \operatorname{sen}\theta)} \equiv \sec\theta$$

$$\frac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta(1 - \operatorname{sen}\theta)} \equiv \sec\theta$$

$$\frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta(1 - \operatorname{sen}\theta)} \equiv \sec\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta} \equiv \sec\theta$$

$$\sec\theta \equiv \sec\theta$$

p) $\dfrac{\operatorname{sen} u + \cos u}{\sec u + \tan u} - \dfrac{\operatorname{sen} u - \cos u}{\sec u - \tan u} \equiv 2 - 2\operatorname{sen}^2 u \sec u$

$$\frac{(\operatorname{sen} u + \cos u)(\sec u - \tan u) - (\operatorname{sen} u - \cos u)(\sec u + \tan u)}{\sec^2 u - \tan^2 u} \equiv$$

$$2\text{-}2\operatorname{sen}^2 u \sec u$$

$$\frac{\operatorname{sen} u \sec u - \operatorname{sen} u \tan u + \sec u \cos u - \cos u \tan u}{-\operatorname{sen} u \sec u - \operatorname{sen} u \tan u + \sec u \cos u + \cos u \tan u}$$

así

$$\frac{2 \sec u \cos u - 2 \operatorname{sen} u \tan u}{\sec^2 u - \tan^2 u} \equiv 2 - 2\operatorname{sen}^2 u \sec u$$

$$\frac{2 \sec u \dfrac{1}{\sec u} - 2 \operatorname{sen} u \dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u}}{1} \equiv 2 - 2\operatorname{sen}^2 u \sec u$$

$$2 - \frac{2\operatorname{sen}^2 u}{\cos u} \equiv 2 - 2\operatorname{sen}^2 u \sec u$$

$$2 - 2\operatorname{sen}^2 u \sec u \equiv 2 - 2\operatorname{sen}^2 u \sec u$$

r) $\dfrac{(1 + \tan B)\tan B + \cot B(1 + \cot B)}{(1 + \cot B)(1 + \tan B)} \equiv \tan B + \cot B - 1$

$$\frac{\tan B + \tan^2 B + \cot B + \cot^2 B}{\left(1 + \dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} B}\right)\left(1 + \dfrac{\operatorname{sen} B}{\cos B}\right)} \equiv$$

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen} B}{\cos B} + \dfrac{\operatorname{sen}^2 B}{\cos^2 B} + \dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} B} + \dfrac{\cos^2 B}{\operatorname{sen}^2 B}}{\dfrac{(\operatorname{sen} B + \cos B)(\cos B + \operatorname{sen} B)}{\operatorname{sen} B \cos B}}$$

$$\frac{\text{sen}^3 B \cos B + \text{sen}^4 B + \text{sen} B \cos^3 B + \cos^4 B}{\dfrac{\text{sen}^2 B \cos^2 B}{\dfrac{(\text{sen} B + \cos B)^2}{\text{sen} B \cos B}}} \equiv$$

$$\frac{\text{sen} B \cos B \left[(\text{sen}^4 B + \cos^4 B) + \text{sen} B \cos B (\text{sen}^2 B + \cos^2 B)\right]}{\text{sen}^2 B \cos^2 B (\text{sen}^2 B + 2 \text{sen} B \cos B + \cos^2 B)} \equiv$$

$$\frac{\text{sen}^4 B + \cos^4 B + \text{sen} B \cos B}{\text{sen} B \cos B (1 + 2 \text{sen} B \cos B)} \equiv$$

Si desarrollamos

$(\text{sen}^2 B + \cos^2 B)^2$ tenemos que

$$(\text{sen}^2 B + \cos^2 B)^2 = \text{sen}^4 B + 2 \text{sen}^2 B \cos^2 B + \cos^4 B$$

$$1 = \text{sen}^4 B + 2 \text{sen}^2 B \cos^2 B + \cos^4 B$$

$$1 - 2 \text{sen}^2 B \cos^2 B = \text{sen}^4 B + \cos^4 B$$

y sustituyendo en la identidad, tenemos

$$\frac{1 - 2 \text{sen}^2 B \cos^2 B + \text{sen} B \cos B}{\text{sen} B \cos B (1 + 2 \text{sen} B \cos B)} \equiv \tan B + \cot B - 1$$

$$\frac{-(2 \text{sen}^2 B \cos^2 B - \text{sen} B \cos B - 1)}{\text{sen} B \cos B (1 + 2 \text{sen} B \cos B)} \equiv \frac{\text{sen} B}{\cos B} + \frac{\cos B}{\text{sen} B} - 1$$

$$\frac{(2 \text{sen} B \cos B + 1)(\text{sen} B \cos B - 1)}{\text{sen} B \cos B (1 + 2 \text{sen} B \cos B)} \equiv \frac{\text{sen}^2 B + \cos^2 B - \text{sen} B \cos B}{\text{sen} B \cos B}$$

$$\frac{1 - \text{sen} B \cos B}{\text{sen} B \cos B} = \frac{1 - \text{sen} B \cos B}{\text{sen} B \cos B}$$

f) $$\frac{\sec x - \csc x}{\sec x + \csc x} \equiv \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$$

$$\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot 1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+1}$$

$$\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cancel{\operatorname{sen} x}}\cdot\frac{\cos x}{\cancel{\cos x}}}{\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\cancel{\operatorname{sen} x}\cancel{\cos x}}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}}\cdot\frac{\cos x}{\cancel{\cos x}}}{\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\cancel{\cos x}}}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$$

v) $\cot^2 a\cos^2 a = \cot^2 a\cos^2 a$

$$\frac{\cos^2 a\cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{\cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a}\cos^2 a$$

$$\frac{\cos^4 a}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a\cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a}$$

$$= \frac{\cos^2 a\,(1-\operatorname{sen}^2 a)}{\operatorname{sen}^2 a}$$

$$= \frac{\cos^2 a\cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a}$$

$$= \frac{\cos^4 a}{\operatorname{sen}^2 a}$$

x) $\dfrac{\sec^2 a\tan^2 a}{\sec^4 a+\tan^4 a} = \dfrac{\operatorname{sen}^4 a}{\cos^4 a+2\operatorname{sen}^2 a}$

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 a}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a}}{\frac{1}{\cos^4 a}+\frac{\operatorname{sen}^4 a}{\cos^4 a}} = \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^4 a+2\operatorname{sen}^2 a}$$

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^4 a}}{\dfrac{1 + \operatorname{sen}^4 a}{\cos^4 a}} \equiv \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^4 a + 2\operatorname{sen}^2 a}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 a}{1 + \operatorname{sen}^4 a} \equiv \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^4 a + 2\operatorname{sen}^2 a}$$

Esta es una identidad si

$$1 + \operatorname{sen}^4 a \equiv \cos^4 a + 2\operatorname{sen}^2 a$$

$$1 + \operatorname{sen}^4 a - \cos^4 a + \cos^4 a \equiv \cos^4 a + 2\operatorname{sen}^2 a$$

$$1 + \cos^4 a + (\operatorname{sen}^4 a - \cos^4 a) \equiv \cos^4 \alpha + 2\operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$1 + \cos^4 \alpha + (\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 a)(\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 a) \equiv \cos^4 a + 2\operatorname{sen}^2 a$$

$$1 + \cos^4 a + \operatorname{sen}^2 a - \cos^2 a \equiv \cos^4 a + 2\operatorname{sen}^2 a$$

$$1 + \cos^4 a + \operatorname{sen}^2 a - (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \equiv \cos^4 a + 2\operatorname{sen}^2 a$$

$$1 + \cos^4 a + \operatorname{sen}^2 a - 1 + \operatorname{sen}^2 a \equiv \cos^4 a + 2\operatorname{sen}^2 a$$

$$\cos^4 a + 2\operatorname{sen}^2 a \equiv \cos^4 a + 2\operatorname{sen}^2 a$$

z) $$\frac{\operatorname{sen} A + \cos A - 1}{\operatorname{sen} A - \cos A + 1} \equiv \frac{\cos A}{1 + \operatorname{sen} A}$$

$$\frac{(\operatorname{sen} A + \cos A - 1)(\operatorname{sen} A + (\cos A - 1))}{(\operatorname{sen} A - (\cos A - 1))(\operatorname{sen} A + (\cos A - 1))} \equiv \frac{\cos A}{1 + \operatorname{sen} A}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A + 1 + 2\operatorname{sen} A \cos A - 2\operatorname{sen} A - 2\cos A}{\operatorname{sen}^2 A - (\cos A - 1)^2} \equiv \frac{\cos A}{1 + \operatorname{sen} A}$$

$$\frac{2 + 2 \operatorname{sen} A \cos A - 2 \operatorname{sen} A - 2 \cos A}{\operatorname{sen}^2 A - \cos^2 A + 2 \cos A - 1} \equiv \frac{\cos A}{1 + \operatorname{sen} A}$$

$$\frac{2 \operatorname{sen} A (\cos A - 1) - 2 (\cos A - 1)}{1 - \cos^2 A - \cos^2 A + 2 \cos A - 1} \equiv \frac{\cos A}{1 + \operatorname{sen} A}$$

$$\frac{2 (\cos A - 1) (\operatorname{sen} A - 1)}{-2 \cos^2 A + 2 \cos A} \equiv \frac{\cos A}{1 + \operatorname{sen} A}$$

$$\frac{2 (\cos A - 1) (\operatorname{sen} A - 1)}{-2 \cos (\cos A - 1)} \equiv \frac{\cos A (1 - \operatorname{sen} A)}{(1 + \operatorname{sen} A) (1 - \operatorname{sen} A)}$$

$$\frac{-(\operatorname{sen} A - 1)}{\cos A} \equiv \frac{\cos A (1 - \operatorname{sen} A)}{1 - \operatorname{sen}^2 A}$$

$$\frac{1 - \operatorname{sen} A}{\cos A} \equiv \frac{\cos A (1 - \operatorname{sen} A)}{\cos^2 A}$$

$$\frac{1 - \operatorname{sen} A}{\cos A} \equiv \frac{1 - \operatorname{sen} A}{\cos A}$$

b') $$\operatorname{sen} C + \cos C + \frac{\operatorname{sen} C}{\cot C} \equiv \sec C + \csc C - \frac{\cos C}{\tan C}$$

$$\operatorname{sen} C + \cos C + \frac{\operatorname{sen} C}{\dfrac{\cos C}{\operatorname{sen} C}} \equiv \frac{1}{\cos C} + \frac{1}{\operatorname{sen} C} \frac{\cos C}{\dfrac{\operatorname{sen} C}{\cos C}}$$

$$\operatorname{sen} C + \cos C + \frac{\operatorname{sen}^2 C}{\cos C} \equiv \frac{1}{\cos C} + \frac{1}{\operatorname{sen} C} - \frac{\cos^2 C}{\operatorname{sen} C}$$

$$\frac{\operatorname{sen} C \cos C + \cos^2 C + \operatorname{sen}^2 C}{\cos C} \equiv \frac{1}{\cos C} + \frac{1 - \cos^2 C}{sen\ C}$$

$$\frac{\operatorname{sen} C \cos C + 1}{\cos C} \equiv \frac{1}{\cos C} + \frac{\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen} C}$$

$$\frac{1 + \operatorname{sen} C \cos C}{\cos C} \quad \frac{1}{\cos C} + \operatorname{sen} C$$

$$\frac{1 + \operatorname{sen} C \cos C}{\cos C} \equiv \frac{1 + \operatorname{sen} C \cos C}{\cos C}$$

d') $2(1 + \operatorname{sen} x)(1 + \cos x) \equiv (1 + \operatorname{sen} x + \cos x)^2$

$$2(1 + \cos x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x) \equiv$$
$$1 + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x + 2 \cos x + 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$2(1 + \cos x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x) \equiv$$
$$2 + 2 \operatorname{sen} x + 2 \cos x + 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$2(1 + \cos x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x) \equiv$$
$$2(1 + \operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen} x \cos x)$$

f') $\dfrac{\cot A + \cot B}{\tan A + \tan B} + \dfrac{1 - \cot A \cot B}{1 - \tan A \tan B} \equiv 0$

$$\frac{\dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A} + \dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} B}}{\dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + \dfrac{\operatorname{sen} B}{\cos B}} + \frac{1 - \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A}\dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} B}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}\dfrac{\operatorname{sen} B}{\cos B}} \equiv 0$$

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen} B \cos A + \operatorname{sen} A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}}{\dfrac{\operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A}{\cos A \cos B}} + \frac{\dfrac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}}{\dfrac{\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B}} \equiv 0$$

$$\frac{\cos A \cos B (\operatorname{sen} B \cos A + \operatorname{sen} A \cos B)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B (\operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A)} +$$

$$\frac{\cos A \cos B (\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - \cos A \cos B)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B (\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B)} \equiv 0$$

$$\frac{\cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} + \frac{-\cos A \cos B (\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B (\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B)} \equiv 0$$

$$\cot A \cot B - \cot A \cot B \equiv 0$$
$$0 \equiv 0$$

h') $$\frac{\operatorname{sen}^3 t}{\tan t - \operatorname{sen} t} \equiv \frac{\operatorname{sen}^2 t \cos t}{1 - \cos t}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^3 t}{\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t} - \operatorname{sen} t} \equiv \frac{\operatorname{sen}^2 t \cos t}{1 - \cos t}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^3 t}{\dfrac{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t \cos t}{\cos t}} \equiv \frac{\operatorname{sen}^2 t \cos t}{1 - \cos t}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^3 t \cos t}{\operatorname{sen} t (1 - \cos t)} \equiv \frac{\operatorname{sen}^2 t \cos t}{1 - \cos t}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t \cos t}{1 - \cos t} \equiv \frac{\operatorname{sen}^2 t \cos t}{1 - \cos t}$$

j') $$\frac{2 \tan \alpha \sec \alpha + \sec \alpha}{3 + \tan \alpha - 2 \sec^2 \alpha} \equiv \frac{1}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\frac{\sec \alpha (2 \tan \alpha + 1)}{3 + \tan \alpha - 2 (1 + \tan^2 \alpha)} \equiv \frac{1}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\frac{\sec \alpha (2 \tan \alpha + 1)}{1 + \tan \alpha - 2 \tan^2 \alpha} \equiv \frac{1}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\frac{\sec \alpha (2 \tan \alpha + 1)}{(2 \tan \alpha + 1)(1 - \tan \alpha)} \equiv \frac{1}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\frac{\sec \alpha}{1 - \tan \alpha} \equiv \frac{1}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\frac{\dfrac{1}{1 - \tan \alpha}}{\sec \alpha} \equiv \frac{1}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\sec \alpha} - \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} \equiv \frac{1}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\cos \alpha} - \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} \equiv \frac{1}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}$$

l') $(\operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B)^2 + (\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B)^2 \equiv 1$

$\operatorname{sen}^2 A \cos^2 B - 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos A \cos B + \cos^2 A \operatorname{sen}^2 B +$

$+ \cos^2 A \cos^2 B + 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos A \cos B + \operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen}^2 B \equiv 1$

$\cos^2 B (\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) + \operatorname{sen}^2 B (\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) \equiv 1$

$(\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A)(\cos^2 B + \operatorname{sen}^2 B) \equiv 1$
$(1)(1) \equiv 1$
$1 \equiv 1$

n') $\operatorname{sen}^2 A \tan^2 A + \cos^2 A \cot^2 A \equiv \tan^2 A + \cot^2 A - 1$

$$\operatorname{sen}^2 A \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} + \cos^2 A \frac{\cos^2 A}{\operatorname{sen}^2 A} \equiv \tan^2 A + \cot^2 A - 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^4 A}{\cos^2 A} + \frac{\cos^4 A}{\operatorname{sen}^2 A} \equiv \tan^2 A + \cot^2 A - 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^6 A + \cos^6 A}{\cos^2 A \operatorname{sen}^2 A} \equiv \tan^2 A + \cot^2 A - 1$$

$$\frac{(\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A)(\cos^4 A - \operatorname{sen}^2 A \cos^2 A + \operatorname{sen}^4 A)}{\cos^2 A \operatorname{sen}^2 A} \equiv$$

$$\frac{\cos^4 A}{\cos^2 A \operatorname{sen}^2 A} - \frac{\operatorname{sen}^2 A \cos^2 A}{\cos^2 A \operatorname{sen}^2 A} + \frac{\operatorname{sen}^4 A}{\cos^2 A \operatorname{sen}^2 A} \equiv \tan^2 A + \cot^2 A - 1$$

$$\frac{\cos^2 A}{\operatorname{sen}^2 A} - 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} \equiv \tan^2 A + \cot^2 A - 1$$

$$\cot^2 A - 1 + \tan^2 A \equiv \tan^2 A + \cot^2 A - 1$$

o') $$1 + \cot A \equiv \frac{(1 - \cot^2 A) \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A - \cos A}$$

$$1 + \cot A \equiv \frac{\left(1 - \dfrac{\cos^2 A}{\operatorname{sen}^2 A}\right) \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A - \cos A}$$

$$\equiv \frac{\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 A - \cos^2 A}{\operatorname{sen}^2 A}\right) \operatorname{sen} A}{\dfrac{\operatorname{sen} A - \cos A}{1}}$$

$$\equiv \frac{\operatorname{sen} A (\operatorname{sen} A - \cos A)(\operatorname{sen} A + \cos A)}{(\operatorname{sen} A - \cos A) \operatorname{sen}^2 A}$$

$$\equiv \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 A} + \frac{\operatorname{sen} A \cos A}{\operatorname{sen}^2 A}$$

$$\equiv 1 + \cot A$$

q') $$\frac{\cot A}{\sec A - \tan A} - \frac{\cos A}{\sec A + \tan A} \equiv \csc A + \operatorname{sen} A$$

$$\frac{\cot A (\sec A + \tan A) - \cos A (\sec A - \tan A)}{\sec^2 A - \tan^2 A} \equiv \csc A + \operatorname{sen} A$$

$$\frac{\dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A}\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A}\dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A} - \dfrac{\cos A}{1}\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{\cos A}{1}\dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}}{1} \equiv \csc A + \operatorname{sen} A$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} A} + 1 - 1 + \operatorname{sen} A \equiv \csc A + \operatorname{sen} A$$

$$\csc A + \operatorname{sen} A \equiv \csc A + \operatorname{sen} A$$

s') $\operatorname{sen}^2 c + 2\cos^2 c + \cos^2 c \cot^2 c \equiv \csc^2 c$

$$\operatorname{sen}^2 c + \cos^2 c + \cos^2 c + \cos^2 c \frac{\cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 c} \equiv \csc^2 c$$

$$1 + \cos^2 c + \frac{\cos^4 c}{\operatorname{sen}^2 c} \equiv \csc^2 c$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 c + \operatorname{sen}^2 c \cos^2 c + \cos^4 c}{\operatorname{sen}^2 c} \equiv \csc^2 c$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 c + \cos^2 c (\operatorname{sen}^2 c + \cos^2 c)}{\operatorname{sen}^2 c} \equiv \csc^2 c$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 c + \cos^2 c (1)}{\operatorname{sen}^2 c} \equiv \csc^2 c$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 c} \equiv \csc^2 c$$

Problema 5 del ejercicio de la sección 9.6

a) $\operatorname{sen}(A - B)\operatorname{sen}(A + B) \equiv \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B$

$(\operatorname{sen} A \cos B - \operatorname{sen} B \cos A)(\operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A) \equiv \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B$

$$\operatorname{sen}^2 A \cos^2 B - \operatorname{sen}^2 B \cos^2 A \equiv \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B$$

$$\operatorname{sen}^2 A (1 - \operatorname{sen}^2 B) - \operatorname{sen}^2 B (1 - \operatorname{sen}^2 A) \equiv \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B$$

$$\operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen}^2 B \equiv \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B$$

$$\operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B \equiv \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B$$

c) $$\frac{2 \tan A}{2 \tan 2A} \equiv \frac{1 - \tan^2 A}{2}$$

$$\frac{\dfrac{\tan A}{2 \tan A}}{1 - \tan^2 A} \equiv \frac{1 - \tan^2 A}{2}$$

$$\frac{\tan A (1 - \tan^2 A)}{2 \tan A} \equiv \frac{1 - \tan^2 A}{2}$$

$$\frac{1 - \tan^2 A}{2} \equiv \frac{1 - \tan^2 A}{2}$$

e) $$\operatorname{sen} 2x \sec x + \cos 2x \csc x \equiv \csc x$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x \frac{1}{\cos x} + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \frac{1}{\operatorname{sen} x} \equiv \csc x$$

$$2 \operatorname{sen} x + \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} \equiv \csc x$$

$$\frac{2 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} \equiv \csc x$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x} \equiv \csc x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} \equiv \csc x$$

$$\csc x \equiv \csc x$$

g) $$\operatorname{sen} B \cos^3 B - \cos B \operatorname{sen}^3 B \equiv (1/4) \operatorname{sen} 4B$$

$$\operatorname{sen} B \cos B (\cos^2 B - \operatorname{sen}^2 B)$$

$$(1/2)\ \text{sen}\ 2B\ \cos 2B \equiv (1/4)\ \text{sen}\ 4B$$

$$(1/2)\ \text{sen}\ 2B\ \cos 2B \equiv (1/4)\ \text{sen}\ 2(2B)$$

$$(1/2)\ \text{sen}\ 2B\ \cos 2B \equiv (1/4)(2\ \text{sen}\ 2B\ \cos 2B)$$

$$(1/2)\ \text{sen}\ 2B\ \cos 2B \equiv (1/2)\ \text{sen}\ 2B\ \cos 2B$$

i) $$\frac{\text{sen}\ \beta + \cos 2\beta - 1}{\cos\beta - \text{sen}\ 2\beta} \equiv \tan\beta$$

$$\frac{\text{sen}\ \beta + (1 - 2\ \text{sen}^2\ \beta) - 1}{\cos\beta - 2\ \text{sen}\ \beta\ \cos\beta} \equiv \tan\beta$$

$$\frac{\text{sen}\ \beta + 1 - 2\ \text{sen}^2\ \beta - 1}{\cos\beta - 2\ \text{sen}\ \beta\ \cos\beta} \equiv \tan\beta$$

$$\frac{\text{sen}\ \beta\ (1 - 2\ \text{sen}\ \beta)}{\cos\beta\ (1 - 2\ \text{sen}\ \beta)} \equiv \tan\beta$$

$$\tan\beta \equiv \tan\beta$$

k) $$\tan 3\theta \equiv \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

$$\tan(2\theta + \theta) \equiv \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

$$\frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta\ \tan\theta} \equiv \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

$$\frac{\dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} + \tan\theta}{1 - \left(\dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}\right)\tan\theta} \equiv \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

$$\frac{\dfrac{2\tan\theta + (1-\tan^2\theta)\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}{\dfrac{1-\tan^2\theta-2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}} \equiv \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

$$\frac{2\tan\theta+\tan\theta-\tan^3\theta}{1-\tan^2\theta-2\tan^2\theta} \equiv \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

$$\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta} \equiv \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

m) $\dfrac{\operatorname{sen} 3A}{\cos A} + \dfrac{\cos 3A}{\operatorname{sen} A} \equiv 2\cot 2A$

$$\frac{\operatorname{sen}(A+2A)}{\cos A} + \frac{\cos(2A+A)}{\operatorname{sen} A} \equiv 2\cot 2A$$

$$\frac{\operatorname{sen} A\cos 2A + \operatorname{sen} 2A\cos A}{\cos A} + \frac{\cos 2A\cos A - \operatorname{sen} 2A\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A} \equiv$$

$$\equiv 2\cot 2A$$

$$\frac{\operatorname{sen} A(2\cos^2 A-1)}{\cos A} + \frac{2\operatorname{sen} A\cos^2 A}{\cos A} + \frac{(1-2\operatorname{sen}^2 A)\cos A}{\operatorname{sen} A} -$$

$$-2\operatorname{sen} A\cos A \equiv 2\cot 2A$$

$$2\operatorname{sen} A\cos A - \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + 2\operatorname{sen} A\cos A + \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$$

$$-2\operatorname{sen} A\cos A - 2\operatorname{sen} A\cos A \equiv 2\cot 2A$$

$$\frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} - \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} \equiv 2\cot 2A$$

$$\frac{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen} A \cos A} = 2 \cot 2A$$

$$\frac{\cos 2A}{(1/2) \operatorname{sen} 2A} \equiv 2 \cot 2A$$

$$\frac{2 \cos 2A}{\operatorname{sen} 2A} \equiv 2 \cot 2A$$

$$2 \cot 2A \equiv 2 \cot 2A$$

ñ) $$\frac{\tan 2c}{\tan c} \equiv \frac{2 \cot^2 c}{\cot^2 c - 1}$$

$$\frac{\dfrac{2 \tan c}{1 - \tan^2 c}}{\dfrac{\tan c}{1}} \equiv \frac{2}{\dfrac{\cot^2 c - 1}{\cot^2 c}}$$

$$\frac{2 \tan c}{(1 - \tan^2 c)(\tan c)} \equiv \frac{2}{1 - \dfrac{1}{\cot^2 c}}$$

$$\frac{2}{1 - \tan^2 c} \equiv \frac{2}{1 - \tan^2 c}$$

p) $$\frac{\tan (A/2) + \cot (A/2)}{\cot (A/2) - \tan (A/2)} \equiv \sec A$$

$$\frac{\dfrac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A} + \dfrac{\operatorname{sen} A}{1 - \cos A}}{\dfrac{\operatorname{sen} A}{1 - \cos A} - \dfrac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A}} \equiv \sec A$$

$$\frac{\dfrac{(1 - \cos A)^2 + \operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen} A (1 - \cos A)}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2 A - (1 - \cos A)^2}{\operatorname{sen} A (1 - \cos A)}} \equiv \sec A$$

$$\frac{1 - 2\cos A + \cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 A - (1 - 2\cos A + \cos^2 A)} \equiv \sec A$$

$$\frac{2 - 2\cos A}{\operatorname{sen}^2 A - \cos^2 A - 1 + 2\cos A} \equiv \sec A$$

$$\frac{2(1 - \cos A)}{1 - \cos^2 A - \cos^2 A - 1 + 2\cos A} \equiv \sec A$$

$$\frac{2(1 - \cos A)}{-2\cos^2 A + 2\cos A} \equiv \sec A$$

$$\frac{2(1 - \cos A)}{2\cos A(1 - \cos A)} \equiv \sec A$$

$$\sec A \equiv \sec A$$

r) $$\frac{\operatorname{sen} 4a \cos 2a - \cos 4a \operatorname{sen} 2a}{\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a} \equiv \tan 2a$$

$$\frac{\operatorname{sen}(4a - 2a)}{\cos 2a} \equiv \tan 2a$$

$$\frac{\operatorname{sen} 2a}{\cos 2a} \equiv \tan 2a$$

$$\tan 2a \equiv \tan 2a$$

Apéndice B

Manejo de tablas trigonométricas y logarítmicas

En las tablas de los valores de las funciones trigonométricas se observa que los ángulos de 0° a 45° aparecen en la columna izquierda y los de 45° a 90° en la derecha. En los primeros la función está indicada en la parte superior de la tabla y para los ángulos de 45° a 90°, la función está colocada en la parte inferior. Una parte de la tabla se reproduce aquí, con aproximaciones a cuatro decimales.

Valores de las Funciones Trigonométricas

Grados	*Radianes*	*Sen θ*	*csc θ*	*tan θ*	*cot θ*	*sec θ*	*cos θ*		
9°00′	.1571	.1564	6.392	.1584	6.314	1.012	.9877	1.4137	81°00′
10′	.1600	.1593	6.277	.1614	6.197	1.013	.9872	1.4108	50′
20′	.1629	.1622	6.166	.1644	6.084	1.013	.9868	1.4079	40′
30′	.1658	.1650	6.059	.1673	5.976	1.014	.9863	1.4050	30′
40′	.1687	.1679	5.955	.1703	5.871	1.014	.9858	1.4021	20′
50′	.1716	.1708	5.855	.1733	5.769	1.015	.9853	1.3992	10′
10°00′	.1745	.1736	5.759	.1763	5.671	1.015	.9848	1.3963	80°00′
10′	.1774	.1765	5.665	.1793	5.576	1.016	.9843	1.3934	50′
20′	.1804	.1794	5.575	.1823	5.485	1.016	.9838	1.3904	40′
30	.1833	.1822	4.487	.1853	5.396	1.017	.9833	1.3875	30′
20′	.1862	.1851	4.403	.1883	5.309	1.018	.9827	1.3846	20′
50′	.1891	.1880	5.320	.1914	6.226	1.018	.9822	1.3817	10′
11°00′	.1920	.1908	5.241	.1944	5.145	1.019	.9816	1.3788	79°00′
10′	.1949	.1937	5.164	.1974	5.066	1.019	.9811	1.3759	50′
20′	.1978	.1965	5.089	.2004	4.989	1.020	.9805	1.3730	40′
30′	.2007	.1994	5.016	.2035	4.915	1.020	.9799	1.3701	30′
40′	.2036	.2022	4.945	.2065	4.843	1.021	.9793	1.3672	20′
50′	.2065	.2051	4.876	.2095	4.773	1.022	.9787	1.3643	10′
		cos θ	*sec θ*	*cot θ*	*tan θ*	*csc θ*	*sen θ*	Radianes	Grados

Ejemplo.

1. Encontrar el valor de las siguientes funciones:

   a) sen 11° = 0.1908
   Como 11° está a la izquierda de la tabla, la función seno se encuentra en la parte superior
   b) tan 10°50′ = 0.1914
   c) cot 80°20′ = 0.1703
   El ángulo 80°20′ está a la derecha de la tabla y la función cot se encuentra en la parte inferior de la tabla
   d) csc 79°30′ = 1.017

Si las funciones que se necesitan entre 0° y 90° no aparecen en las tablas, hay que utilizar el método de interpolación, el cual nos dice que si un ángulo queda entre dos en la tabla, sus funciones trigonométricas están a distancias proporcionales de las funciones correspondientes.

Ejemplos.

2. Calcular sen 32° 18′.

32°18′ está entre 32°10′ y 32°20′ y sen 32°18′ está entre sen 32° 10′ y sen 32°20′ y así, por interpolación, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 10' \left\{\begin{array}{l} \\ 8' \left\{\begin{array}{lcl} \text{sen } 32°10' & = & .5324 \\ \text{sen } 32°18' & = & a \end{array}\right. \\ \\ \text{sen } 32°20' = .5348 \end{array}\right. \end{array}\right\} \begin{array}{l} x \\ \\ .0024 \end{array}$$

donde 8, 10, x y .0024 son las diferencias y la proporción es:

$$\frac{8}{10} = \frac{x}{.0024}$$

$$\frac{8\,(.0024)}{10} = x$$

$$\frac{.0192}{10} = x$$

$$x = .00192$$

por tanto, el número $a = .5324 + .00192$

$$= .53432$$

de donde, sen 32°18′ = .53432.

3. Calcular cos 61°25′.

$$\left.\begin{array}{l} 10' \left\{\begin{array}{l} \\ 5' \left\{\begin{array}{lcl} \cos 61°20' & = & .4797 \\ \cos 61°25' & = & a \end{array}\right. \\ \\ \cos 61°30' = .4772 \end{array}\right. \end{array}\right\} \begin{array}{l} x \\ \\ .0025 \end{array}$$

la proporción que se forma es:

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{.0025}$$

$$x = \frac{5(.0025)}{10} = 5(.00025) = .00125$$

y así, el número $a = .4797 - .00125$

$= .47845$

Observación. Al interpolar algunas veces es necesario sumar y a veces restar los valores encontrados, esto dependerá directamente de la función y de si sus valores van en forma creciente o decreciente.

Podemos tener también la operación inversa a ésta si se nos pregunta el ángulo de una función trigonométrica dado su valor. El proceso para encontrarlo será buscar en las tablas el dicho valor y observar a qué ángulo corresponde.

Ejemplo.

4. Calcular θ, si sen $\theta = .7735$.

Buscamos entre todos los valores de las hojas de seno y coseno y encontraremos:

$$\text{sen } 50°40' = .7735$$

$$\text{de donde:} \quad \theta = 50°40'$$

5. Calcular θ, si cot $\theta = .5945$

Interpolando obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 10' & \left\{\begin{array}{lcl} x & \left\{\begin{array}{lcl} \cot 59°10' & = & .5969 \\ \cot\theta & = & .5945 \\ \cot 59°20' & = & .5930 \end{array}\right. & .0024 \end{array}\right. & .0039 \end{array}\right.$$

Entonces la proporción es:

$$\frac{x}{10} = \frac{.0024}{.0039}$$

$$x = \frac{10\,(24)}{39} = \frac{240}{39} \approx 6$$

de donde, $\theta = 59°10' + 0°\,6'$

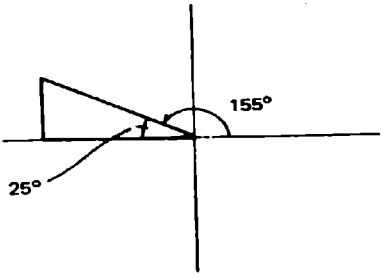
$= 59°16'$

Las tablas trigonométricas sólo nos sirven para ángulos entre 0° y 90°, pero si queremos encontrar ángulos mayores que 90° seguiremos el siguiente procedimiento:

1o. Trazar en un eje de coordenadas el ángulo dado en posición normal y determinar su ángulo reducido.
2o. Determinar el signo de la función trigonométrica según en el cuadrante que quede el ángulo.
3o. Hallar el valor de la misma función trigonométrica del ángulo reducido.

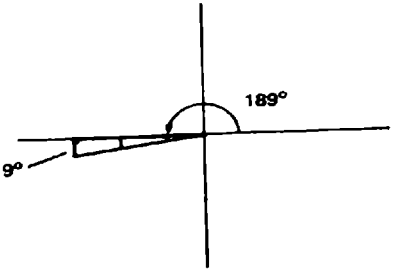
Ejemplos.

6. Hallar cos 155°



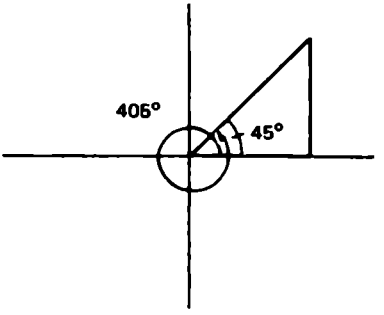
El ángulo reducido es 25° y el coseno es negativo en el segundo cuadrante.
Así: $\cos 155° = -\cos 25° = -.9063$

7. Hallar sen 189°



El ángulo reducido es: $189° - 180° = 9°$ y la función seno es negativa en el tercer cuadrante. Así: $\text{sen } 189° = -\text{sen } 9° = -.1564$.

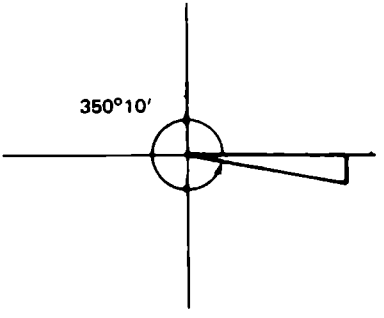
8. Sec $405°$ =



El ángulo reducido de $405°$ es $405° - 360° = 45°$ y la secante es positiva en el primer cuadrante:

$$\sec 405° = \sec 45° = \sqrt{2}.$$

9. Hallar cos $350°10'$



El ángulo reducido es $360° - 350°10' = 9°50'$ y el coseno es positivo en el cuarto cuadrante. Así: $\cos 350°10' = \cos 9°50' = .9853$.

Los valores de las funciones trigonométricas de los números reales se pueden encontrar considerando el número real como un ángulo expresado en radianes, para después expresar este ángulo mediante el correspondiente ángulo en grados.

Ejemplos.

10. Sen (3.1416) = sen π (radianes) = sen 180° = 0.

11. Tan 3 = tan 3 radianes = tan 3 $\left(\frac{180°}{\pi}\right)$ = tan 171.9°

12. Sec (9.42) = sec 3(3.14) = sec 3 π = sec 540°

Existen tablas de las funciones trigonométricas de números reales que se manejarán de la misma forma, pero para mayor facilidad se puede cambiar a grados.

Logaritmos especiales y manejo de tablas

Cualquier número positivo diferente de uno puede ser tomado como base, pero sólo dos números son usados con este fin: el número 10 y el número decimal infinito $e = 2.718281\ldots$ Los logaritmos en base 10 son conocidos como *logaritmos vulgares*, decimales o de Buggs y se representan por log N (sin colocar la base); los logaritmos en base e son llamados logaritmos naturales o *naperianos* (John Naper, 1550-1617) y se representan por $\log_e N$ o $\ln N$. En este texto sólo consideraremos los logaritmos decimales.

Para encontrar el logaritmo de un número cualquiera en base 10, es necesario expresar el número en notación científica (base 10). Cualquier número N se puede expresar como:

$$N = n \cdot 10^c$$

en donde $1 \leq n < 10$ y c es un entero.

Ejemplos.

13. $8357.21 = 8.35721 \times 10^3$
14. $597 = 5.97 \times 10^2$
15. $0.0000257 = 2.57 \times 10^{-5}$
16. $8 = 8 \times 10^0$
17. $0.023 = 2.3 \times 10^{-2}$
18. $0.4738 = 4.738 \times 10^{-1}$

Cuando se busca el logaritmo de cualquier número y éste se halla en notación científica, observamos que sólo es necesario conocer los logaritmos entre 1 y 10, ya que si:

$$\begin{aligned} N &= n \cdot 10^c \\ \log N &= \log n \cdot 10^c \\ &= \log n + \log 10^c \\ &= \log n + c \log 10 \end{aligned}$$

pero $\log_{10} 10 = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \log N &= \log n + c(1) \\ \log N &= \log n + c \\ \log N &= c + \log n \end{aligned}$$

donde c es el exponente de la potencia y n es un número entre 1 y 10. Pero aquí podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿cómo encontrar los logaritmos entre 1 y 10 en base 10? Esta respuesta no es sencilla y se requieren conocimientos de series y límites que están fuera de nuestro alcance. Pero lo más importante es que no tendremos que calcularlos, pues los podemos encontrar en forma de tablas de logaritmos, como las que incluimos al final del libro.

Observaciones.

a) Si deseamos encontrar el $\log_{10} N$ sólo es necesario transformar N a notación científica:

$$\log N = \log (n \times 10^c)$$

donde n es un número entre 1 y 10 y c es un entero. El resultado del logaritmo es la suma de c y $\log n$. O sea: $\log N = c + \log_{10} n$, donde el $\log n$ se buscará en las tablas de logaritmos.

b) Los sumandos en $\log N$ reciben nombres en especial, a c se le llama *característica* del $\log N$ y a $\log_{10} n$ se le llama *mantisa* del $\log N$.

Veamos en los siguientes ejemplos cómo podemos utilizar la tabla para obtener el logaritmo de cualquier número.

Ejemplos.

19. Obtener el $\log_{10} 28.5$.

Transformando 28.5 a notación científica tenemos:

$$\begin{aligned} 28.5 &= 2.85 \times 10^1 \\ \log 28.5 &= \log (2.85 \times 10^1) \\ &= 1 + \log 2.85. \end{aligned}$$

Para localizar log 2,85. primero buscamos 2.8 en la columna M y anotamos el número que está en la fila del 2.8 y en la columna del 5 de la sección segunda décima, que es .4548.

$$\begin{aligned} \log 28.5 &= 1 + \log 2.85 \\ &= 1 + .4548 \\ &= 1.4548 \end{aligned}$$

20. Obtener el $\log_{10} 2.835$.

Buscamos el 2,8 en la columna M y anotamos el número que está en la fila del 2.8 y en la columna 3 de la segunda sección que es .4518, ahora buscamos el número que está en la misma fila, pero en la columna 5 de la sección partes proporcionales, que es 8. Sumamos .4518 + .0008 = .4526

$$\begin{aligned} \log 2.835 &= \log 2.835 \times 10^0 \\ &= 0 + \log 2.835 \\ &= 0 + .4526 \\ &= 0.4526 \end{aligned}$$

21. Obtener el $\log_{10} 0.0002835$.

$$\begin{aligned} \log 0.0002835 &= \log_{10} 2.835 \times 10^{-4} \\ &= -4 + \log_{10} 2.835 \\ &= (-4) + .4526 \\ &= -4 + 0.4526 \end{aligned}$$

Observaciones.

a) Si la parte entera de un número es negativa, se acostumbra dejar indicada la suma como en el último ejemplo o colocarle el signo negativo arriba del número:

$$-4 + 0.4526 \quad \text{ó} \quad \bar{4}.4526$$

b) La parte decimal o mantisa del logaritmo de un número siempre es positiva.

c) Es importante hacer notar que como:

$$1 \leqslant n < 10$$

entonces:

$$\begin{aligned} \log 1 \leqslant \log n &< \log 10 \\ 0 \leqslant \log n &< 1 \end{aligned}$$

O sea, que $\log n$ es siempre un decimal positivo menor que 1.

d) c siempre es un entero.

e) Si c es negativo, se debe tener cuidado de mantener separada la característica de la mantisa, ya que la mantisa siempre es positiva.

f) Si c es positiva o cero, se puede sumar a $\log n$ sin que se altere la característica ni la mantisa.

Las tablas nos dan el logaritmo de un número que tiene 4 decimales o menos y si tiene 5 o más decimales es necesario interpolar.

Ejemplo.

22. Obtener el log 67.584.

Buscaremos el logaritmo de los números más cercanos a 67.584, que son:

$$\log 67.580 \text{ y } \log 67.590$$

Se procede de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \log 67.580 &= 1.8298 \\ \log 67.584 &= x \\ \log 67.590 &= 1.8299 \end{aligned}$$

Como log 67.584 debe estar entre 1.8298 y 1.8299 se forma una proporción con las diferencias de los números de los logaritmos y el resultado de los logaritmos:

$$10 \left\{ \begin{array}{lll} 4 & \log 67.580 = 1.8298 & \\ & \log 67.584 = x & x \\ & \log 67.590 = 1.8299 & \end{array} \right\} 1$$

$$\frac{4}{10} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{4}{10}$$

$$x = .4$$

$$\begin{aligned} \log 67.584 &= 1.8298 + .00004 \\ &= 1.82984 \end{aligned}$$

Se puede tener la operación contraria a encontrar el logaritmo de un número. Por ejemplo, se desea encontrar N sabiendo que:

$$\log N = 2.9899.$$

Al proceso de encontrar N se le conoce como hallar el *antilogaritmo* de N. Para saber N a partir de $\log N = 2.9899$ haremos lo siguiente:

Puesto que 2 es la característica de $\log N$ y .9899 es la mantisa,

$$N = n \times 10^2$$

de donde log $n = .9899$ y podemos encontrar n usando la tabla de logaritmos de dentro hacia afuera, es decir, buscando el número .9899 dentro de la tabla y observamos que está en la fila 9.7 y columna 7, lo que significa que:

$$\log 9.77 = .9899 \quad \text{y} \quad n = 9.77$$
$$N = 9.77 \times 10^2$$
$$N = 977.$$

Ejemplos.

23. Hallar N si $\log N = 0.3715 + (-4)$

$$N = n + 10^{-4}, \log n = .3715$$

.3715 no está en la tabla pero está entre .3711 y .3729. La diferencia entre 3711 y 3715 es 4 y 3715 está en la fila 2.3 columna 5, mientras que el 4 está en la columna 2 de partes proporcionales. Por lo tanto, $n = 2.352$, y

$$N = 2.352 \times 10^{-4}$$
o sea, $$N = 0.0002352.$$

24. Hallar N si $\log N = -4.5371$.

Aquí: $-4.5371 = -4 - 0.5371$.

En este caso, el signo negativo está afectando tanto a la parte entera como decimal y sabemos que la parte decimal del logaritmo de un número nunca es negativa, por lo que tenemos que hacer un cambio, pero que sea equivalente al número dado.
Para lograr que la parte decimal o mantisa sea positiva, lo que se hará es sumarle 1 a la parte decimal y restarle 1 a la parte entera de este modo:

$$\begin{aligned} -4.5371 &= -4 - 0.5371 + 1 - 1 \\ &= (-4 - 1) + (-0.5371 + 1) \\ &= (-5) + (.4629) \\ &= -5 + .4629 \end{aligned}$$
$$\log(-4.5371) = \log(-5 + .4629).$$

Para encontrar el logaritmo se procederá de la misma forma que en el ejemplo anterior:

$$N = n \times 10^{-5} \quad \text{y} \quad \log n = 0.4629$$

y buscando en la tabla, tenemos que:

$$\log 2.903 = 0.4629$$

y

$$n = 2.9033$$

$$N = 2.9033 \times 10^{-5}$$

$$= 0.00002903$$

Respuestas a los ejercicios

Sección 1.1

2. *a*) F
   b) V
   c) V
   d) F
   e) F
   f) F
   g) V
   h) V
   i) V
   j) F

4. Hay muchas formas de responder, ésta es sólo una de ellas:

   a) { Enteros positivos pares menores que 21 }
   b) { Enteros positivos }
   c) { Consonantes que están colocadas antes de la *n* }
   d) { Presidentes de México después de López Mateos y antes de López Portillo }
   e) { Ultimos cuatro meses del año }
   f) { Vocales de la palabra ruido }
   g) { Dígitos del número 3752 }
   h) { Países que limitan con E. U. }
   i) { Ultimas 6 letras del abecedario }
   j) { Países de Norteamérica }
   k) { Enteros positivos múltiplos de 8 y menores que 45 }

6. *a*) { Adolfo López Mateos, Gustavo Díaz Ordaz, Luis Echeverría Álvarez } (suponiendo que este problema lo resolvemos en agosto de 1978)
   b) { 1, 2, 3 }
   c) { 0, 2, 3 }
   d) { 4 }
   e) { 1, 4, 6, 8, 9, 10 }
   f) Consulta un mapa actualizado. ¿Por qué?
   g) { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }
   h) $\{x \mid x \in$ dígitos $\}$
   i) { 6 }
   j) { −2, −1 }
   k) { 5, 10, 15, 20 }
   l) { 1, 7 }
   m) { 2 }

n) ϕ
o) { Monterrey }

Sección 1.2

2. Aquí, C es el conjunto solución de la conjunción y D es el conjunto solución de la disyunción.

a) $C = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
b) $C = \{1\}$ $D = \{1, -1\}$
c) $C = \{-3\}$ $D = \{-3\}$
d) $C = \phi$ $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
e) $C = \phi$ $D = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$
f) $C = \phi$ $D = \{1, 2, 3\}$
g) $C = \{5\}$ $D = \{-5, 5\}$

4. *a*) $\{a, e, i, o, u, b, p, v\}$
b) $\{a, e, i, o, u, b, c, d, f, g, h, j, k\}$
c) $\{a, b, o, p, u, v, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$
d) $\{a, o, u\}$
e) $\{a, e, i\}$
f) $\{a, b\}$
g) $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, o, p, u, v\}$
h) $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, o, p, u, v\}$
i) $\{a\}$
j) $\{a\}$
k) $\{a, b, e, i, o, u\}$
l) $\{a, b, o, p, u, v, e, i\}$
m) $\{a, b, e, i, o, u\}$
n) $\{a, e, i, o, u, b, v, p\}$
o) $\{a, e, i, o, u\}$
p) $\{a, e, i, o, u\}$
q) $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$
r) $\{a, b, e, i\}$

Sección 1.3

2. *a*) F
b) V
c) V
d) V
e) F

f) F
g) F
h) F
i) F

4. *a*) V
b) V
c) V
d) V
e) V
f) V

6. *a*) $\forall\ x \in$ {números}; x no es entero.
Ningún número es entero.

d) $\exists\ x \in$ {problemas del examen}; x no es difícil.
Al menos un problema del examen es fácil.

g) $x \in$ {jugadores de futbol}; x no es médico.
Ningún jugador de futbol es médico

h) $x \in$ {profesores}; x es responsable.
Todos los profesores son responsables.

j) $\exists\ x \in$ {cuadrados}; x no es rectángulo.
Existe al menos un cuadrado que no es rectángulo.

7. *c*) *i*) $x \in$ {Estudiantes}; x es joven.
ii) Al menos un estudiante no es joven.
iii) F.
h) *i*) $x \in$ {triángulo}; x no es cuadrado.
ii) Existe al menos un triángulo que es cuadrado.
iii) F.
k) *i*) $\exists\ x \in$ {número entero}; $x^2 < 0$
ii) Para todo número entero, su cuadrado es mayor o igual a cero
iii) V
m) *i*) $\exists\ x \in$ {dígitos}; x no es impar.
ii) Los dígitos son pares.
iii) F.

9. *a*) { 0, 2, 6, 8 }
b) { 1, 7 }
c) { 0, 2, 6, 8 }

d) {2,3,4,5,6,8,9,10,0}
e) U
f) U
g) { 0, 2, 6, 8 }
h) *A*
i) ϕ
j) *B*

11. *a*) V
b) F
c) F
d) V
e) F
f) V
g) F
h) F
i) V
j) V
k) V
l) F
m) F
n) F
ñ) F
o) V
p) V
q) F
r) F
s) F
t) F
u) F

12. *b*)
Recíproca: El papá de Juan le regalará un coche si Juan obtiene 9 o más de calificación.
Contrario: Si Juan no obtiene 9 o más de calificación entonces su papá no le regalará coche.
Contrarrecíproca: Si el papá de Juan no le regala un coche entonces Juan no obtiene 9 o más de calificación.
e)
Recíproca: Si Luis está bien informado entonces lee el periódico "Novedades".
Contraria: Si Luis no lee el periódico "Novedades" entonces no estará bien informado.
Contrarrecíproca: Si Luis no está bien informado entonces no lee el periódico "Novedades".

Sección 1.4

2. *a*) F
   b) F
   c) F
   d) V
   e) V

   Por lo tanto *no son equivalentes.*

6. ***a***) $\sim p \wedge q$
   b) $p \vee q$
   c) $\sim p \wedge q$
   d) $p \Leftrightarrow q$
   e) $p \wedge q$
   f) $p \wedge q$
   g) $p \Leftrightarrow q$
   h) $p \wedge q$

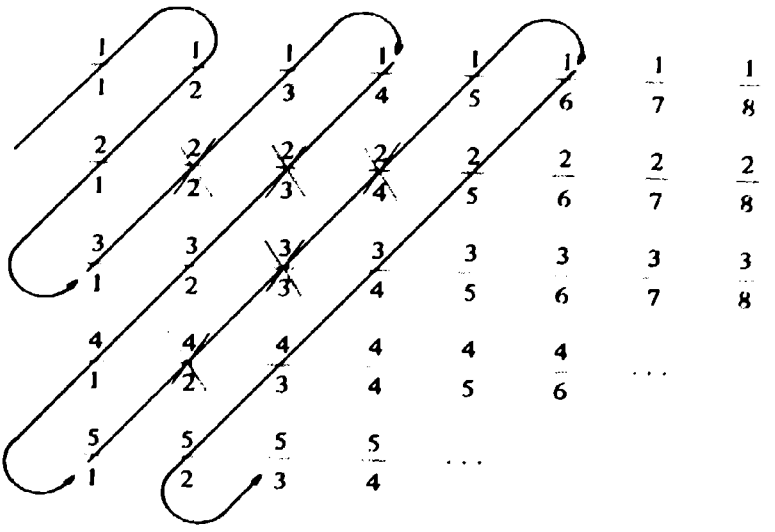
10. *c*) Es falso que: Ucrania es el granero de CEI y se independice.
    (También se puede expresar como:
    Ucrania no es el granero de CEI "o" Ucrania no se independiza)
    e) Ucrania es el granero de CEI si y sólo si no se independiza.
    i) Es falso que: Si Ucrania es el granero del CEI entonces se independiza.
    (También se puede expresar como:
    Ucrania es el granero del CEI y no se independiza.)
    l) Ucrania es el granero del CEI

11. *b*) $\sim q \Rightarrow \sim p$
    d) $\sim (\sim q \wedge \sim p) \equiv q \vee p$.

12. *b*) Tomás no es inteligente y le gusta leer libros de física.
    f) Tomás no es inteligente "y" no le gusta leer libros de física.
    i) Si a Tomás no le gusta leer libros de física entonces no es inteligente.

Sección 1.5

1. *b*) **Al número $5n$ lo hacemos corresponder con el número $3n$.**
   d) **Sólo podría hacerse si hubiera el mismo número de hombres que de mujeres.**
   f) **No se puede, puesto que hay más alumnos que maestros.**
   h) Al natural n *A* lo hacemos corresponder con el natural $10n$.
   j) Una forma de "contar a los racionales" es escribirlos en la forma que ilustramos, tachar los repetidos y luego seguir la flecha.



2. *b*) 1
   d) 5
   f) 0
   h) 31
   j) 2

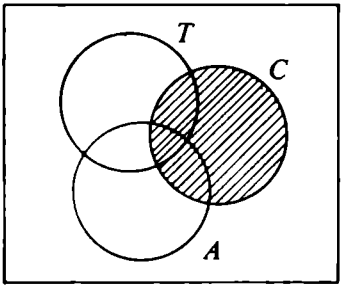
3. *b*) **Infinito**
   d) **Infinito**
   f) **Finito**
   h) **Infinito**
   j) **Infinito**

7. *a*) $P(A) = \{A, \phi\}$
   b) $P(B) = \{\{\text{águila}\}, \{\text{sol}\}, B, \phi\}$
   c) $P(c) = \{\{o\}, \{\phi\}, C, \phi\}$
   d) $P(D) = \{\{a\}, \{\{a, b\}\}, \{b\}, \{a, \{a, b\}\}, \{a, b\}, \{\{a, b\}, b\}, D, \phi\}$
   e) $P(E) = \{\{\{c, d\}\}, \{\{a\}\}, E, \phi\}$
   f) $P(F) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, F, \phi\}$

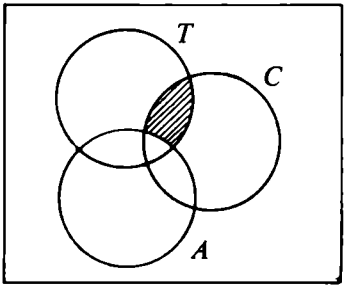
g) $P(G) = \{ \{\phi\}, \phi \}$

9. *b*) Atletas que les gusta la danza pero no la música ni el teatro.
e) Atletas que les gusta la música y el teatro.
h) Atletas que les gusta solamente la danza o solamente el teatro o solamente la música.

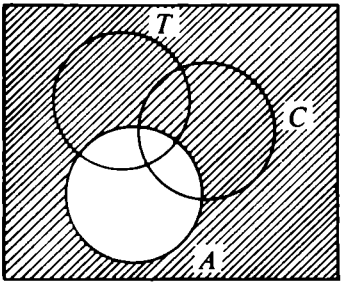
10. *a*) *U*



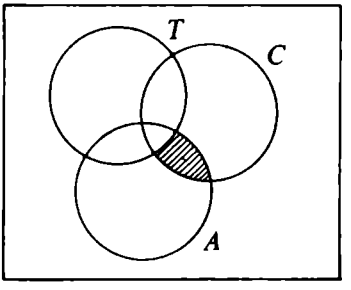
d)



g)



i)



11. *c*) Maestros de tiempo completo que hablan inglés pero no tienen al menos una maestría.
f) Maestros que hablan inglés pero no son de tiempo completo y tienen al menos una maestría.
j) Maestros de tiempo completo que no hablan el inglés.

12. *i*) 23 *iii*) 20 *v*) 3
ii) 15 *iv*) 12

13. *i*) 167 *ii*) 13

14. *i*) 225 *ii*) 25 *iii*) 100 *iv*) 125
v) 105 *vi*) 125

15. *i*) 304 *ii*) 287 *iii*) 651 *iv*) 640
v) 353

16. *i)* 0 ii) 325 *iii)* 10

17. *i)* 12 *ii)* 28 *iii)* 15 *iv)* 16

18. *i)* 37 *ii)* 94 *iii)* 317

19. 22

Sección 2.1

1. *b)* V
   f) V
   h) F
   j) F
   l) F

2. *a)* $.6 = .60$ (decimal periódica)

   c) $4\frac{3}{7} = \frac{31}{7}$ (cociente de dos enteros)

   e) $0.3\,\% = 0.0030$ (decimal periódica)

3. *a)* $0.\overline{6}$
   c) $3.1\overline{6}$
   e) 0.0013

4. *a)* $\frac{4}{9}$
   c) $\frac{576}{99}$
   e) $\frac{1202}{990}$

Sección 3.1

2. { (Susana, Alfredo), (Susana, Eduardo), (María, Alfredo), (María, Eduardo), (Luisa, Alfredo), (Luisa, Eduardo) }

6. *a)* V
   b) F
   c) V
   d) V
   e) V

Sección 3.2

2. $R = \{ (4, 3), (6, 3), (6, 5), (8, 3), (8, 5), (8, 7), (10, 3), (10, 5), (10, 7), (10, 9) \}$

Dominio = {4, 6, 8, 10}
Codominio = {3, 5, 7, 9}
Imagen = {3, 5, 7, 9}

4. R = { (Elsa, José), (Alicia, Francisco), (Alicia, José) }
Dominio = {Elsa, Alicia }
Codominio = {Francisco, Manuel, José}
Imagen = {Francisco, José}

6. *a*) $\{u, a, o\}$
b) $\{a, e, i, o, u\}$
c) $\{a, e, i, o, u\}$

8. *a*) Sí
b) Sí.
c) No.
d) No.

10. *a*) $f = \{(0, 0), (1, 1), (2, \sqrt{2})\}$
Sí es función.
$D = \{0, 1, 2\}$
$I = \{0, 1, \sqrt{2}\}$

b) $f = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (2, \sqrt{2}), (2, -\sqrt{2})\}$
no es función.
$D = \{0, 1, 2\}$
$I = \{0, 1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

c) $f = \{(-3, 2), (-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2)\}$
Sí es función
$D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
$I = \{2\}$

d) $f = \{(2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, -1), (2, -2), (2, \sqrt{2}), (2, -\sqrt{2})\}$.
No es función
$D = \{2\}$
$I = \{0, 1, 2, -1, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

e) $f = \{(-1, -2), (0, 0), (1, 2)\}$
Sí es función
$D = \{-1, 0, 1\}$
$I = \{0, 2, -2\}$

f) $f = \{(-3, -2), (-3, -\sqrt{2}), (-3, -1), (-3, 0), (-3, 1), (-3, \sqrt{2}), (-3, 2), (-2, -\sqrt{2}), (-2, -1), (-2, 0),$

$(-2, 1), (-2, \sqrt{2}), (-2, 2), (-1, 0), (-1, 1), (-1, \sqrt{2}),$
$(-1, 2), (0, 1), (0, \sqrt{2}), (0, 2), (1, \sqrt{2}), (1, 2)\}$
No es función
$D = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$
$I = \{-2, -\sqrt{2}, -1, 0, \sqrt{2}, 2\}$.

12. *a*) Sí es función.
b) Dominio = $\{-2, -1, 0, 1\}$
c) Imagen = $\{-4, -3, -2, -1\}$
d) $g(x) = x - 2$

14. *a*) $\{(-1, 3), (0, 3), (1, 3)\}$
b) Imagen = $\{3\}$
c) $g(-1) = g(1) = 3$

Sección 3.3

2. *a*) Se necesita que el dominio tenga un solo elemento y el codominio tenga más de uno.
b) Se necesita que el dominio tenga más de un elemento y el codominio tenga un solo elemento.
c) Se necesita que tanto el dominio como el codominio tengan más de un elemento.
d) Se necesita que tanto el dominio como el codominio tengan un solo elemento.

4. Aceptar que el dominio sea un subconjunto propio del codominio.

Sección 3.4

2. ***a*)** $8 - 9 = -1 \in$ **{Enteros positivos}**
***b*)En los enteros.**

4. ***i*)** ***a*) *b***
b*) *b
c*) *b
d*) *c
e*) *b
f*) *b

***ii*)** ***a*)** $b * c = b$
***b*)** $(a * b) * c = b$
***c*)** $(c * b) * (c * a) = b$
d) $\{[(a * c) * c] * c\} = b$

6. No es conmutativa.
No es asociativa.
El elemento identidad es el cero.

$$a^{-1} = -\frac{a}{3}$$

8. Sí es conmutativa y no es asociativa. No hay elemento identidad y por lo tanto, tampoco inversos.

10. $6 * (2 \# 3) = 6 \div (2 + 3) = 6 \div 5 \neq 6 \div 2 + 6 \div 3$, por lo tanto, se distribuye.

Sección 4.1

1. *b*) Transitiva
d) Transitiva
f) Sustitución
h) Aditiva
j) Aditiva
l) Propiedad aditiva

2. *a*) Dada
b) Cerradura de la suma
c) Reflexiva
d) Sustitución

4. *a*) Identidad
b) Ecuación
c) Ecuación
d) Identidad
e) Identidad

6. *b*) Sí
d) Sí
f) Sí

7. *b*) Sí
d) Sí
f) No
h) No
j) Sí

8. *a*) 3
d) 12
f) 12

9. *a*) 5
   d) 7
   f) 9
   h) 5

10. *b*) $-5y + xy^2 + 2x^2y^3$
    d) -5
    f) 2

11. *b*) $m^4 - 5m^3 + m^2 + 5m + 5$
    Creciente
    d) $-4a^3 + 3a^2b + 7ab^2 + b^3$
    Creciente
    f) $-5m^3n^4 + 2m^4n^2 + 3mn$
    Decreciente
    h) $-9 + 4x + 11x^2 - 2x^3 + 25x^4 - 5x^5$
    Decreciente

12. *a*) $7x$
    c) $16a$
    e) $-11b$
    g) $-ab$
    i) $-4x^2y$
    k) 0
    m) $\frac{1}{4}x^4$
    ñ) $7x$
    p) $5ax$

13. *a*) $3 + v$
    c) $h - 7$
    e) $g + 8$
    g) $u - 11$
    i) $3x - 7$
    k) $(a - b)^2$
    m) $\frac{a + b}{a - b}$
    ñ) $6x$
    p) $3x - 18$
    r) $\frac{a + b}{2}$
    t) $\frac{a + b}{5}$

14. *a*) Un número más cuatro.
c) Siete veces un número.
e) La suma del doble de un número más su mitad.
g) Dos veces la suma de un número más cinco.
i) La cuarta parte de la suma de dos números.
k) La tercera parte de la suma de dos números.

15. *a*) –25
c) 26/15
e) 23/12
g) –3
i) 40/3

16. *a*) P = 20, A = 25
b) P = 32, A = 64
c) P = 6, P = 15

Sección 4.2

I. 1. $8x - 2y$
3. $4x - 8y$
5. $8R + S$
7. $15m + 2n$
9. $8x^2 - 13x + 2$
11. $17z^2 + 2z + 1$
13. $-4R^2 - 6R + 2$
15. $-2x^2y$
17. $-4a^2 - 3ab + 2b^2$
19. $3x^2 - 2x^2y$
21. $3p^2 - 2q^2 - 3pq$
23. $6x^2 - 8xy + y^2$

II. 1. 11
4. 0

III. 1. $2x + y$
3. $4a$
5. $15x - 12y$
7. $2m + 6n$
9. $-x + 2y - 5$
11. $-a - c$
13. $16 + 2a - b$
15. $8a + b + 6y - x$
17. $3R^2 - 7S^2$
19. $7x^2 + 16y^2 + 5$

Sección 4.3

I. 1. $x^n y^n$
3. x^{n+m}

II. 2. 7^8
4. 10^4
6. c^{11}
8. $2^2 \cdot 3^2$
10. $x^5 y^5$
12. 2^{15}
14. 5^{11}
16. 6^{36}
18. x^8
20. $x^8 y^4$
22. $27m^3$
24. $3^4 4^4$
26. x^2
28. x^4
30. $-8x^3$
32. c^7
34. a^{6y+6}
36. x^{2a}

III. 2. $-8x^3y^4$
4. $-10a^3b^7$
6. $80u^{14}v^4$
8. $12x^9y^4$
10. $72x^{2n}y^{n+3}$
12. $-24a^4b^3c^4$
14. $10x - 15xy$
16. $21m - 14n$
18. $-3x^3y^2z + 6x^2y^3z$
20. $x^3y^2 + x^2y^3$
22. $36z^2 - 1$
24. $3m^2 - m - 2$
26. $8x^2y^2 + 20xy + 8$
28. $16x^2 - 1$
30. $9x^4 - 6x^2 + 1$
32. $3x^3y^2 - 6xy^3 + 12xy^2$
34. $2a^3 + 3a^2b - b^3$
36. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
38. $x^4 - 2x^2 + 1$
40. $2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3$
42. $a^3n - 2a^{2n} + 1$

Sección 4.4

I. 1. $3x - y$
3. $xy^2 + z$
5. $\frac{1}{2}a^2b^3 + c$
7. $\frac{r}{10} + \frac{t}{6}$
9. $10 + 14b$
11. $0.2x + 0.3$

II. 1. $(a - 3b)^2 = (a)^2 + 2(a)(-3b)^2 + (-3b)^2 = a^2 - 6ab + b^2$
3. $(5xy - z)^2 = (5xy)^2 + (5xy)(-z) + (z)^2 = 25x^2y^2 - 10xyz + z^2$
7. $(6x^2 + y)(6x^2 - y) = (6x^2)^2 - (y)^2 = 36x^4 - y^2$
9. $(x^a + x^b)(x^a - x^b) = (x^a)^2 - (x^b)^2 = x^{2a} - x^{2b}$

III. 1. $4x^2 - 4x + 1$
3. $9x^2 + 6xy + y^2$
5. $25x^2 - 20xy^2 + 4y^4$
7. $\frac{1}{4}a^4b^4 - a^2b^2c + c^2$
9. $\frac{R^2}{100} - \frac{1}{30}Rt + \frac{t^2}{36}$
11. $0.01x^4 + 2.2x^2 + 121$
13. $0.01x^4 - 121$
15. $36x^2y^2z^2 - w^2$
17. $225a^6 - 81a^4$
19. $100 - 196b^2$

IV. 1. $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
3. $125x^3 - 150x^2y^2 + 60xy^4 - 8y^6$
5. $\frac{R^3}{1000} - \frac{R^2t}{200} + \frac{Rt^2}{120} - \frac{t^3}{216}$
7. $216x^3y^3z^3 + 108x^2y^2z^2ww + 18xyzw^2 + w^3$
9. $125b^3 + 300b^2 + 240b + 64$

V. 1. $8a^3 + b^3$
3. $x^3 + 8$
9. $\frac{1}{27}a^6b^3 - 27$

VI. 1. No
3. No
5. No

VII. 2. $27a^3 - 8b^6$
4. No
6. $512a^3b^3c^3 + 1000$
8. $\frac{1}{8}a^6b^9 - c^6$
10. $x^3n + y^3n$

VIII. 1. $343x^3y^3 + 441x^2y^2z + 189xyz^2 + 27z^3$
3. $9z^2 - 42xyz + 49x^2y^2$
5. $64a^6 + 27$
7. $16a^4b^2 - c^6$

Sección 4.5

I. 1. $5(a - 2)$
3. $8x + 9$
5. $x^3y(4y + 7x)$
7. $a(3b - 1)(3b + 1)$
9. $15b^5(3a - 4b)$
11. $2b^2(4m + n)(m + 3)$
13. $-4x(6x^{14} - 2x^4 + 1)$
15. $8ab^2(1 - 2b^2 + 8b)$
17. $(a + b)(2a - 1)$
19. $(5y - 2x)(3x - 2)$
21. $(5x + 1)(8x + 2)$
23. $(9a^2 - 12ab)(x^2 + 2y)$
25. $(x - 2)(x + 4)$
27. $(a + 3b)(x - 2y)$
29. $(t - 1)(t + 1)(6t - 1)$
31. $(x - 3)(x^2 + 1)$

II. 1. $(a - b^2)^2$
3. $(2x + 3)^2$
5. $(3b + 2)^2$
7. $(6mn - 7)^2$
9. $(2x^4 + 5y)^2$
11. $(2x - 1)(x + 3)$
13. $(x + 5)(x + 3)$
15. $(x + 3)(x + 2)$
17. $(2a - 6)(a - 3)$
19. $(2m - 7)(m + 5)$
21. $(18a - 5)(8a - 5)$
23. $(x - 17)(x - 7)$
25. $(3y + 5)(2y - 7)$

27. $(5m + n)(2m - 3n)$
29. $[2(x + y) + 3]^2$
31. $(a - b^2)(a + b^2)$

III. 1. $(xy - 7z)(xy + 7z)$
5. $(7a^3 - 9b^2)(7a^3 + 9b^2)$
7. $[(a - 2b) + c][(a - 2b) - c]$
9. $(2a^4 - 5b^6)(2a^4 + 5b^6)$
11. $(ab - 2c)(a^2b^2 + 2abc + 4c^2)$
13. $(4m^3 - n)(16m^6 + 4m^3n + n^2)$
15. $(xy^2 + 3a^2b)(x^2y^4 - 3a^2bxy^2 + 9a^4b^2)$
17. $[9 - (a + b)][81 + 9(a + b) + (a + b^2)]$

Sección 4.6

1. $3a$
3. a
5. $\dfrac{y}{2x}$
7. $2xy$
9. $6abc^2$
11. $x + 2$
13. $4x - 6$
15. $\dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{9}{4}$
17. $x - y$
19. $-xy^3 + 2y^4$
21. $\dfrac{7a^2}{c} - \dfrac{4a^2b}{c}$
23. $-2xy + \dfrac{2x}{3y} + \dfrac{3y}{x}$
25. $x + 3$
27. $2x^2 + 3x - 1$
29. $x^2 - 1$
31. $2x + 5y$
33. $x^2 - 3x - 1$ con residuo $(-4x - 6)$
35. $3x + 4y$
37. $4x^2 - 12xy + 9y^2$
39. $2x^2 - 7x + 3$
41. $x^2 + xy + y^2$

II. 1. $3x - 1$ con residuo (29)
3. $4x^4 + 4y^3 - 23y^2 - 8y - 8$ con residuo (-3)
5. $x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ con residuo (1)

7. $y - 8$
9. $y^2 + y + 1$ con residuo (-12)
11. $x^3 + x^2 + x - 2$ con residuo (-1)
13. $2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 4$

Sección 4.7

I.
1. $x = 0$
3. $x = -5$
5. $x = 1, x = -1$
7. $x = 0, x = -2$

II.
1. F
3. F
5. F
7. F
9. V

III.
1. -1
3. -1
5. -1
7. -1
9. $-a - 4$
11. $\dfrac{2}{x + 1}$
13. $\dfrac{x}{y}$
15. $\dfrac{y + 1}{y - 1}$
17. $\dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$
19. $\dfrac{x + 2}{x - 4}$
21. $\dfrac{x - 4}{x + 4}$
23. $\dfrac{4b}{b + 1}$
25. $\dfrac{x + 4}{2x + 1}$
27. $\dfrac{-a - 3}{a + 2}$
29. $\dfrac{3x - 1}{3x - 2}$

31. $\dfrac{x+1}{x-1}$

33. $\dfrac{y+1}{a^2+a+1}$

III. 1. 3/2

3. $6y$

5. $\dfrac{z}{9y}$

7. $\dfrac{48y^2}{x}$

9. $\dfrac{xb}{12}$

11. $\dfrac{1}{3x^2}$

13. $-1/2$

15. $\dfrac{x}{-y(x+y)}$

17. $\dfrac{-1-a}{(1+a+a^2)(x+1)}$

19. $\dfrac{3}{4x}$

21. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x-y}$

23. $\dfrac{(a^2+ab+b^2)(b)}{a^2(a+b)}$

25. 1

27. $\dfrac{7(x-y)}{(x+4y)(4x-1)}$

29. $\dfrac{a}{2(1-a)}$

31. $\dfrac{x}{x+3}$

33. $\dfrac{1}{a}$

35. $\dfrac{y(x^k+y^k)^2}{x}$

37. $\dfrac{-4(y+2)}{y^2-2}$

Sección 4.8

I. 1. $\frac{8y}{x}$

3. $\frac{11}{x}$

5. $\frac{7y}{x+y}$

7. $\frac{9xy}{x^2+y^2}$

9. 2

11. $a+b$

13. $\frac{3y+5}{y-2}$

15. $\frac{1}{x+5}$

II. 1. $\frac{43}{24x}$

3. $\frac{bc+ac+ab}{abc}$

5. $\frac{8a+2}{a}$

7. $\frac{-19}{2x}$

9. $\frac{2a^2-b^2}{a-b}$

11. $\frac{-2x-9}{(x+2)(x-3)}$

13. 0

15. $\frac{77}{12(1-2b)}$

17. $\frac{-3}{x+2}$

19. $\frac{4x+16}{x+3}$

21. $\frac{5a-10}{6a(a-4)}$

23. $\frac{8y^4-28y^3+21y^2+27y-35}{(2y-3)^2(y+1)}$

Sección 4.9

I. 2. $\frac{-59}{13}$

4. $\dfrac{9-x}{9+x}$
6. $\dfrac{5y+2x}{x+2y}$
8. $\dfrac{1}{bc}$
10. a^2+a+1
12. $\dfrac{y^2+2xy-x^2}{x^2+y^2}$
14. $\dfrac{x+1}{x^2+1}$
16. $\dfrac{y^2}{x^3+x^2y-x^2}$
18. $\dfrac{4a^2}{b(a-b)}$
20. $\dfrac{x-1}{x^2-x-1}$
22. $\dfrac{x(2x^2-9)}{x^2-4}$
24. $\dfrac{x(x^2-1)}{x^2-x+1}$
26. 2

Sección 4.10

I. 1. 1/5
3. 1/64
5. 1/9
7. 1
9. 0
11. 0
13 1/2
15. $\dfrac{1}{3^7}$
17. 5^5
19. –2
21. 2^4
23. 1/5
25. 6^6
27. $\dfrac{1}{4^9}$
29. 1/25

31. 3^6
33. 2^{12}
35. 25
37. 81/256
39. 81/64
41. 64/27
43. $\frac{5^3}{3^9}$
45. $\frac{1}{4^9}$

II. 2. 1
4. $\frac{1}{5x}$
6. 1
8. $a + 1$
10. $\frac{1}{a} + b$
12. $\frac{150}{x^4y^3}$
14. $\frac{b^5}{ac^2}$
16. $\frac{5}{xy^5}$
18. $\frac{3a}{4b}$
20. $\frac{b^5}{3a^2c}$
22. $\frac{500b^5}{a^5}$
24. $\frac{a}{2b}$
26. $\frac{81y^{36}}{x^{21}}$
28. $\frac{a^{12}b^9}{c^6}$
30. $\frac{z^3}{x^2}$

III. 2. 2/3
4. −3/2
6. $\frac{y}{y-1}$
8. $b^2 - a^2$

10. $\dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$

12. $\dfrac{a^2}{b^2 - a^2}$

14. $\dfrac{ab}{b - a}$

16. $\dfrac{ab}{b + a}$

18. $(3x + y)^3$

20. $\dfrac{1}{a^4} + \dfrac{2}{a^2 b} + \dfrac{1}{b^2}$

22. $\dfrac{8}{a^3} - \dfrac{36}{a^2 b^2} + \dfrac{36}{ab^4} - \dfrac{27}{b^6}$

24. $\dfrac{y^3}{(2y - 1)^3}$

Sección 4.11

I. 1. $\sqrt[3]{a^2}$

3. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{12^2}}$

5. $4\sqrt[5]{m^2}$

7. $\sqrt[4]{5}$

9. $\sqrt[6]{8^2}$

II. 2. $3x^{3/4}$

4. $a^{2/9}(b - c)^2$

6. $(a + b)^{1/4}$

8. $(2a - b)^{2/3}$

III. 1. 2

3. 8

5. 1/8

7. −1/2

9. 9

11. 4/3

13. 174

15. 36/25

17. 4

19. 1/2

21. $\sqrt[9]{2}$

23. $\sqrt[12]{5}$

25. $\frac{1}{\sqrt[30]{6}}$

27. $\frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}$

29. $\frac{1}{\sqrt[6]{4^5}}$

IV. 1. $\frac{1}{x}$

3. $\sqrt[4]{x}$

5. $\frac{1}{\sqrt{a}}$

7. $\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}$

9. $\sqrt[12]{y^7}$

11. $\frac{1}{x}$

13. b

15. $\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$

17. $\frac{3b}{a^2}$

19. $\frac{\sqrt{b}}{a}$

21. $\frac{-3y^2}{x^2}$

23. $144x^2y^3$

25. $\frac{b}{2a^2}$

27. $\frac{a^{12}}{36}$

29. $\frac{5\sqrt[4]{b}}{\sqrt[3]{a}}$

31. $\frac{64ab^2}{3}$

V. 1. $x + 2x^{1/2}y^{1/2} + y$

3. $x^{2/3} - y^{2/3}$

5. $x^2 - y$

7. $\frac{1}{\sqrt{x} + y}$

9. $x + y$

11. $2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}$
13. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$
15. $\frac{y + 2\sqrt{xy} + x}{y - x}$

Sección 4.12

I. 1. 7
3. 2/3
5. 1/3
7. 2
9. x^8
11. y^7
13. x^6
15. y^6
17. $x^{12}y^{15}$
19. x^2y^4
21. $5x$
23. $12c^{10}$
25. $-2a^2b$
27. $\frac{2a^2}{3b^3}$

II. 2. $3\sqrt{3}$
3. $3\sqrt[4]{2}$
5. $3\sqrt[3]{2}$
7. $5\sqrt{3}$
9. $3\sqrt[3]{4}$
11. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$
13. $2ab\sqrt[4]{2ab^2}$
15. $x^2y^4\sqrt{xy}$
17. $16x^2y^2\sqrt[4]{6y^2}$

III. 1. $\frac{5}{2}\sqrt{6}$
3. $\frac{5}{12}\sqrt{6}$
5. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{50}$
7. $\frac{2x}{3y^2}\sqrt{3y}$
9. $\frac{18}{5y^2}\sqrt{5xy}$

11. $\frac{1}{a}\sqrt[3]{3a}$

13. $\frac{1}{2ab}\sqrt[3]{4a^2b^2}$

15. $\frac{1}{x^2y^3}\sqrt{y}$

17. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

IV. 1. $2\sqrt{}$

3. $\sqrt[3]{3}$

5. $\sqrt{2a}$

7. $\frac{1}{y}\sqrt{3xy}$

9. $ab\sqrt{3bc}$

11. $\sqrt{2xy}$

V. 1. $\sqrt{75}$

3. $36x^2y$

5. $\sqrt{50x^4}$

7. $\sqrt[3]{x^4y^{11}}$

9. $\sqrt[4]{128x^5y^2}$

11. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}a^7b$

Sección 4.13

I. 1. $\sqrt{2}$

3. $8\sqrt{2}$

5. $-3\sqrt[3]{15}$

7. $7\sqrt{x}$

9. $3\sqrt{a} + 3$

11. $2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}$

13. $2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

15. $3\sqrt{10}$

17. $26\sqrt{2}$

19. $25\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$

21. $(x - 4)\sqrt{3x}$

23. $\sqrt{3ba^2}\,(4 - 3b - 12a^3b^2)$

25. $3\sqrt[3]{2x}\,(4 - x)$

27. $3\sqrt{5a}$

29. $\frac{\sqrt{ab}(a + b)}{ab}$

31. $\sqrt{5b}\left(\frac{ab + 4}{2ab}\right)$

33. $18\sqrt{5}$
35. $3\sqrt{6}$
37. $\sqrt{10} + 5\sqrt{2}$
39. $7 - 4\sqrt{3}$
41. $11 + 4\sqrt{6}$
43. $7 + 3\sqrt[3]{36} + 6\sqrt[3]{6}$
45. 1
47. 2
49. 1/2
51. $\frac{\sqrt[3]{5}\sqrt{2}}{2}$
53. $3\sqrt[4]{8}$
55. 3
57. $3\sqrt{2} + 2 - \sqrt{3}$
59. 9
61. $\frac{19 - 7\sqrt{7}}{9}$
63. $\frac{5\sqrt{2} - \sqrt{6}}{11}$
65. $x + 2\sqrt{xy} + y$
67. $\frac{\sqrt{x(x+1)} - x}{x}$
69. $\frac{9\sqrt{a-b} + a - b}{81 - a + b}$
71. $-3 - \sqrt{x + 10}$
73. $\sqrt{h} + 3$
75. $\frac{\sqrt{x+1}}{x+1} - 1$
79. $x^{3/2}$
81. $x^{63/64}$

Sección 4.15

2. *a*) $81a^4 - 216a^3b + 216a^2b^2 - 96ab^3 + 16b^4$
   c) $\frac{b^4}{16} - b^2 + 6 - \frac{16}{b^2} + \frac{16}{b^4}$
   e) $a^{10} - 5a^6 + 10a^2 - 10a^{-2} + 5a^{-6} - a^{-10}$
3. *a*) $x^7 - 14x^6y + 84x^5y^2 - 280x^4y^3 + \ldots$
   c) $x^6 + 12x^{11/12}y^{12} + 66x^5y + 220x^{9/2}y^{3/2} + \ldots$
   e) $1 + 20x190x^2 + 1140x^3 + \ldots$

4. *a)* $30618\,x^8$

c) $-\frac{99}{16}\,a^7\,b^5$

e) $\frac{63}{16}\,a^{10}\,b^4, -\frac{63}{8}\,a^8\,b^5$

g) $10\,x^4$

Sección 5.1

2. *a)* (34, 34)
b) (8, 3)
c) (8, 3)
d) (11, 11)
e) (11, 11)
f) $(\frac{-93}{40}, \frac{1847}{40})$
g) $(-\frac{1}{8}, \frac{3}{5})$
h) (− 1, − 1)

4. *a)* $8 - i$

c) $\frac{-1}{6} + \frac{5\,i}{6}$

e) $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 3i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $8 - 16\,i$

i) $-4 + 32\,i$

k) $-3 - 39\,i$

m) $-9 + 46\,i$

ñ) $72 - 54\,i$

p) $27 + 8\,i$

r) -1

t) $-\frac{1}{13} - \frac{5}{13}\,i$

v) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i$

x) $-6 + 14\,i$

z) $-\frac{8}{5}+\frac{17}{10}i$

b') $\frac{81}{10}+\frac{43}{10}i$

d') $-4+4i$

5. a) -8
b) -8
c) $-4i\sqrt{15}$
d) $-2-2\sqrt{2}i$
e) $(5\sqrt{2}+20)i+5\sqrt{2}$
f) $-5\sqrt{2}-\sqrt{5}i$
g) $8+4i$
h) $\frac{4}{5}i-\frac{2}{5}$
i) $\frac{(-3-\sqrt{15})i}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$
j) $-5-2\sqrt{6}$
k) $16+8\sqrt{i}+i$
l) 2
m) $-i(4\sqrt{2}+5)$
n) $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$
ñ) $-1-i$

Sección 6.1

Ejercicio 6.1.1.

2. $x = 11$
4. $x = 11$
6. $x = -5/3$
8. $x = -20$
10. $x = -49$
12. $x = 33$
14. $x = 9/2$
16. $x = 13/4$
18. $x = 1$
20. $x = -7/9$
22. $x = 120$
24. $x = -6000$
26. $x = 1$
28. $x = -4$
30. $x = 16$
32. $x = 9/112$
34. $x = 3/13$
36. $x = -3$
38. $x = 2$
40. $x = -1/15$
42. $x = -22/5$
44. $x = 8/3$
46. $x = \frac{-51}{17}$
48. $x = 3$
50. $x = 16/3$
52. $x = \frac{9}{5}$
54. $x = -11/17$
56. $x = -19$

Ejercicio 6.1.2.

2. $a = \frac{P}{2} - L$ 4. $t = d/v$ 6. $h = 2A/b$

8. $g = a/(bt+ab)$ 10. $a = \frac{S(1-R)}{1-R^n}$ 12. $y = \frac{xz}{z-x}$

14. $R = \frac{p}{p-p}$ 16. $n = \frac{xP-2m}{6}$ 18. $n = \frac{25-m}{m}$

20. $V = \frac{k}{R}$ 22. $Y = I/Rt$ 24. $g = mv^2/2k$

26. $R = \frac{s-a}{s}$ 28. $y = \frac{b(a-x)}{a}$ 30. $R = \frac{a-s}{L-S}$

Ejercicio 6.1.3.

2. $x = 0$
8. $x = -2/.57$
10. $x = 68/23$
12. $x = 39/5$
14. $x = 26/9$
16. $x = -3/11$
18. $x = 28/13$
20. $x = -1/12$
22. $x = -64/21$
25. $x = 1099/9$
27. no tiene solución
29. $x = 4$
30. $x = 7$
33. no tiene solución
35. no tiene solución
37. $x = 1$
39. $x = 3$
40. $x = 7/5$
42. $x = -2$
44. $x = 39$

Ejercicio 6.1.4.

1. $P = 50/7$
3. 40 y 10
5. $\frac{43}{3}, \frac{28}{3}$
7. $9\sqrt{3}$
9. 29 y 39
11. 1050
13. 36/7 y 27/7
15. 2
17. 120,000

Ejercicio 6.1.5.

1. 20,22 y 24
3. 33
5. 120
7. 60 y 90
9. 54 y 30
11. 5 y 7
13. 40
15. 56
17. 72
19. \$99 y 98¢

Ejercicio 6.1.6.

1. 32
3. 12, 39 y 6
5. 25
7. 16
9. 10

Ejercicio 6.1.7.

1. 60,000
3. Se le quita la mitad y se le agregan 15 litros de agua
5. 356 de 4.40
   144 de 16.90
7. Sueldo $225
   extra $25
9. 10
11. Se quitan 5.556 litros de la mezcla y se agregan 5.556 litros de anticongelante
13. 16 de 0.50
    29 de 0.25
15. 300 de $75
    200 de $50

Ejercicio 6.1.8.

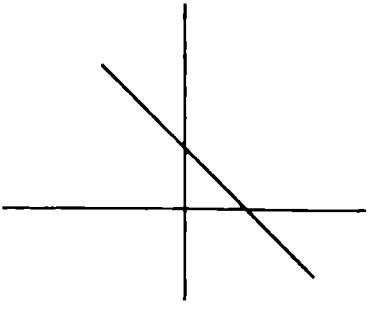
1. 1.7142 hrs.
3. 1.66 hrs.
5. 3/4 hr.
7. 1 hr.
9. 15 min.
11. 100 min.
13. $\approx$ 13.85 min.

Sección 6.2

1. *b*) $(2, -1)$
   c) $(-1, -3)$
   f) $(3, 5)$
   h) $(\frac{370}{129}, \frac{-28}{43})$
   j) $(\frac{720}{55}, \frac{+36}{11})$

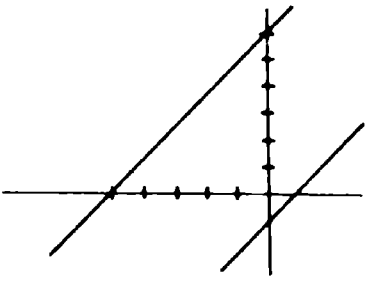
2. *b*) no tiene solución
   d) $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

3. *b*)



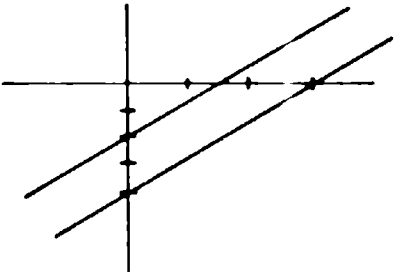
Son equivalentes.

d)



Son inconsistentes.

f)



Son inconsistentes.

4. *b*) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
d) $(1, 0, -4)$
f) No tiene solución.
h) $(2, -8, 5, 2)$
j) No tiene solución.

Sección 6.3

1. *b*) $x = 2, x = -\frac{5}{3}$

d) $x = \frac{3}{2}, x = -\frac{7}{5}$

f) $y = -\frac{1}{2}$

h) $x = a,\ x = -b$

j) $x = \dfrac{b}{a},\ x = \dfrac{-2b}{b}$

2. *b)* $y = -3 + i,\ y = -3 - i$

d) $y = 3 + \sqrt{7},\ y = 3 - \sqrt{7}$

f) $x = -11 + \sqrt{123},\ x = -11 - \sqrt{123}$

3. *b)* $x = 3 + i,\ x = 3 - i$

d) $x = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\sqrt{17},\ x = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\sqrt{17}$

f) $x = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{97}}{4},\ x = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{97}}{4}$

h) $x = \dfrac{-q}{2p} + \dfrac{\sqrt{q^2 - 4pR}}{2p},\ x = \dfrac{-q}{2p} - \dfrac{\sqrt{q^2 - 4pR}}{2p}$

j) $x = \dfrac{1}{5} + \dfrac{\sqrt{34}i}{5},\ x = \dfrac{1}{5} - \dfrac{\sqrt{34}\,i}{5}$

l) $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 + ac - a}}{c - 1},\ x = \dfrac{1 - \sqrt{1 + ac - a}}{c - 1}$

4. *b)* $x = \dfrac{1}{2},\ x = -\dfrac{5}{3}$

d) $x = \dfrac{3}{2},\ x = -2$

5. *a)* $y = 2x,\ y = -3x$

c) $y = 2x + 3,\ y = 2x - 3$

e) $y = 3x,\ y = x - 2$

6. *b)* Los tres números son 13, 15 y 17.

d) El terreno debe medir 200 metros a lo largo del río por 50 metros de ancho.

f) La hipotenusa mide 50 cm.

h) 30 cm de ancho por 40 de largo.

j) $25.00

l) 85.88 km/h.

Sección 6.4

1. *b*) $x^2 + 6x + 5 = 0$
   d) $x^2 - 9 = 0$
   f) $x^2 - 6x + 10 = 0$

2. *b*) $3x^2 - 6x - 2 = 0$
   c) $27x^2 - 15x - 2 = 0$
   f) $x = 3, x = -3, m = 1$

3. *b*) $k = -27$
   d) $k = 8$
   f) $k = 1$
   h) $k = 6$

Sección 6.5

1. *b*) $x = 1$
   d) $y = 3$
   f) No tiene solución.
   h) $x = 5, x = -3$
   j) No tiene solución.
   l) $x = 6$
   n) No tiene solución.
   o) $x = 5, x = 3$
   q) $y = 0, y = -1$
   s) $x = 3$

2. *b*) $x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}, x = i, x = -1$
   d) $x = 36$
   f) $x = \frac{1}{3}, x = -\frac{1}{3}, x = i, x = -i$
   h) $x = -1, x = 2, x = 5$
   j) $x = -1 + i\sqrt{2}, x = -1 - i\sqrt{2}$
   l) $y = \frac{1}{4}$

Sección 6.6

2. (0,0),(4,-4)
4. (1/3, -2/3), (-1/3, 2/3)
6. $(2 + i, 3 - i), (2 - i, 3 + i)$

8. $(3,4)$, $(-1,0)$
10. $(3,2),(-3,-1)$
12. $(\sqrt{2},1)(-\sqrt{2},1)(\sqrt{2},-1)$, $(-\sqrt{2},-1)$
14. $(5i, 4i)$, $(5i, -4i)$ $(-5i, 4i)$ $(-5i, -4i)$
16. $(1,0)(-1,0)$
18. $(0,2)$, $(0,-2)$
20. $\left(\frac{1}{3}\sqrt{51}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{-1}{3}\sqrt{51}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}\sqrt{51}, \frac{-2}{3}\sqrt{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}\sqrt{51}, \frac{-2}{3}\sqrt{3}\right)$
22. $(1/2, -3/2),(-1/2, 3/2),(3/2 -1/2)(-3/2, 1/2)$
24. $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$, $\left(5\sqrt{\frac{19}{80}}, \sqrt{\frac{19}{80}}\right)$, $\left(5\sqrt{\frac{19}{80}}, \sqrt{\frac{19}{80}}\right)$
26. 18 metros de largo por 12 de ancho.
28. 20 metros de largo por uno de ancho.
30. 40 cm de largo por 9 de ancho.
32. El primero es 2 y el segundo es 4, o bien, el primero es -2 y el segundo es 4.

i) Los números pueden ser 6 y 12, o bien, $-5 + \sqrt{55}$ y $-5 - \sqrt{65}$.

Sección 6.7

1. *b*) $x^2 + \frac{25}{7}x - \frac{12}{7}$

2. *a*) $f(3) = 158$
   c) $f(-3) = 0$
   d) $x^2 - 4x + 5$

3. *a*) sí *c*) no *e*) sí *g*) sí

4. *a*) $k = -3$ *c*) $k = 47$ *e*) $k = 38$

5. $k = 1$

6. *b*) $(x + 5)$, $(x-4)$ y $(x-1)$
   d) $(x-3-i)$ y $(x-3+i)$
   g) $x^3 - 11x^2 + 44x - 60$
   h) $x = 1/3$, $x = 4$, $x = -2/5$
   k) $x = 3i$, $x = -3i$

7. *c*) $9/2$, $3i$, $-3i$
   f) -1, 3, 1, $1/2$

8. *c)* $1/2, \dfrac{2+\sqrt{5}i}{3}, \dfrac{2-\sqrt{5}i}{3}$

   j) $1, -4, -2, i, -i$

9. *c)* $(x+1)(x-1/3)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{15}\,i}{4}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{15}\,i}{4}\right)$

   f) $8\,(2x-1)(x+1)(x-1)(x+1/8)$

   j) $(3x-7)(x^2+9)$

Sección 7.1

5. *b.* $-54/5$
5. *d.* -75
5. *f.* $a^8+2a^4-a^3+1$
6. *b.* $x=4$
6. *d.* $x=-30/11$
7. *a.* $x=-7/4,\ y=-55/4$
7. *c.* $x=-1,\ y=-2,\ z=-3$

Sección 8.1

2. *a)* $1<x<4$

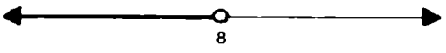
   c) $-1<x<1/3$

   e) ϕ

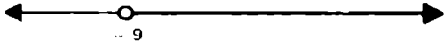
   g) $0<x<2$

5.

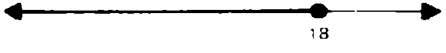
b) $x<8;\ (-\infty, 8);$



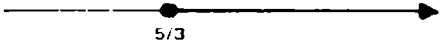
d) $x>-9;\ (-9, \infty);$



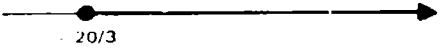
f) $x\leq 18;\ (-\infty, 18];$



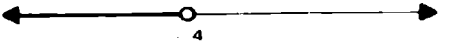
h) $x\geq 5/3;\ [5/3, \infty);$



j) $x>-20/3;\ (-20/3, \infty)$



l) $x<-4;\ (-\infty, -4)$



n) $x > -4; (-4, \infty)$

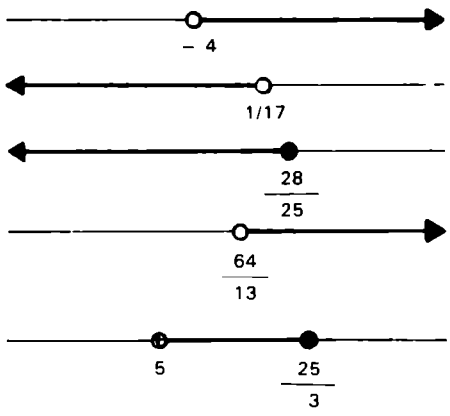
p) $x < 1/17; (-\infty, 1/17)$

r) $x \leqslant \frac{28}{25}$; $(-\infty, \frac{28}{25}]$;

t) $x > \frac{64}{13}$; $\left(\frac{64}{13}, \infty\right)$

v) $5 < x \leqslant \frac{25}{3}$; $(5, \frac{25}{3}]$,

x) ϕ



6. *b*) $(0, 1]$
d) $(-\infty, 0) \cup (35/6, \infty)$
f) $(-\infty, 5/13) \cup (1/2, \infty)$
h) $[-1, 1]$
j) $[\ 3/2, 2]$
l) $(-\infty, -9] \cup [1/3, \infty)$
n) $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, \infty)$
o) $(-\infty, \infty)$
q) ϕ
s) $(-\infty, \infty)$
u) $(-\infty, \infty)$
w) ϕ
y) $(-\infty, -15) \cup (-7, 0) \cup (1, \infty)$

Sección 8.2

1. *b*) $x = -3,\ x = -3/5$
d) No tiene solución.
f) $x = 1$
h) No tiene solución.

2. *c*) $(-\infty, 4/3] \cup [8/3, +\infty)$
g) $[-\frac{14}{3}, -\frac{2}{3}]$
k) $[\frac{1}{3}, \frac{5}{6}]$

n) $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{4}, +\infty)$

r) $(-\infty, 0) \cup (10, +\infty)$

v) $(-\infty, -195/7) \cup (155/7, +\infty)$

z) $(-2, 2)$

d') $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

3. *a*) $[\frac{4}{9}, +\infty)$

c) $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$

i) $(-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{3}{5}, +\infty)$

Sección 9.1

2. $|\overline{PQ}| = |\overline{PR}| = 5$

4. $|\overline{pq}| + |\overline{qr}| = |\overline{pr}|$

6. $|\overline{pq}| = |\overline{qr}| = |\overline{rs}| = |\overline{sp}|$

8. *a*) No
b) Sí.

10. *a*) $\pi/15$
b) $\pi/4$
c) $7\pi/36$
d) π
e) $157\pi/180$
f) $4\pi/3$
g) $55\pi/36$
h) $87\pi/45$
i) 2π
j) $5\pi/8$
k) $45°$
l) $120°$
m) $180°$
n) $30°$
ñ) $162°$
o) $(1.4323)°$
p) $(114.59)°$
q) $210°$
r) $(338.04)°$

Sección 9.2

2. No. $\sec\theta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} > 1$

$\csc\theta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} > 1$

4. *a*) Tercero o cuarto.
b) Segundo o tercero.
c) Primero o tercero.
d) Segundo o cuarto.
e) Segundo o tercero.
f) Primero o segundo.

6. *a*) Negativo
b) Negativo
c) Negativo
d) Cero
e) Cero
f) Positivo
g) Positivo
h) Negativo
i) Positivo
j) Negativo
k) Negativo
l) No está definida

Sección 9.3

2. $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$

$\cos\theta = (1 - \operatorname{sen}^2\theta)^{1/2}$

$\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{(1 - \operatorname{sen}^2\theta)^{1/2}}$

$\cot\theta = \dfrac{(1 - \operatorname{sen}^2\theta)^{1/2}}{\operatorname{sen}\theta}$

$\sec\theta = \dfrac{1}{(1 - \operatorname{sen}^2\theta)^{1/2}}$

$\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$

3. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{\tan^2\theta}\right)^{1/2}}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{(1 + \tan^2\theta)^{1/2}}$

$\tan\theta = \tan\theta$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sec\theta = (1 + \tan^2\theta)^{1/2}$$

$$\csc\theta = \left(1 + \frac{1}{\tan^2\theta}\right)^{1/2}$$

6. *d)* $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$

e) $\frac{(x-1)^2}{4} - (y-3)^2 = -1$

f) $y^2(1-x) = 2$

k) $\frac{4y^2}{(1+x)^2} + x^2 = 1$

l) $x^2 + \frac{x^2}{y^2}(1+x)^2 = 1$

m) $2y + 8x^2y - 1 = 0$

Sección 9.4.

2.

θ	*sen*	*cos*	*tan*	*cot*	*sec*	*csc*
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	2
$-240°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$+\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$-330°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$300°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
$570°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-2

θ	*sen*	*cos*	*tan*	*cot*	*sec*	*csc*
$-480°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
$-225°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-2
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
$240°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
$-390°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	-2
$495°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

4. *a*) $-\text{sen}\,(30°) = \text{sen}\,(330°)$
b) $\cos(120°) = \cos(240°)$
c) $\tan(300°) = \tan(60°)$
d) $-\cot(135°) = \cot(225°)$
e) $\sec(360°) = \sec(0°)$
g) No existe.

Sección 9.5

4. -0.7002 8. -2.3662 12. -10.7119

16. 4.3812 20. -0.4252

25. $\text{sen}\,305°10' = -0.8174$ $\cot 305°10' = -0.7045$
$\cos 305°10' = 0.5759$ $\sec 305°10' = 1.7362$
$\tan 305°10' = -1.4193$ $\csc 305°10' = -1.2232$

29. $\text{sen}\,1.23 = 0.9424$ $\cot 1.23 = 0.3546$
$\cos 1.23 = 0.3342$ $\sec 1.23 = 2.9918$
$\tan 1.23 = 2.8198$ $\csc 1.23 = 1.0610$

35. $\theta = 75.33^\circ$
$\theta = 1.3148$ radianes

40. $\theta = 0.3333^\circ$
$\theta = 0.00581$

43. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{6}{\sqrt{61}}$
$\cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{61}}$
$\tan\theta = \dfrac{6}{5}$
$\cot\theta = \dfrac{5}{6}$
$\sec\theta = \dfrac{\sqrt{61}}{5}$
$\csc\theta = \dfrac{\sqrt{61}}{6}$

Sección 9.8

1. *b*) $\log_5 1 = 0$
d) $\log_8 4 = 2/3$
f) $\log_4 \dfrac{1}{16} = -2$
h) $\log_8 16 = 4/3$
j) $\log_x y = 2$

2. *b*) $10^1 = 10$
d) $36^{1/2} = 6$
f) $2^{-3} = 1/8$
h) $2^y = x$
j) $x^2 = y$

3. *b*) $x = 1$
d) $x = \sqrt{2}$
f) $x = -1$
h) $x = 5/2$
j) $x = 2$
l) $x = 5.1$
n) 8^5
o) $x = 3$
q) $x = 1/4$

4. *b*) $\log_b (xyz/w^2)$
d) $\log_b \dfrac{x+1}{y-z}$
f) $\log_a y^{1/3}/z^{2/5}$

6. *a*) $y = 4$
c) $y = 1$
e) $y = 3/25$

7. *b*) $x = y^{-3}$
   d) $x = y^{-1}$

12. *a*) log 9/log 2
    b) log 20/log 3
    c) (log 3 + log 4) /log (4/3)
    d) 1
    e) $(\log 8)^{1/3}$
    f) $\sqrt{3}$
    g) No hay solución
    h) 500
    i) $10^{1/3}$
    j) 1.000
    k) No hay solución
    l) 1

Sección 9.9

1. *b*) 2.8
   d) 90°
   f) 18.52
   h) 1.22

9. 27.35°

11. 2.83 y 10.67

13. 6.18 y 19.02

Sección 9.10

1. *b*) No hay solución.
   d) $30 \pm n\pi$, $90 \pm n\pi$
   f) No hay solución.

2. *b*) $\mu = \pi/2$ $\mu = 3\pi/2$
   d) 0°, 45°, 135°, 180°, 225°, 315°
   f) 90°, 270°, 116.56°, 296.56°
   h) 0°, 180°, 210°, 330°

   i) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$,

k) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 0, \pi$

n) $\pi/2$

o) 63.43°, 71.56°, 243.43°, 251.56°

q) 109.47, 250.53

s) No hay solución.

u) 81.87°, 116.57°, 261.87°, 296.57°

w) 19.5°, 41.8°, 138.2°, 160.5°

Seccion 9.11

2. *a*) $\sqrt{3} + i$

b) $-\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} i$

c) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

d) $+2.9544 - .5209\, i$

e) $.347 + 1.97\, i$

f) $-\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} i$

g) $-5.64 + 2.05\, i$

h) $-3.5693 + 3.5014\, i$

i) $2.85 + .94\, i$

j) $.99 + .092\, i$

4. $z_1 + z_2 = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2} + 1}{2} i$

$z_1 \quad z_2 = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2} - 1}{2} i$

$z_1 z_2 = 2 \text{ cis } 75°$

$z_1/z_2 = 2 \text{ cis } 15°$

6 *a*) $x = -1$, cis $60°$, cis $300°$

b) cis $\frac{\pi}{5}$, cis $\frac{3\pi}{5}$, -1, cis $\frac{7\pi}{5}$, cis $\frac{9\pi}{5}$

c) i, cis $\frac{7\pi}{6}$, cis $\frac{11\pi}{6}$

d) $\sqrt[10]{18}$ cis $\frac{\pi}{4}$, $\sqrt[10]{18}$ cis $\frac{13\pi}{20}$, $\sqrt[10]{18}$ cis $\frac{21\pi}{20}$

$\sqrt[10]{18}$ cis $\frac{29\pi}{20}$, $\sqrt[10]{18}$ cis $\frac{37\pi}{20}$

e) $\sqrt[4]{2}$ cis $\frac{\pi}{8}$, $\sqrt[4]{2}$ cis $\frac{5\pi}{8}$, $\sqrt[4]{2}$ cis $\frac{7\pi}{8}$, $\sqrt[4]{2}$ cis $\frac{9\pi}{8}$

f) 3, 3 cis $\frac{2\pi}{3}$, 3 cis $\frac{4\pi}{3}$

Sección 10.1

2. *a*) $\sqrt{8} + \sqrt{65} + \sqrt{117}$

b) $7 + \sqrt{2} + \sqrt{61} + \sqrt{40}$

4. $(2, 3)$, área $= 20$ unidades^2

6. Dos soluciones: $(1, 1 - 2\sqrt{3})$, $(1, 1 + 2\sqrt{3})$

8. $(-16, -1)$

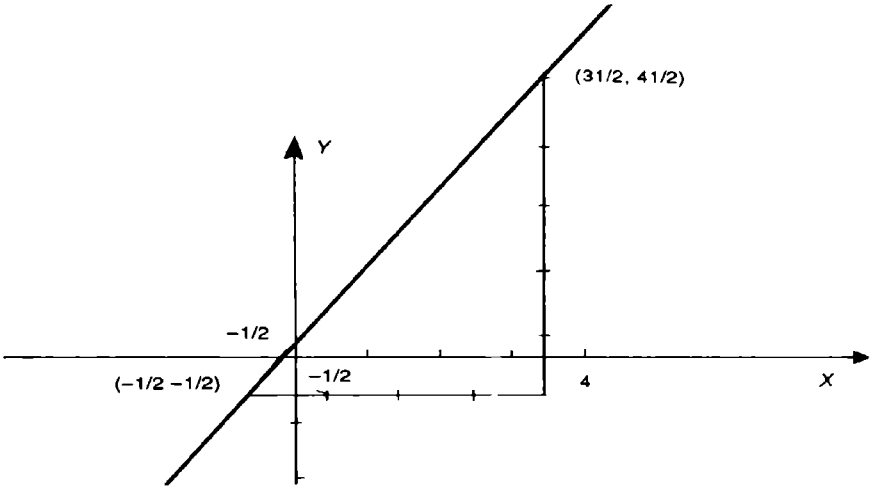
10. *b*) $\perp$

c) $\perp$

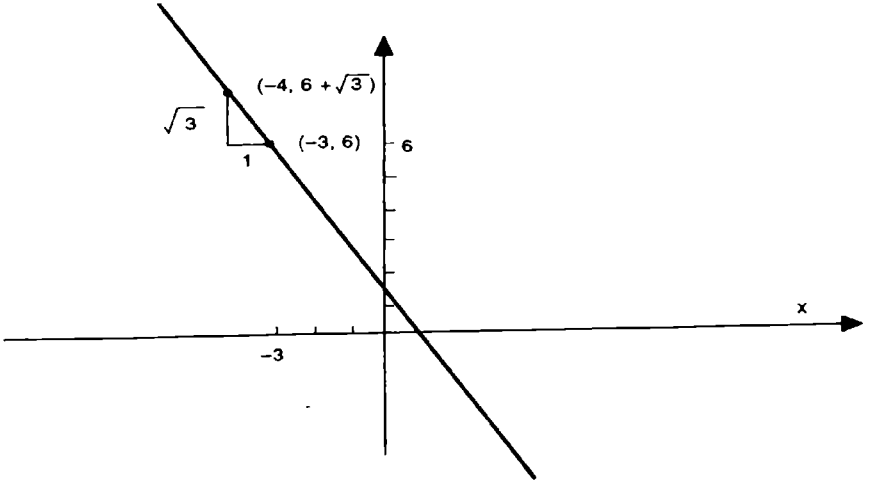
e) $\parallel$

f) $\perp$

16. *d*)



17. *f*) $m = \tan 120°$
$m = -\sqrt{3} \approx -1.732$



Sección 10.2

1. *b*) $y + 1 = (x - 6) / \sqrt{3}$
   d) $8x + 5y + 1 = 0$
   f) $y + 5 = \sqrt{3}\ (x + 2)$
   h) $5x - 7y - 75 = 0$
   j) $4x + 3y + 1 = 0$

2. *b*) $m = -\frac{2}{5}$; $b = \frac{13}{5}$
   d) $m = \frac{8}{15}$; $b = \frac{17}{3}$
   f) $m = -1/2, b = \frac{21}{2}$
   h) $m = 0; b = -5$
   j) ni m ni b existen

4. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$

6. $y = 6x - 15$

8. $8x + 18y - 73 = 0$

10. Area = 10

14. $3x + 4y - 24 = 0$

15. *b*) No es posible.
    d) $k = -4/5$

16. *b*) (3, − 1)
    d) Son paralelas.
    f) (24/11, 5/11)

18. *b*) $7/\sqrt{26}$
    d) 126/17

19. *a*) $3/\sqrt{34}$
    b) $\frac{20}{3\sqrt{257}}$

Sección 10.3

1. *b*) Centro = (0, 0), Radio = 5, Dominio = [− 5, 5] y
   Imagen = [− 5, 5]

d) Centro = (2, 0), Radio = $\sqrt{3}$, Dominio = $[2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$ y Imagen = $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

f) Centro = $(-3, -5)$, Radio = 8, Dominio = $[-11, 5]$ y Imagen = $[-13, 3]$

2. *a*) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$
e) $4x^2 + 4y^2 - 24x + 16y + 27 = 0$
g) $x^2 + y^2 + 14x + 26y = 0$
i) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 22 = 0$
k) $85x^2 + 85y^2 - 680x - 170y + 1381 = 0$

m) $(x + \frac{36}{5})^2 + (y + \frac{39}{5})^2 = -\frac{10}{3}$

ñ) $(x + \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{37}{2}$

p) $x^2 + y^2 + 16x + 16y + 64 = 0$
r) $(x-3)^2 + (y - 9 - 3\sqrt{10})^2 = 9$; $(x+3)^2 + (y + 9 + 3\sqrt{10})^2 = 9$
t) No hay solución.
v) $64x^2 + 64y^2 - 256x + 112y - 320 = 0$

x) $(x - \frac{109}{26})^2 + (y - \frac{81}{26})^2 = \frac{11890}{676}$

4. $x - 2y + 10 = 0$

6. $k = -8$

8. $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

10. *a*) $C(+1, -5)$, $R = 1$
c) Es el punto $(1, -3)$.
e) Conjunto vacío.
g) Centro en $(-5, 9)$ y radio $\sqrt{3}$
i) Es el punto $(-9, -12)$
k) Conjunto vacío.
m) Centro en $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ y radio $\sqrt{7}$
ñ) Centro en $(-2, 0)$ y radio 2.
p) Conjunto vacío.
r) Centro en (10, 13) y radio 10.
t) Es el punto $(-\frac{1}{3}, -2)$.
v) Conjunto vacío.

11. *a*) La circunferencia de radio $\frac{3}{2}$ con centro en el origen y su interior.
c) La parte de la circunferencia con centro en el origen y de radio 3 que está arriba del eje de las x.
e) La circunferencia de radio 2 con centro en el origen y su interior.
g) Todo el plano.

Sección 10.4

1. *b*) $x^2 = 36y$
d) $(y - 3)^2 = 16(x - 2)$
f) $(y + 2)^2 = -28(x - 5)$
h) $(y - 1)^2 = -2(x - \frac{3}{2})$
j) $(x - 2)^2 = 4(y + 4)$
l) $(y + 2)^2 = 12(x + 1)$
n) $x^2 = -6(y - 13/2)$ ó $x^2 = 6(y - 7/2)$

2. $x^2 - x - y = 0$

4. $(y + 1)^2 = 8(x - 1)$

5. *b*) $V(0, 0)$, $F(-5, 0)$, $x = 5$, $(-5, 10)$ y $(-5, -10)$, 20
d) $V(0, 0)$, $F(0, -3)$, $y = 3$, $(-6, -3)$ y $(6, -3)$, 12
f) $V(0, 0)$, $F(3, 0)$, $x = -3$, $(3, 6)$ y $(3, -6)$, 12
h) $V(0, 0)$, $F(0, -5)$, $y = 5$, $(-10, -5)$ y $(10, -5)$, 20
j) $V(0, 0)$, $F(-\frac{1}{8}, 0)$, $x = \frac{1}{8}$, $(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$ y $(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{4})$, $\frac{1}{2}$
l) $V(3, 3)$, $F(1, 3)$, $x = 5$, $(1, 7)$ y $(1, -1)$, 8
n) $V(10, 0)$, $F(10, 8)$, $y = -8$; $(26, 8)$ y $(-6, 8)$; 32
o) $V(1/8, -1/4)$, $F(3/8, -1/4)$, $x = -\frac{1}{8}$, $(3/8, 1/4)$ y $(3/8, -3/4)$, 1.
q) $V(4, 0)$, $F(1, 0)$, $x = 7$, $(1, 6)$ y $(1, -6)$, 12
s) $V(0, 2/3)$, $F(-3/2, 2/3)$, $x = 3/2$, $(-3/2, 11/3)$ y $(-3/2, -7/3)$, 6
u) $V(2, -1)$, $F(3, -1)$, $x = 1$, $(3, 1)$ y $(3, -3)$, 4
w) $V(2, 3)$, $F(2, 7/2)$, $y = 5/2$, $(1, 7/2)$ y $(3, 7/2)$, 2
y) $V(3, -2)$, $F(3, 1)$, $y = -5$, $(-3, 1)$ y $(9, 1)$, 12
a') $V(0, 3)$, $F(-4, 3)$, $x = 4$, $(-4, 11)$ y $(-4, -5)$, 16
c') $V(5, 2)$, $F(6, 2)$, $x = 4$, $(6, 4)$ y $(6, 0)$, 4

e') $V(-5, -4)$, $F(-5, -5/2)$, $y = -11/2$, $(-8, -5/2)$ y $(-2, -5/2)$, 6

g') $V(-3/4, 4)$, $F(13/4, 4)$, $x = -19/4$, $(13/4, 12)$ y $(13/4, -4)$, 16

Sección 10.5

1. *b*) $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$

d) $\frac{(x+5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

f) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{169} = 1$

h) $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

j) $\frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

l) $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1$

3. *a*) El punto $(1, -3)$
c) Elipse.
e) Elipse.
g) Conjunto vacío.
i) El punto $(1/2, 1)$
k) Conjunto vacío.
m) Elipse.
ñ) El punto $(3, 1/2)$

Sección 10.6

1. *b*) $\frac{(x+1)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{28} = 1$

d) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

f) $\frac{(x-7)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

h) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

j) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3.24} = -1$

l) $\frac{x^2}{36} - \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

n) $73y^2 - 9x^2 = 81$

o) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{4} = 1$

3. *a*) Hipérbola.
c) Hipérbola.
e) Hipérbola.
g) Hipérbola.
i) Hipérbola.
k) Hipérbola.
m) Hipérbola.

Sección 10.7

1. *b*) El punto (2, 1)
d) Hipérbola.
f) Parábola.
h) Un par de rectas.
j) El punto (1/2, 1/2)
l) El punto (1/2, 1/2)
n) Circunferencia
o) El punto (1/4, 0)
q) Conjunto vacío.
s) Conjunto vacío.
u) Parábola.
w) Circunferencia.
y) Parábola.
a') Elipse.
c') Hipérbola.

Sección 10.8

8. $100x^2 + 36y^2 = 3{,}600$

9. $16x^2 - 16y^2 - 16x - 8y - 61 = 0$

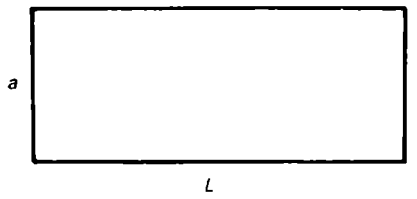
10. $9x^2 - 4y^2 - 18x + 96y - 603 = 0$

Sección 11.1

1. *b*) no
   d) sí
   f) no
   h) sí
   j) sí

2. *b*) sí
   d) sí
   f) sí
   i) no
   k) no
   m) no
   n) sí
   p) no

3. *b*) $D = \{x \in R / x \neq -5\}$
   $I = \{y \in R / y \neq 0\}$
   d) $D = \{x \in R / x \neq 0\}$
   $I = \{y \in R / y \neq 0 \text{ y } y \geq -1/4\}$
   f) $D = \{x \in R / x \neq 3 \text{ y } x \neq -3\}$
   $I = \{y \in R / y \neq 0\}$
   h) $D = \{x \in R\}$
   $I = \{y \in R / 0 < y < 1/4\}$
   j) $D = \{\{x \in R / y \leq 9\}\}$
   $I = \{y \in R / y < 0\}$
   l) $D = \{x \in R / x \leq -5 \text{ ó } x \geq 5\}$
   $I = \{y \in R / y \geq 0\}$
   n) $D = \{x \in R / -5 \leq x \leq 5\}$
   $I = \{y \in R / -5 \leq y \leq 0\}$
   o) $D = \{x \in R / -5 < x < 5\}$
   $I = \{y \in R / y < -1/5\}$
   q) $D =$ Reales
   $I =$ Reales
   s) $D = \{x \in R / x \neq 0\}$
   $I = \{y \in R / y > 0\}$
   u) $D =$ Reales
   $I = \{y \in R / y \geq -\sqrt{9}\}$
   w) $D =$ Reales
   $I = \{y \in R / y \geq 1\}$



Variables.

p = perímetros del ☐
a = ancho del ☐
L = largo del ☐
A = área del ☐

¿Cuál es la pregunta?

Expresar el perímetro en función de su área.

Datos.

El ancho es la tercera parte del largo.
Es decir: $a = \frac{1}{3} L$

Solución.

$A = aL$ $\qquad$ $P = 2a + 2L$

$A = \left(\frac{1}{3}L\right)(L)$ $\qquad$ $P = 2\left(\frac{1}{3}L\right) + 2L$

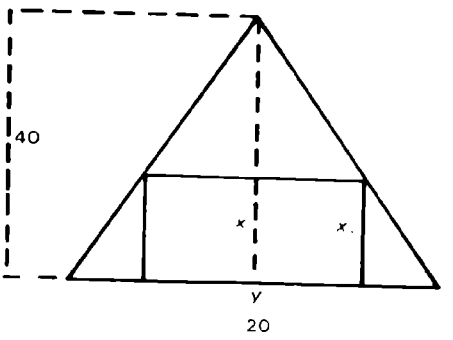
$A = \frac{1}{3}L^2$ $\qquad$ $P = \frac{2}{3}L + 2L$

$L^2 = 3A$ $\qquad$ $P = \frac{8}{3}L$

$L = \sqrt{3A}$

$$P = \frac{8}{3}(\sqrt{3A})$$

7.



Variables:

x = ancho del rectángulo
y = largo del rectángulo
A = área del rectángulo.

¿Cuál es la pregunta?

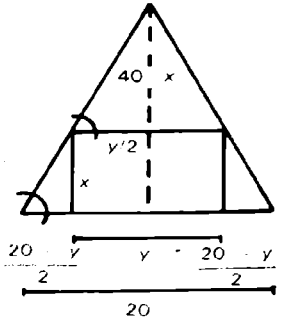
Expresar área del [ ] en función de su largo.

Datos

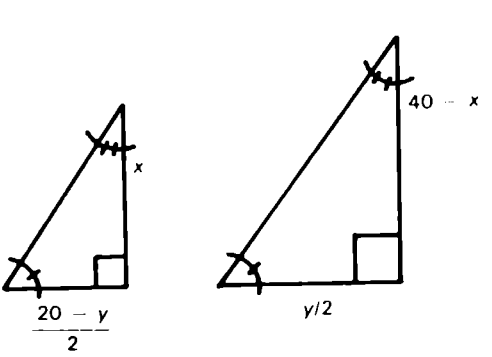
Rectángulo inscrito en el triángulo isósceles de base 20 y altura 40.

Solución.

En la figura:



se observan dos Δ semejantes.



y sus lados serán proporcionales.

es decir:

$$\frac{x}{\frac{20 - y}{2}} = \frac{40 - x}{y/2}$$

$$x(y/2) = (40 - x)\left(\frac{20 - y}{2}\right)$$

$$(2)\left(\frac{xy}{2}\right) = (40 - x)(20 - y)$$

$$xy = 800 - 40y - 20x + xy$$

$$0 = 800 - 40y - 20x$$

$$20x = 800 - 40y$$

$$x = \frac{800 - 40y}{20}$$

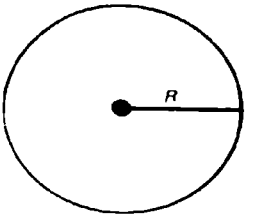
$$\boxed{x = 40 - 2y}$$

así: $A = xy$

$$A = (40 - 2y)(y)$$

$$\boxed{A = 40y - 2y^2}$$

9.



Variables.

P = perímetro del ◯
R = radio del ◯
A = área del ◯

¿Cuál es la pregunta?

Expresar al perímetro en función de su área.

Solución.

$P = 2\pi R$. y $A = \pi R^2$

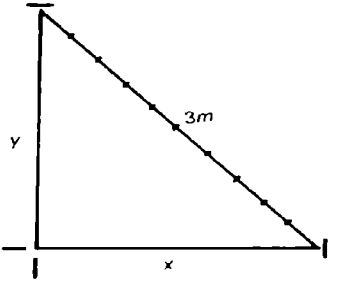
$$\frac{A}{\pi} = R^2$$

$$R = \sqrt{A/\pi}$$

así: $P = 2\pi\ R$

$$\boxed{P = 2\pi\ \sqrt{A/\pi}}$$

11.



Variables.

x = distancia desde la base de la escalera a la pared.
y = distancia desde la parte superior de la escalera al piso.

¿Cuál es la pregunta?

Expresar la distancia desde el piso a la parte superior de la escalera en función de la distancia desde la base de la escalera a la pared.

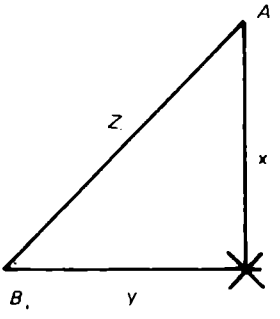
Solución.

De la figura y teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$\boxed{y = \sqrt{9 - x^2}}$$



Variables.

x = distancia del coche A a la intersección.
y = distancia del coche B a la intersección.
z = distancia entre los dos coches.
v_1 = velocidad.
d = distancia.
t = tiempo.

Datos.

$V_{\text{coche}}\ A = 90$ km/h.
$V_{\text{coche}}\ B = 80$ km/h.

¿Cuál es la pregunta?

Expresar distancia entre los coches en función del tiempo.

Solución.

$$V = \frac{d}{t} \text{ ó } d = vt$$

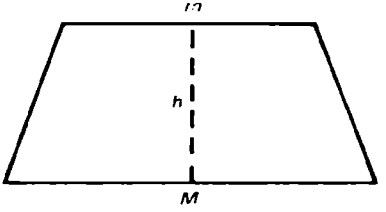
Para el coche A, $x = (V_A)(t)$ y para el coche B, $y = (V_B)(t)$ así:

$$x = 90\ t \text{ y } y = 80\ t$$

Por teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$Z^2 = x^2 + y^2$$
$$Z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$Z = \sqrt{(90t)^2 + (80t)^2}$$
$$Z = \sqrt{8100t^2 + 6400t^2}$$
$$Z = \sqrt{14500t^2}$$
$$Z = 120.41\ t$$

15.



Variables:

m = lado menor.
M = lado mayor.
h = altura.
A = área del trapecio.

¿Cuál es la pregunta?

Expresar el área en función del lado mayor.

Datos.

$$m = \frac{1}{3} M$$

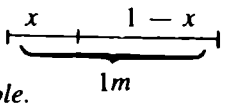
$$h = \frac{1}{2} M$$

Solución.

$$A = \left(\frac{m + M}{2}\right) h$$

$$A = \left(\frac{\frac{1}{3}M + M}{2}\right)\left(\frac{1}{2}M\right) = \left(\frac{\frac{4}{3}M}{2}\right)\left(\frac{1}{2}M\right)$$

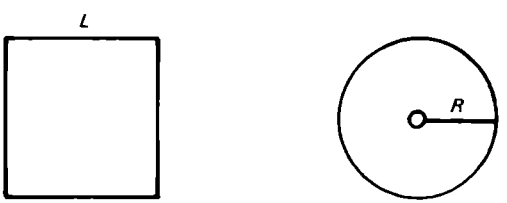
$$A = M^2/3$$

17. 

Variable.

x = longitud del extremo del alambre al corte.
L = lado del $\square$
R = radio del $\bigcirc$
P_1 = perímetro del $\square$
P_2 = perímetro del $\bigcirc$
A_T = área del $\square$ + área de la $\bigcirc$

Datos.



Perímetro del $\square$ = x

Perímetro del $\bigcirc$ = $1 - x$

¿Cuál es la pregunta?

Expresar el área total de las dos figuras en términos de x.

Solución.

$$A_T = A_{\square} + A_{\bigcirc}$$
$$A_T = L^2 + \pi R^2$$

sabemos que: $P_1 = 4L$

$$x = 4L$$

ó $\boxed{L = \frac{x}{4}}$

también: $P_2 = 2\pi R$

$$1 - x = 2\pi R$$

$$\boxed{R = \frac{1 - x}{2\pi}}$$

así, el área de las dos figuras es:

$$A_T = L^2 + \pi R^2$$

$$A_T = (x/4)^2 + \pi \left(\frac{1 - x}{2\pi}\right)^2$$

$$A_T = \frac{x^2}{4} + \pi \frac{(1 - x)^2}{4\pi^2}$$

$$A_T = \frac{x^2}{4} + \frac{(1 - x)^2}{4\pi}$$

$$\boxed{A_T = \frac{x^2\pi + (1 - x)^2}{4\pi}}$$

22. *a*) Es inyectiva y no sobreyectiva
c) Es biyectiva
e) Es inyectiva y no sobreyectiva
g) Es biyectiva
i) Es inyectiva y no sobreyectiva

Sección 11.2

1. $f(2 - x) = x$
$f(b^2) = 2 - b^2$

3. $f(x + 2) = \dfrac{2}{(x + 2)^2} + \dfrac{3}{(x + 2)} + 3x + 2$

$f(\sqrt{5}) = \dfrac{18\sqrt{5} - 18}{5}$

5. $g(2) = -1/2 \; ; \; g(x + 3) = \dfrac{x - 2}{x + 7}$

7. $f(-1) = -2 \; ; \; f(2) = 16$

9. $f(x + 1) = \dfrac{x + 2}{x^2 - x} \; ; \; f(-2) = \dfrac{-1}{6}$

11. $f(1 + h) = \dfrac{3(h + 2)}{h - 2} \; ; \; f(6) = 7$

13. $f(1) = \frac{5}{2} - \sqrt{3}$

15. 0

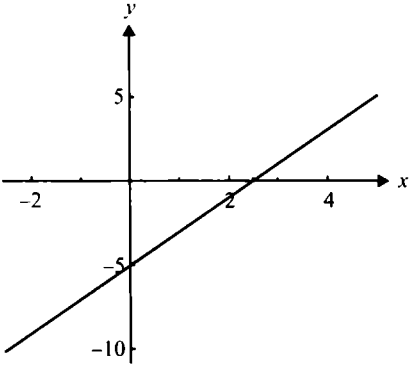
17. $f(x + 1) = x + y + 2$
$f(0) = y + 1$

19. $f(1) = 4$; $f(a) = |a^2 - 5|$; $f(0) = 5$

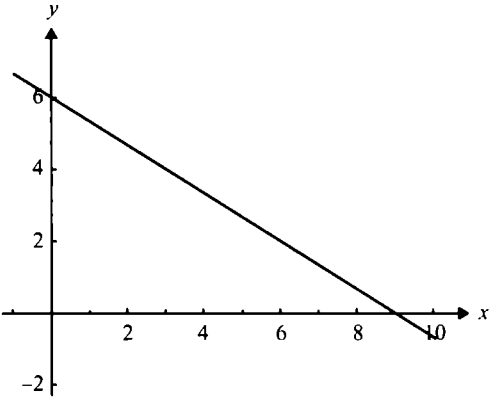
$$\frac{f(x)}{f(x+t)} - f(x) = \frac{x + y + 1}{x + y + 1 + t} - x - y - 1$$

Sección 11.3

1. *a*)



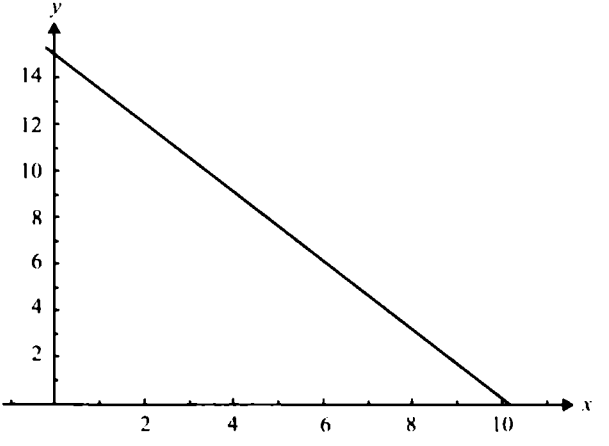
g)



3. *a*) 80% *b*) 2.5 *c*) en las primeras semanas.

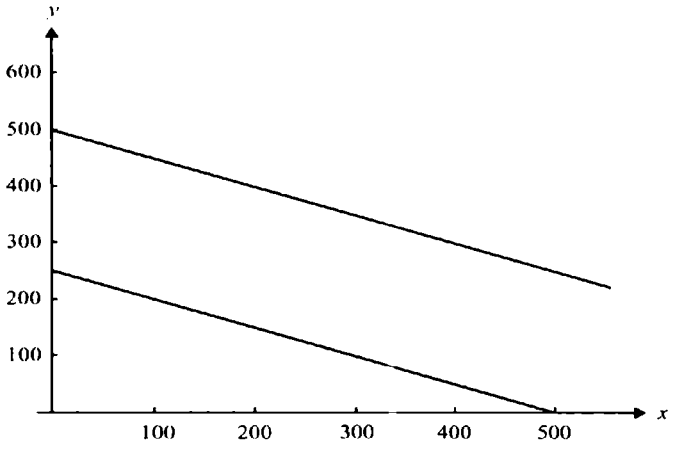
Sección 11.4

1. *a*) no *e*) no *i*) si *l*) si *n*) si *o*) si
3. *a*) 0 *c*) negativo e) positivo
5. *a*) $f(-2) = \frac{10}{3}$ *d*) $x = 3$ *h*) $c = -3$
7. *b*) $f(4) = 9{,}100$
d) Los valores de y están en miles.



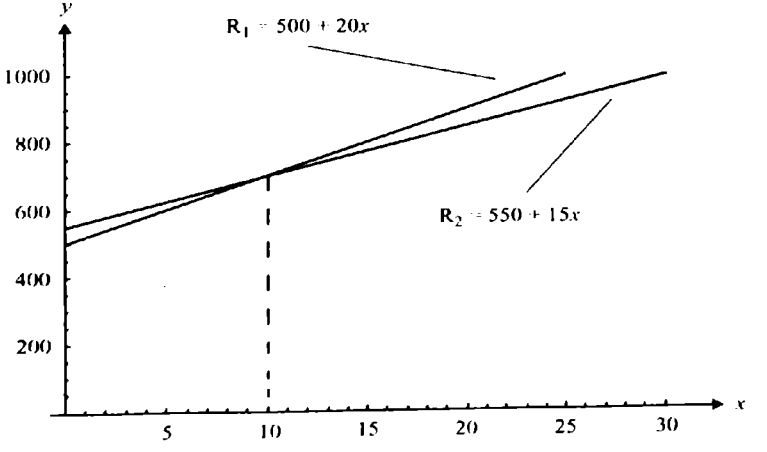
9. *a*) $y = 250 - \left(\frac{1}{2}\right)x$

b)



11. Renta de la primera agencia = R_1 y Renta de la segunda agencia = R_2

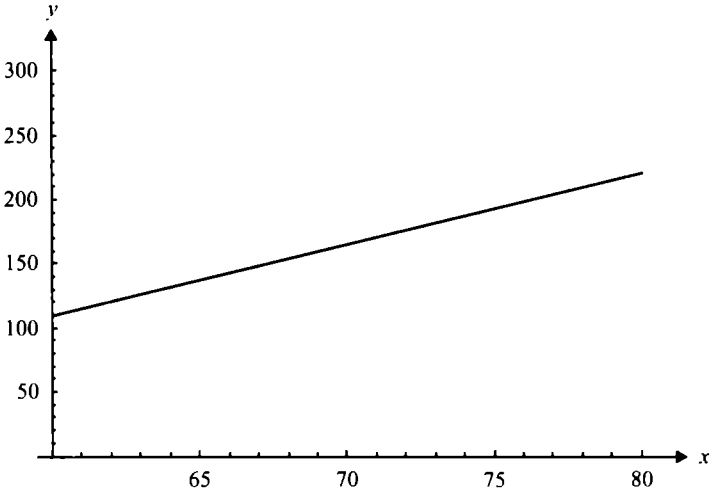
$R_1 = 500 + 20x$ $R_2 = 550 + 15x$



Si el número de horas a rentar es mayor de 10 entonces conviene rentar un tractor de la segunda empresa.

13. *a*) W = 10 s *c*) si W = 12 entonces S = 0.83

15.

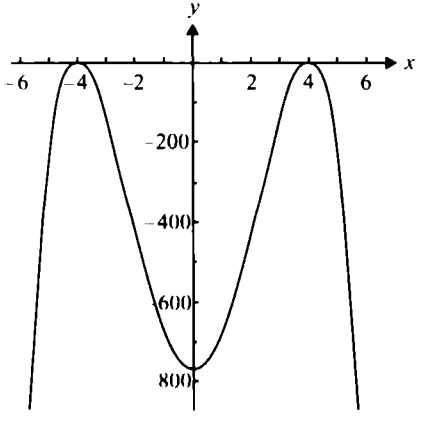


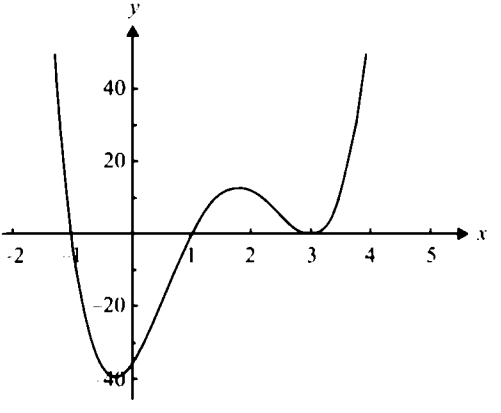
17. *a*) $V = 125t + 3{,}650$ c) $V = 1000t + 30{,}500$

Sección 11.5

1. *ii*) Cuarto grado y el coeficiente del término en x de mayor exponente es positivo.
   v) Segundo grado y el coeficiente del término en x de mayor exponente es positivo.

3. *c*) *e*)

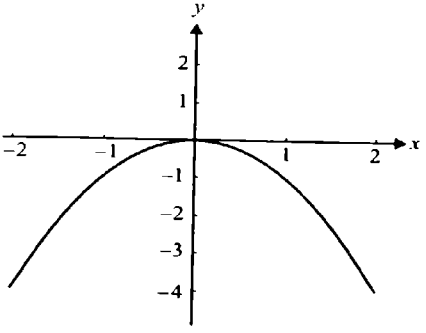




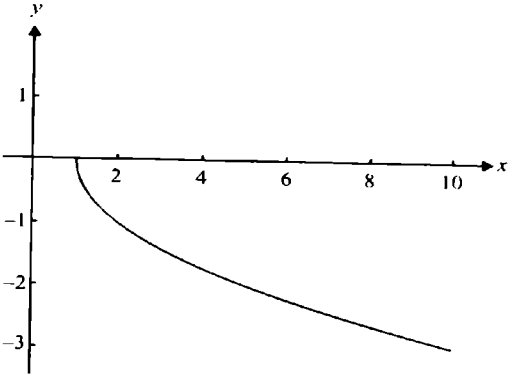
5. *b*) no *e*) 2.03 *g*) 3

Sección 11.6

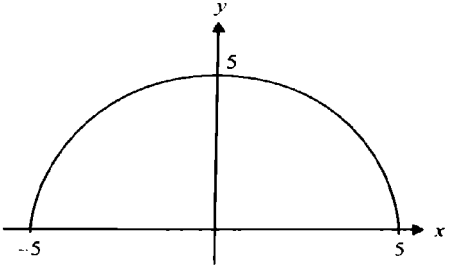
4. Dominio = Reales
   Imagen = $(-\infty,0)$



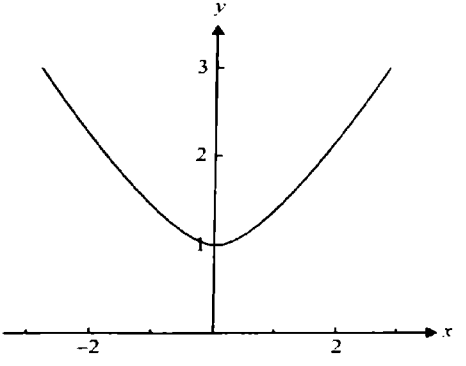
8. Dominio = $(1,\infty)$
   Imagen = $(-\infty,0)$



12. Dominio = $(-5,5)$
    Imagen = $(0,5)$

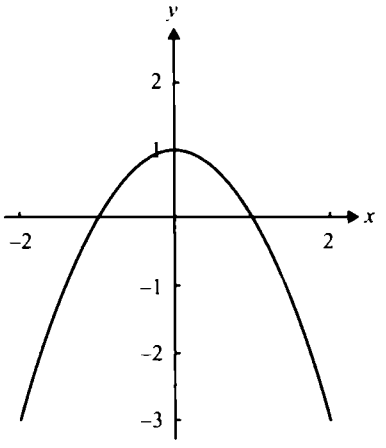


16. Dominio = $(-\infty,\infty)$
    Imagen = $(1,\infty)$



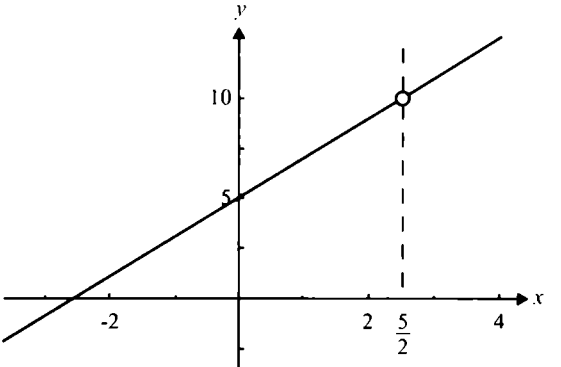
20. Dominio = $(-\infty,\infty)$

Imagen = $(-\infty,1)$

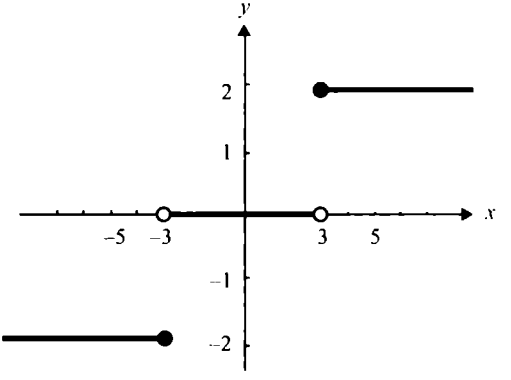


24. Dominio = $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2},\infty\right)$

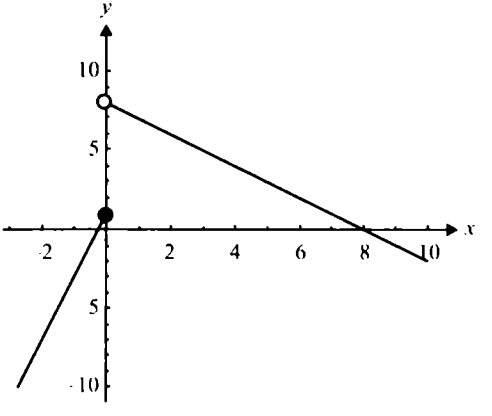
Imagen = $(-\infty,\infty)$



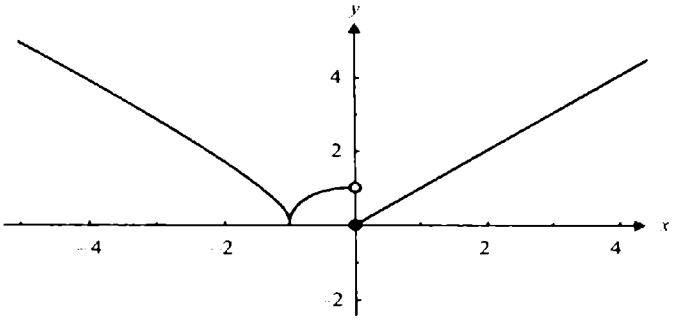
28. Dominio = $(-\infty,\infty)$ Imagen = $(-2,0,2)$



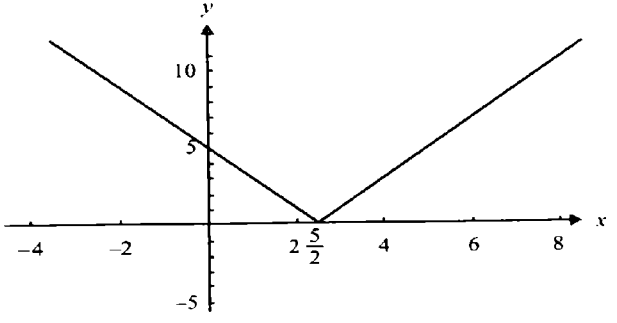
32. Dominio = $(-\infty,\infty)$
Imagen = $(-\infty,7)$



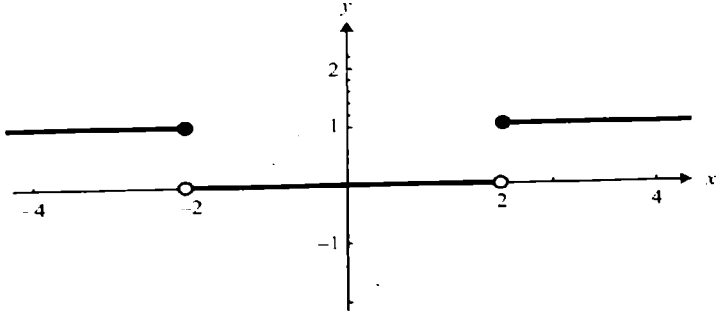
36. Dominio = $(-\infty,\infty)$, Imagen = $(0,\infty)$



40. Dominio = Reales, Imagen = $(0,\infty)$

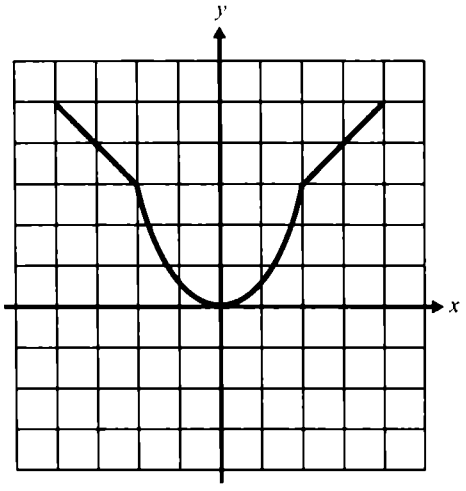


48. Dominio = Reales, Imagen = (0,1)

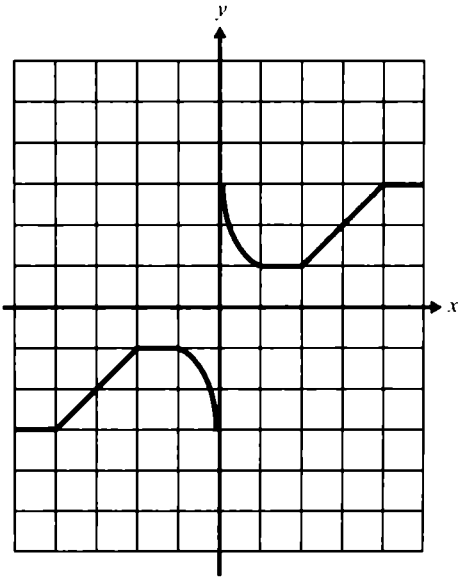


Sección 11.7

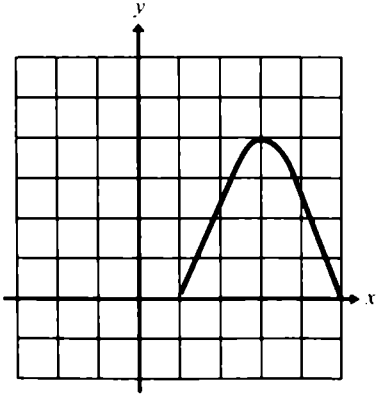
8.



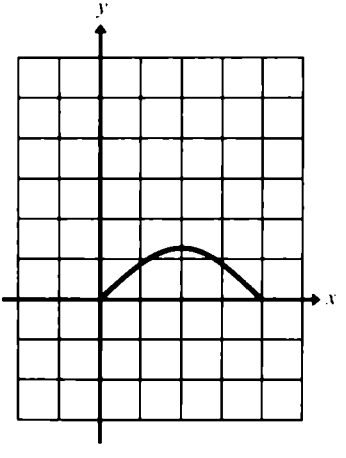
13.



15.



19.



Sección 11.8

1. *a)* $f(x) + g(x) = 5x + 2$

$f(x) - g(x) = x - 12$

$f(x)\, g\,(x) = 6x^2 + 11x - 35$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - 5}{2x + 7}$$

D_f = Reales D_g = Reales

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg}$ = Reales

$D_{f/g} = \{x \in R \,/\, x \neq -7/2\}$

c) $$f(x) + g\,(x) = \frac{2x^2 + 6x + 9}{x^3 + 3x^2}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{-3\,(2x + 3)}{x^2\,(x + 3)}$$

$$f(x)\, g\,(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x)/g(x) = \frac{x^2}{(x + 3)^2}$$

$D_f = \{x \in R \,/\, x \neq -3\}$, $D_g = \{x \in R \,/\, x \neq 0\}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = \{x \in R \,/\, x \neq -3 \text{ y } x \neq 0\}$

$D_{f/g} = \{x \in R \,/\, x \neq -3 \text{ y } x \neq 0\}$

e) $$f(x) + g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) - g\,(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 4$$

$$f(x)\, g\,(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} - 4$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + 2x^2}{1 - 2x^2}$$

$D_f = \{x \in R \,/\, x \neq 0\}$, $D_g = \{x \in R \,/\, x \neq 0\}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = \{x \in R \,/\, x \neq 0\}$

$D_{f/g} = \{x \in R \,/\, x \neq 0 \,,\, x \neq \sqrt{1/2} \,,\, x \neq -\sqrt{1/2}$

g) $f(x) + g(x) = 2x$

$f(x) - g(x) = -2$

$f(x)\,g(x) = x^2 - 1$

$f(x)_{/g(x)} = \dfrac{x-1}{x+1}$

$D_f = \{x \in R / x \neq -1\}$ D_g Reales

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = \{x \in R / x \neq -1\}$

$D_{f/g} = \{x \in R / x \neq -1\}$

i) $f(x) + g(x) = \dfrac{1}{x^2} + \sqrt{x}$

$f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x^2} - \sqrt{x}$

$f(x)\,g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$

$f(x)/g(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$

$D_f = \{x \in R / x \neq 0\}$

$D_g = \{x \in R / x \geq 0\}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = \{x \in R / x > 0\}$

$D_{f/g} = \{x \in R / x > 0\}$

k) $f(x) + g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x+1}$

$f(x) - g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x+1}$

$f(x)\,g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

$f(x)_{/g(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$

$D_f = \{x \in R / x > 0\}$, $D_g = \{x \in R / x \geq -1\}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = \{x \in R / x > 0\}$

$D_{f/g} = \{x \in R / x > 0\}$

m) $f(x) + g(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{9 - x^2}$

$f(x) - g(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{9 - x^2}$

$f(x)\, g(x) = \sqrt{x^2 - 4}\,\sqrt{9 - x^2}$

$f(x) / g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{9 - x^2}}$

$D_f = \{x \in R / x \leq -2 \text{ ó } x \geq 2\}$

$D_g = \{x \in R / -3 \leq x \leq 3\}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = [-3,-2] \cup [2,3]$
$D_{f/g} = (-3,-2) \cup (2,3)$

n) $f(x) + g(x) = (x^2 + 1)\,\sqrt[2]{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^2} + 1$

$f(x) - g(x) = (x^2 + 1)\,\sqrt[2]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2} - 1$

$f(x)\, g(x) = (x^2 + 1)\,\sqrt{x^2 + 1}\,(x^{2/3} + 1)$

$f(x)_{/g(x)} = \dfrac{(x^2 + 1)\,\sqrt{x^2 + 1}}{x^{2/3} + 1}$

$D_f = \text{Reales}\ D_g = \text{Reales}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = \text{Reales}$
$D_{f/g} = \text{Reales}$

2. *a*) $f(g(x)) = 6x + 16$

$g(f(x)) = 6x - 3$

$f(f(x)) = 9x - 20$

$g(g(x)) = 4x + 21$

c) $f(g(x)) = 2\sqrt{x} + 3$

$g(f(x)) = \sqrt{2x + 3}$

$f(f(x)) = 4x + 9$

$g(g(x)) = \sqrt[4]{x}$

e) $f(g(x)) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$

$g(f(x)) = \sqrt{(\sqrt{x})^2 - 1}$

$f(f(x)) = \sqrt[4]{x}$

$g(g(x)) = \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - 1}$

g) $f(g(x)) = 10$

$g(f(x)) = 2$

$f(f(x)) = x^4 + 12x^2 + 6x^3 + 9x$

$g(g(x)) = 2$

i) $f(g(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$

$g(f(x)) = 1 - \frac{1}{(\sqrt{x})^2}$

$f(f(x)) = \sqrt[4]{x}$

$g(g(x)) = \frac{1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2}$

k) $f(g(x)) = \frac{1}{x^2}$

$g(f(x)) = \frac{1}{x^2}$

$f(f(x)) = x^{4/9}$

$g(g(x)) = x^9$

l) $f(g(x)) = \sqrt{4x^3 - 6x^2 - x^4 + 4x}$

$g(f(x)) = 2\sqrt{2x - x^2} - (\sqrt{2x - x^2})^2$

$f(f(x)) = \sqrt{2\sqrt{2x - x^2} - \left(\sqrt{2x - x^2}\right)^2}$

$g(g(x)) = 4x - 6x^2 + 4x^3 - x^4$

4.

b) $y = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -2 & x > 0 \end{cases}$

4.

d) $y = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2 & x \geq 0 \end{cases}$

f) $y = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ x & x \leq -1 \text{ ó } x \geq 1 \end{cases}$

h) $y = \begin{cases} -2x - 2 & x < -2 \\ 2 & -2 \leq x \leq 0 \\ 2x + 2 & x > 0 \end{cases}$

j) $y = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ -x & x = 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$

l) $y = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ -1 & 2 \leq x < 3 \\ 0 & x \geq 3 \end{cases}$

n) $y = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 1 & x = -2 \\ 2 & -2 < x < 3 \\ 1 & x = 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$

o) $y = \begin{cases} -2 & x < -2 \\ -1 & x = -2 \\ 0 & -2 < x < 3 \\ 1 & x = 3 \\ 2 & x > 3 \end{cases}$

q) $y = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x + & x > 0 \end{cases}$

s) $y = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

x) $y = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \text{no existe} & x = 0 \\ 1/2x & x > 0 \end{cases}$

Sección 11.9

1. *b)* $R^{-1} = \{(b, a) \mid a = b^2\}$

$= \{(1, 1)(2, 4)(3, 9)(4, 16)\}$

d) $R^{-1} = \{(b, a) \mid a$ es una ciudad del estado $b\}$

2. *b)* $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - \frac{7}{3}$

d) no existe

f) $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$

h) no existe

j) no existe

l) $f^{-1}(x) = \frac{-5x}{x - 2}$

n) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x} + 1}$

o) $f^{-1}(x) = \frac{7}{x - 2}$

q) $f^{-1}(x) = \frac{-3x}{2x - 1}$

s) $f^{-1}(x) = 1 + 1/\sqrt[3]{x}$

3. *a)* $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}$ si $x \geq 0$

c) $f^{-1}(x) = 3 - x^2$ si $x \geq 0$

e) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$ si $x \geq 0$

g) $f^{-1}(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ si $x \geq 0$

i) $f^{-1}(x) = \frac{x}{x - 1}$ si $x \neq 1$

k) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x + 1}$ si $x > -1$

Sección 12.1

1 *b)*F *e)* F *j)* F

*n)*V *o)* V *s)* F

Sección 12.2

3. La única verdadera es la afirmación *c*)

5. *c*), *d*)

8. *a*) $\delta = 1/2$ *b*) $\delta = 0.005$ *c*) $\delta = 0.006$ *d*) $\delta = 0.01$
e) $\delta = 0.001$ *f*) $\delta = 0.166$ *g*) $\delta = 1$ *h*) $\delta = 0.005$

9. $\lim_{x \to -2} f(x) = 3$ $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$
$\lim_{x \to -2^+} f(x) = 0$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$
$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -3$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$

12. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -1$

$\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

15. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -6$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 4$

$\lim_{x \to -1} f(x) =$ no existe

18. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 27$ $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 9$

$\lim_{x \to 3} f(x) =$ no existe

22. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0} f(x) =$ no existe

26. $\lim_{x \to -3^-} f(x) = 0$ $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -3} f(x) = 0$

29. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$ $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -1} f(x) = 0$

32. $\lim_{x \to 1/2^-} f(x) = 0$ $\lim_{x \to 1/2^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1/2} f(x) =$ no existe

35. $\lim_{x \to 1/2} f(x) =$ no existe

Sección 12.3

2.	-3	4.	$\sqrt{7}$	6.	$1/3$	8.	$-1/5$
10.	-1	12.	$34/5$	14.	-1	16.	0
18.	-63	20.	-1	22.	$\sqrt[3]{33}$	24.	1
26.	$1/4$	28.	7	30.	$1/6$	32.	$-1/2$
34.	27	36.	$11/17$	38.	$2/3$	40.	0
42.	1	44.	0	46.	-6	48.	$1/2\sqrt{x}$
50.	-3	52.	$1/6\ \sqrt[3]{2}$	54.	$1/\sqrt{2}$	56.	$1/\sqrt{2}$
58.	$\sqrt{2}$	60.	1	62.	0	64.	0
66.	$1/3$	68.	12	70.	$1/2$		

Sección 12.4

2.	3	4.	0	6.	$8/3$
8.	∞	10.	2	12.	-5
14.	-1	16.	$-3/\sqrt{8}$	18.	-2
20.	$3/10$	22.	$1/2$	24.	∞
26.	$-\infty$	28.	∞	30.	∞

32. A.V., $x = -5$; A.H., $y = 0$
34. A.V., $x = -3$; A.H., $y = 0$
36. A.V., $x = 4$ y $x = -4$; A.H., $y = -1$
38. A.V., $x = 1/2$; A.H., $y = 0$
40. A.V. no tiene ; A.H., $y = 2$, y $y = -2$
42. A.V. $x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$; A.H., no tiene

Sección 12.5

I.

2. sí	4. sí	6. sí
8. no	10. sí	12. no
14. sí	16. no	18. no
20. sí	22. sí	24. sí

II.

2. $x = 0$	4. $x = 2$	6. $x = 3$ y $x = -3$
8. $x = -5$	10. $x = 2$	12. en ningún valor
14. $x = 0$	16. $x = 0$	18. no existen
20. $x = -2/5$		

III.

2. $f(-1) = 0$ 4. $f(1) = -4$ 6. $f(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

8. $f(0) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

Sección 12.6

2. 0 4. 2 6. $2x$

8. $6x - 15x^2$ 10. $\dfrac{-5}{(x+2)^2}$ 12. $\dfrac{-2}{x^2}$

14. $\dfrac{3}{(x+3)^2}$ 16. $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ 18. $\dfrac{-2}{x^3}$

20. 12. 22. 12.

24. Ec. recta tangente es $y = 6x - 3$
Ec. recta normal es $y = \dfrac{-1}{6}x + \dfrac{19}{6}$

26. Ec. recta tangente es $y = 2 - x$
Ec. recta normal es $y = x$

28. Ec. recta tangente es $y = -1$
Ec. recta normal es $x = 2$

Sección 12.7

2. 0 4. 0 6. $20x^3 - 3$

8. $6x^5 - 6x^2 + 1$ 10. $64x^7 - x^{3/2}$

12. $3x^2 - 6x + 5 - 3x^{-2} + 10x^{-3} - 18x^{-4}$

14. $\frac{-4}{9}x^{-5/3} - \frac{9}{16}x^{-7/4} + \frac{4}{25}x^{-9/5}$

17. $2/3\ x^{1/3} - 2x^{-1/2} - 9$

18. $\frac{-10}{3}x^{-3} - \frac{6}{7}x^{-1/7}$

20. $\frac{-6}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5}$

22. $10x - 5$

24. $112x^3 - 108x^2$

26. $(3x^2 + 6)(5) + (5x - 2)(6x)$

28. $(7x + 3)(7) + (7x + 3)(7) = 2(7x + 3)(7)$

30. $(x^2 + 6x - 2)(3x^2 + 6) + (x^3 + 6x + 1)(2x + 6)$

32. $5(2x - 3)(6x - 7) + 6(2x - 3)(5x - 6) + 2(6x - 7)(5x - 6)$

34. $\frac{5x^2 - 8x}{5x - 1}$

36. $\frac{-5(18x + 6)}{(9x^2 + 6x - 1)^2}$

38. $\frac{8 + 48x^3}{(1 - 3x^3)^2}$

42. $\frac{(x^2 - 1)(2x + 2)(x^2 + 4) + (x^2 + 2x - 1)(10x)}{(x^2 + 4)^2}$

46. *i*) Ec. recta tangente es $y = -2$
Ec. recta normal es $x = 0$

48. *i*) Ec. recta tangente es $y = \frac{4}{9}x - \frac{1}{3}$
Ec. recta normal es $y = -\frac{9}{4}x - \frac{1}{3}$

50. *i*) Ec. recta tangente es $y = -8x/9 + 22/9$
Ec. recta normal es $y = 9x/8 - 19/12$

52. $5\sec x[\tan^2 x + \sec^2 x]$

54. $-3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x$

56. $\frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2}$

58. $x \cos x + 2 \operatorname{sen} x$

60. $\dfrac{2 \cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}$

62. $-\csc x\,[\cot^2 x + \csc^2 x]$

64. $x^2 \sec x[x \tan x + 3]$

66. Ec. recta tangente es $y = -x + \pi/2$
Ec. recta normal es $y = x - \pi/2$

Sección 12.8

I.

2. $-60\,(7 - 10x)^2$

4. $2\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3}\right)^3 \left[\dfrac{-2}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}\right]$

6. $\dfrac{-4\,(20x^3 + 6x)}{(5x^4 + 3x^2 + 1)^5}$

8. $\dfrac{-3x}{\sqrt{5 - 3x^2}}$

10. $\dfrac{15x^2 - 12x + 8}{3\sqrt[3]{(5x^3 - 6x^2 + 8x - 1)^2}}$

12. $\dfrac{-5}{2x^2\sqrt{5/x}} + \dfrac{2}{x^2\sqrt{4/x}} = \dfrac{-\sqrt{5}}{2x\sqrt{2}} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

14. $\dfrac{-5\,(x^2 + x - 1)}{6\,(x^3/3 + x^2/2 - x)^{11/6}}$

16. $\dfrac{8x(7x^3 - 1)^{1/3}}{(8x^2 + 5)^{1/2}} + \dfrac{(8x^2 + 5)^{1/2}\,(21x^2)}{3\,(7x^3 - 1)^{2/3}}$

18. $\dfrac{2x\,(x^2 + 4)^{1/3}}{3\,(x^2 - 4)^{2/3}} + \dfrac{2x\,(x^2 - 4)^{1/3}}{3\,(x^2 + 4)^{2/3}}$

24. $\dfrac{24\,(x + 1)}{(4x^2 + 8x - 1)^2}$

28. $\dfrac{5x^2 + 4x}{(5x + 2)^2}$

32. $\dfrac{2x\,(6x^3 - 2x^2)^{1/4} - \dfrac{1}{4}\,x^2\,(6x^3 - 2x^2)^{-3/4}\,(18x^2 - 4x)}{(6x^3 - 2x^2)^{1/2}}$

34. $\dfrac{\frac{1}{2}(x+1)^{1/3}(x-1)^{-1/2} - \frac{1}{3}(x-1)^{1/2}(x+1)^{-2/3}}{(x+1)^{2/3}}$

40. $\dfrac{-8}{(x-3)^2}$

46. $\dfrac{-1}{4\sqrt{1+\sqrt{1-x}}\sqrt{1-x}}$

48. $\dfrac{-x}{3(x^2+1)(x^2+1)^{1/6}}$

II.

2. Ec. recta tangente $4y + x - 9 = 0$
   Ec. recta normal $y - 4x + 2 = 0$
4. Ec. recta tangente $y = 1$
   Ec. recta normal $x = 0$

III.

2. $2\cos(2x+5)$
4. $-3\cos^2 x \sec^2 3x - 2\cot 3x \operatorname{sen} x \cos x$
6. $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$
8. $\dfrac{3\cos^2 x \cos x - 2\operatorname{sen}^3 x \tan^2 x}{\sec 2x}$
10. $2\sec^2 x^{1/2} \tan x^{1/2}$
12. $-2\csc 2x \cot 2x \sec(\csc 2x)\tan(\csc 2x)$
14. $2\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\cos^3 3x}[3\cos(2x)\cos(3x) + 2\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x]$
16. $6(\tan 2x + \cot 2x)^2[\sec^2 2x - \csc^2 2x]$
18. $\dfrac{-4(6x+1)\cos(3x^2+x)}{\operatorname{sen}^5(3x^2+x)}$
20. $1 - \dfrac{1}{2}\sec^2(x/2)$

Sección 12.9

1.

2. $y' = \dfrac{y\,(4y - 2x)}{6x\,(y + x)}$

4. $y' = \dfrac{3x^2 - 4x - y}{x - 2y}$

6. $y' = \dfrac{x^2 + 3x^2 y + y}{-3x^3 + x^2 + x}$

8. $y' = \sqrt{y/x}$

10. $y' = \dfrac{\sqrt{y/x} + 2}{12y - \sqrt{x/y}}$

12. $y' = \dfrac{2x^2 + 2x - 3y}{x + y}$

14. $y' = \dfrac{3x - 1}{y^2}$

16. $y' = \dfrac{\dfrac{-x}{2y^{1/2}} - y^{1/2} - \dfrac{y}{3x^{2/3}\,y^{2/3}}}{\dfrac{x^{1/3}}{2y^{2/3}} + \dfrac{1}{4y^{3/4}} - 1}$

18. $y' = \dfrac{3x^2\,(1 - y^4)}{y^2\,(4x^3 y + 3)}$

20. $y' = \dfrac{-\sqrt{y} + \sqrt{y/x}}{2\sqrt{y} + \sqrt{x}}$

22. $y' = \sqrt[3]{y/x}$

24. $y' = \dfrac{1 - 4\sqrt{x + y}}{6\sqrt{x + y} + 1}$

26. $y' = \left[\dfrac{6y - \dfrac{1}{\sqrt{2x + y}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{2x + y}} - 6x - 8y} \right]$

II.

2. $f''(x) = 2$

4. $f''(x) = 60x^3 + 48x$

6. $f''(x) = \dfrac{2}{(x - 1)^3}$

8. $f''(x) = 20x^3 + 36x^2 + 18x + 2$

10. $f''(x) = \dfrac{-10}{9x^{2/3}}$

12. $f''(x) = \dfrac{-10}{9x^{5/3}}$

14. $f''(x) = \dfrac{-3}{4\sqrt{(2 - x)^3}}$

18. $f''(x) = \dfrac{6}{(x - 1)^3}$

20. $f''(x) = \dfrac{12x^2 + 36}{(x^2 - 9)^3}$

Sección 12.10

1. *b*) Máximo en (0, 8)
Creciente en $(-\infty, 0)$
Decreciente en $(0, \infty)$
Cóncava hacia abajo en $(-\infty, \infty)$

d) Máximo en $(-3/4, 49/8)$
Creciente en $(-\infty, -3/4)$
Decreciente en $(-3/4, \infty)$
Cóncava hacia abajo en $(-\infty, \infty)$

f) Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1/6)$
Cóncava hacia arriba en $(1/6, \infty)$

Punto de inflexión en $(1/6, -14/27)$
Creciente en $(-\infty, \infty)$

h) Máximo en $x = -1$
Mínimo en $x = -2$ y $x = 1$
Puntos de inflexión en $x = (-2 + \sqrt{7})/3$ y $x = (-2 - \sqrt{7})/3$
Creciente en $(-2, -1) \cup (1, \infty)$
Decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-1, 1)$

i) Máximo en $(-\frac{4}{3}, \frac{256}{81})$; Mínima en $x = 0$
Puntos de inflexión en $(-1, 2)$
Cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1)$
Cóncava hacia arriba en $(-1, 0) \cup (0, \infty)$
Creciente en $(-\infty, -4/3) \cup (0, \infty)$
Decreciente en $(-4/3, 0)$

l) Mínimo en $(3^{-1/4}, 3^{-3/4} + 3^{-1/4})$
Máximo en $(-3^{-1/4}, -3^{-3/4} - 3^{-1/4})$
Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$
Cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$
Creciente en $(-\infty, -3^{-1/4}) \cup (3^{-1/4}, \infty)$
Decreciente en $(-3^{-1/4}, 0) \cup (0, 3^{-1/4})$

3. 3.33 cm.

5. Es un cubo cuya arista mide $\sqrt{3}$

7. $r = \sqrt{5/3}\,\pi$

9. 3

11. $(1/2, 1/4)$

13. Altura $= \frac{4}{3r}$ radio $= \frac{2\sqrt{2}}{3}r$

Sección 11.15

1. *b)* 3.5
d) 3.75
f) 2/3
h) 2
j) 7/6

2. *b*) $-3x + C$
d) $-x^2/2 + C$
f) $x^2 - x/2 + C$
h) $(-1/5)x^2 + 13x + C$
j) $-x^3/3 + 3x^2 + C$
l) $(-1/2)x - (1/6)x^2 - (1/12)x^3 + C$
n) $5x^3/3 - x/2 + C$

o) $x^4/4 + 3x^2/2 - x + C$
q) $7x^4/4 - 3x + C$

3. *b*) $5x + C$
d) $-4x + C$
f) $x^2/4 - 9x + C$
h) $3x - 9x^2/2 + C$
j) $7x^4/4 + 8x^3/3 + 3x - x^2/2 + C$
l) $x^6/6 - 7x^5/5 + x + C$
n) $-5/x + 4/x^2 + 3x + C$
o) $(2/5)x^{5/2}$
q) $(3/11)x^{11/3} - (9/8)x^{8/3} + (3/2)x^{2/3} + C$
s) $(3/2)x^{2/3} + (3/4)x^{4/3} + C$
u) $(5x^3 - 3x^2 + 3)^5/5$
w) $(3x + 5)^{4/3}/4 + C$
y) $(27/4)(x^2/3 - 3)^{2/3} + C$
a') $(1/48)(-3 - 10x^3)^{8/5}$

4. *b*) 4.5
d) 1/12
f) $\frac{9}{4}(3)^{1/3} - \frac{3}{4}$
h) $(3/35)[(28)^{5/3} + 7^{5/3}]$
j) 37

6. 4.5

8. 4.5

10. 5/12

Tablas

Grados	*Radianes*	*Sen θ*	*csc θ*	*tan θ*	*cot θ*	*sec θ*	*cos θ*		
0°00′	.0000	.0000	Indefinido	.0000	Indefinido	1.000	1.0000	1.5708	90°00′
10′	.0029	.0029	343.8	.0029	343.8	1.000	1.0000	1.5679	50′
20′	.0058	.0058	171.9	.0058	171.9	1.000	1.0000	1.5650	40′
30′	.0087	.0087	114.6	.0087	114.6	1.000	1.0000	1.5621	30′
40′	.0116	.0116	85.95	.0116	85.94	1.000	.9999	1.5592	20′
50′	.0145	.0145	68.76	.0145	68.75	1.000	.9999	1.5563	10′
1°00′	.0175	.0175	57.30	.0175	57.29	1.000	.9998	1.5533	89°00′
10′	.0204	.0204	49.11	.0204	49.10	1.000	.9998	1.5504	50′
20′	.0233	.0233	42.98	.0233	42.96	1.000	.9997	1.5475	40′
30′	.0262	.0262	38.20	.0262	38.19	1.000	.9997	1.5446	30′
40′	.0291	.0291	34.38	.0291	34.37	1.000	.9996	1.5417	20′
50′	.0320	.0320	31.26	.0320	31.24	1.001	.9995	1.5388	10′
2°00′	.0349	.0349	28.65	.0349	28.64	1.001	.9994	1.5359	88°00′
10′	.0378	.0378	26.45	.0378	26.43	1.001	.9993	1.5330	50′
20′	.0407	.0407	24.56	.0407	24.54	1.001	.9992	1.5301	40′
30′	.0436	.0436	22.93	.0437	22.90	1.001	.9990	1.5272	30′
40′	.0465	.0465	21.49	.0466	21.47	1.001	.9989	1.5243	20′
50′	.0495	.0494	20.23	0.495	20.21	1.001	.9988	1.5213	10′
3°00′	.0523	.0523	19.11	.0524	19.08	1.001	.9986	1.5184	87°00′
10′	.0553	.0552	18.10	.0553	18.07	1.002	.9985	1.5155	50′
20′	.0582	.0581	17.20	.0582	17.17	1.002	.9983	1.5126	40′
30′	.0611	.0610	16.38	.0612	16.35	1.002	.9981	1.5097	30′
40′	.0640	.0640	15.64	.0641	15.60	1.002	.9980	1.5068	20′
50′	.0669	.0669	14.96	.0670	14.92	1.002	.9978	1.5039	10′
4°00′	.0698	.0698	14.34	.0699	14.30	1.002	.9976	1.5010	86°00′
10′	.0727	.0727	13.76	.0729	13.73	1.003	.9974	1.4981	50′
20′	.0756	.0756	13.23	.0758	13.20	1.003	.9971	1.4952	40′
30′	.0785	.0785	12.75	.0787	12.71	1.003	.9969	1.4923	30′
40′	.0814	.0814	12.29	.0816	12.25	1.003	.9967	1.4893	20′
50′	.0844	.0843	11.87	.0846	11.83	1.004	.9964	1.4864	10′
5°00′	.0873	.0872	11.47	.0875	11.43	1.004	.9962	1.4835	85°00′
10′	.0902	.0901	11.10	.0904	11.06	1.004	.9959	1.4806	50′
20′	.0931	.0929	10.76	.0934	10.71	1.004	.9957	1.4777	40′
30′	.0960	.0958	10.43	.0963	10.39	1.005	.9954	1.4748	30′
40′	.0989	.0987	10.13	.0992	10.08	1.005	.9951	1.4719	20′
50′	.1018	.1016	9.839	.1022	9.788	1.005	.9948	1.4690	10′
6°00′	.1047	.1045	9.567	.1051	9.514	1.005	.9945	1.4661	84°00′
10′	.1076	.1074	9.309	.1080	9.255	1.005	.9942	1.4632	50′
20′	.1105	.1103	9.065	.1110	9.010	1.006	.9939	1.4603	40′
30′	.1134	.1132	8.834	.1139	8.777	1.006	.9936	1.4573	30′
40′	.1164	.1161	8.614	.1169	8.556	1.007	.9932	1.4544	20′
50′	.1193	.1190	8.405		8.345	1.007	.9929	1.4515	10′
7°00′	.1222	.1219	8.206	.1228	8.144	1.008	.9925	1.4486	83°00′
10′	.1251	.1248	8.016	.1257	7.953	1.008	.9922	1.4457	50′
20′	.1280	.1276	7.834	.1287	7.770	1.008	.9918	1.4428	40′
30′	.1309	.1305	7.661	.1317	7.596	1.009	.9914	1.4399	30′
40′	.1338	.1334	7.496	.1346	7.429	1.009	.9911	1.4370	20′
50′	.1367	.1363	7.337	.1376	7.269	1.009	.9907	1.4341	10′
8°00′	.1396	.1392	7.185	.1405	7.115	1.010	.9903	1.4312	82°00′
10′	.1425	.1421	7.040	.1435	6.968	1.010	.9899	1.4283	50′
20′	.1454	.1449	6.900	.1465	6.827	1.011	.9894	1.4254	40′
30′	.1484	.1478	6.765	.1495	6.691	1.011	.9890	1.4224	30′
40′	.1513	.1507	6.636	.1524	6.561	1.012	.9886	1.4195	20′
50′	15.42	.1536	6.512	.1554	6.435	1.012	9.881	1.4166	10′
9°00′	.1571	.1564	6.392	.1584	6.314	1.012	.9877	1.4137	81°00′
		cos θ	*sec θ*	*cot θ*	*tan θ*	*csc θ*	*sen θ*	*Radianes*	*Grados*

Valores de las Funciones Trigonométricas

Grados	Radianes	Sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
9°00′	.1571	.1564	6.392	.1584	6.314	1.012	.9877	1.4137	81°00′
10′	.1600	.1593	6.277	.1614	6.197	1.013	.9872	1.4108	50′
20′	.1629	.1622	6.166	.1644	6.084	1.013	.9868	1.4079	40′
30′	.1658	.1650	6.059	.1673	5.976	1.014	.9863	1.4050	30′
40′	.1687	.1679	5.955	.1703	5.871	1.014	.9858	1.4021	20′
50′	.1716	.1708	5.855	.1733	5.769	1.015	.9853	1.3992	10′
10°00′	.1745	.1736	5.759	.1763	5.671	1.015	.9848	1.3963	80°00′
10′	.1774	.1765	5.665	.1793	5.576	1.016	.9843	1.3934	50′
20′	.1804	.1794	5.575	.1823	5.485	1.016	.9838	1.3904	40′
30′	.1833	.1822	4.487	.1853	5.396	1.017	.9833	1.3875	30′
20′	.1862	.1851	4.403	.1883	5.309	1.018	.9827	1.3846	20′
50′	.1891	.1880	5.320	.1914	6.226	1.018	.9822	1.3817	10′
11°00′	.1920	.1908	5.241	.1944	5.145	1.019	.9816	1.3788	79°00′
10′	.1949	.1937	5.164	.1974	5.066	1.019	.9811	1.3759	50′
20′	.1978	.1965	5.089	.2004	4.989	1.020	.9805	1.3730	40′
30′	.2007	.1994	5.016	.2035	4.915	1.020	.9799	1.3701	30′
40′	.2036	.2022	4.945	.2065	4.843	1.021	.9793	1.3672	20′
50′	.2065	.2051	4.876	.2095	4.773	1.022	.9787	1.3643	10′
12°00′	.2094	.2079	4.810	.2126	4.705	1.022	.9781	1.3614	78°00′
10′	.2123	.2108	4.745	.2156	4.638	1.023	.9775	1.3584	50′
20′	.2153	.2136	4.682	.2186	4.574	1.024	.9769	1.3555	40′
30′	.2182	.2164	4.620	.2217	4.511	1.024	.9763	1.3526	30′
40′	.2211	.2193	4.560	.2247	4.449	1.025	.9757	1.3497	20′
50′	.2240	.2221	4.502	.2278	4.390	1.026	.9750	1.3468	10′
13°00′	.2269	.2250	4.445	.2309	4.331	1.026	.9744	1.3439	77°00′
10′	.2298	.2278	4.390	.2339	4.275	1.027	.9737	1.3410	50′
20′	.2327	.2306	4.336	.2370	4.219	1.028	.9730	1.3381	40′
30′	.2356	.2334	4.284	.2401	4.165	1.028	.9724	1.3352	30′
40′	.2385	.2363	4.232	.2432	4.113	1.029	.9717	1.3323	20′
50′	.2411	.2391	4.182	.2462	4.061	1.030	.9710	1.3294	10′
14°00′	.2443	.2319	4.134	.2493	4.011	1.031	.9703	1.3265	76°00′
10′	.2473	.2447	4.086	.2524	3.962	1.031	.9696	1.3235	50′
20′	.2502	.2476	4.039	.2555	3.914	1.032	.9689	1.3206	40′
30′	.2531	.2504	3.994	.2586	3.867	1.033	.9681	1.3177	30′
40′	.2560	.2532	3.950	.2617	3.821	1.034	.9674	1.3148	20′
50′	.2589	.2560	3.905	.2648	3.776	1.034	.9667	1.3119	10′
15°00′	.2618	.2588	3.864	.2679	3.732	1.035	.9659	1.3090	75°00′
10′	.2647	.2616	3.822	.2711	3.689	1.036	.9652	1.3061	50′
20′	.2676	.2644	3.782	.2742	3.647	1.037	.9644	1.3032	40′
30′	.2705	.2672	3.742	.2773	3.606	1.038	.9636	1.3003	30′
40′	.2734	.2700	3.703	.2805	3.560	1.039	.9628	1.2974	20′
50′	.2763	.2728	3.665	.2836	3.526	1.039	.9621	1.2945	10′
16°00′	.2793	.2756	3.628	.2867	3.487	1.040	.9613	1.2915	74°00′
10′	.2822	.2874	3.592	.2899	3.450	1.041	.9605	1.2886	50′
20′	.2851	.2812	3.556	.2931	3.412	1.042	.9596	1.2857	40′
30′	.2880	.2840	3.521	.2961	3.376	1.043	.9588	1.2828	30′
40′	.2909	.2868	3.487	.2994	3.340	1.044	.9580	1.2799	20′
50′	.2938	.2896	3.543	.3026	3.305	1.045	.9572	1.2770	10′
17°00′	.2967	.2924	3.420	.3057	3.271	1.046	.9536	1.2741	73°00′
10′	.2996	.2952	3.388	.3089	3.235	1.047	.9555	1.2712	50′
20′	.3025	.2979	3.357	.3121	3.204	1.048	.9546	1.2683	40′
30′	.3054	.3007	3.326	.3153	3.172	1.049	.9537	1.2654	30′
40′	.3083	.3035	3.295	.3185	3.140	1.049	.9528	1.2625	20′
50′	.3113	.3062	3.265	.3217	3.108	1.050	.9520	1.2595	10′
18°00′	.3142	.3090	3.236	.3249	3.078	1.051	.9511	1.2566	72°00′
		csc θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	cos θ	Radianes	Grados

Valores de las Funciones Trigonométricas

Grados	Radianes	sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
18°00′	.3142	.3090	3.236	.3249	3.078	1.051	.9511	1.2566	72°00′
10′	.3171	.3118	3.207	.3281	3.047	1.052	.9502	1.2537	50′
20′	.3200	.3145	3.179	.3314	3.018	1.053	.9492	1.2508	40′
30′	.3229	.3173	3.152	.3346	2.989	1.054	.9483	1.2479	30′
40′	.3358	.3201	3.124	.3378	2.960	1.056	.9497	1.2450	20′
50′	.3287	.3228	3.098	.3411	2.932	1.057	.9465	1.2421	10′
19°00′	.3316	.3256	3.072	.3443	2.904	1.058	.9455	1.2392	71°00′
10′	.3345	.3283	3.046	.3476	2.877	1.059	.9446	1.2363	50′
20′	.3374	.3311	3.021	.3508	2.850	1.060	.9436	1.2334	40′
30′	.3403	.3338	1.996	.3541	2.824	1.061	.9426	1.2305	30′
40′	.3432	.3365	2.971	.3574	2.798	1.062	.9471	1.2275	20′
50′	.3462	.3393	2.947	.3607	2.773	1.063	.9407	1.2246	10′
20°00′	.3491	.3420	2.924	.3640	2.747	1.064	.9397	1.2217	70°00′
10′	.3520	.3448	2.901	.3673	2.723	1.065	.9387	1.2188	50′
20′	.3549	.3475	2.978	.3706	2.699	1.066	.9377	1.2159	40′
30′	.3578	.3502	2.855	.3739	2.675	1.068	.9367	1.2130	30′
40′	.3607	.3529	2.833	.3772	2.651	1.069	.9356	1.2101	20′
50′	.3636	.3557	2.812	.3805	2.628	1.070	.9346	1.2072	10′
21°00′	.3665	.3584	2.790	.3839	2.605	1.071	.9336	1.2043	69°00′
10′	.3694	.3611	2.769	.3872	2.583	1.072	.9325	1.2014	50′
20′	.3723	.3638	2.749	.3906	2.560	1.074	.9315	1.1985	40′
30′	.3752	.3665	2.729	.3939	2.539	1.075	.9304	1.1956	30′
40′	.3782	.3692	2.709	.3973	2.517	1.076	.9293	1.1926	20′
50′	.3811	.3719	2.689	.4006	2.496	1.077	.9283	1.1897	10′
22°00′	.3840	.3746	2.669	.4040	2.475	1.079	.9272	1.1868	68°00′
10′	.3869	.3773	2.650	.4047	2.455	1.080	.9261	1.1839	50′
20′	.3898	.3800	2.632	.4108	2.434	1.081	.9250	1.1810	40′
30′	.3927	.3827	2.613	.4142	2.414	1.082	.9239	1.1781	30′
40′	.3956	.3854	2.599	.4176	2.394	1.084	.9228	1.1752	20′
50′	.3985	.3881	2.577	.4210	2.375	1.085	.9216	1.1723	10′
23°00′	.4014	.3907	2.559	.4245	2.356	1.086	.9205	1.1694	67°00′
10′	.4043	.3934	2.542	.4279	2.337	1.088	.9194	1.1665	50′
20′	.4072	.3961	2.525	.4314	2.318	1.089	.9182	1.1636	40′
30′	.4102	.3987	2.508	.4348	2.300	1.090	.9171	1.1606	30′
40′	.4131	.4014	2.491	.4383	2.282	1.092	.9159	1.1577	20′
50′	.4160	.4041	2.475	.4417	2.264	1.093	.9147	1.1548	10′
24°00′	.4189	.4067	2.459	.4452	2.246	1.095	.9135	1.1519	66°00′
10′	.4218	.4094	2.443	.4487	2.229	1.096	.9124	1.1490	50′
20′	.4247	.4120	2.427	.4522	2.211	1.097	.9112	1.1461	40′
30′	.4276	.4147	2.411	.4557	2.194	1.099	.9100	1.1432	30′
40′	.4305	.4173	2.396	.4592	2.177	1.100	.9088	1.1403	20′
50′	.4334	.4200	2.381	.4628	2.161	1.102	.9075	1.1373	10′
25°00′	.4363	.4226	2.366	.4663	2.145	1.103	.9063	1.1345	65°00′
10′	.4392	.4253	2.352	.4699	2.128	1.105	.9051	1.1316	50′
20′	.4422	.4279	2.337	.4734	2.112	1.106	.9038	1.1286	40′
30′	.4451	.4305	2.323	.4770	2.097	1.108	.9026	1.1257	30′
40′	.4480	.4331	2.309	.4806	2.081	1.109	.9013	1.1228	20′
50′	.4509	.4358	2.295	.4841	2.066	1.111	.9001	1.1199	10′
26°00′	.4538	.4384	2.281	.4877	2.050	1.113	.8988	1.1170	64°00′
10′	.4567	.4410	2.268	.4913	2.035	1.114	.8975	1.1141	50′
20′	.4596	.4436	2.254	.4950	2.020	1.116	.8962	1.1112	40′
30′	.4625	.4462	2.241	.4986	2.006	1.117	.8949	1.1083	30′
40′	.4654	.4488	2.228	.5022	1.991	1.119	.8936	1.1054	20′
50′	.4683	.4514	2.215	.5059	1.977	1.121	.8923	1.1025	10′
27°00′	.4712	.4540	2.203	.5095	1.963	1.122	.8910	1.0996	63°00′
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sen θ	Radianes	Grados

Valores de las Funciones Trigométricas

Grados	Radianes	sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
27°00′	.4712	.4540	2.203	.5095	1.963	1.122	.8910	1.0996	63°00′
10′	.4741	.4566	2.190	.5132	1.949	1.124	.8897	1.0966	50′
20′	.4771	.4592	2.178	.5169	1.935	1.126	.8884	1.0937	40′
30′	.4800	.4617	2.166	.5206	1.921	1.127	.8870	1.0908	30′
40′	.4829	.4643	2.154	.5243	1.907	1.129	.8857	1.0879	20′
50′	.4858	.4669	2.142	.5280	1.894	1.131	.8843	1.0850	10′
28°00′	.4887	.4695	2.130	.5317	1.881	1.133	.8829	1.0821	62°00′
10′	.4916	.4720	2.118	.5354	1.868	1.134	.8816	1.0792	50′
20′	.4945	.4746	2.107	.5392	1.855	1.136	.8802	1.0763	40′
30′	.4974	.4772	2.096	.5430	1.842	1.138	.8788	1.0734	30′
40′	.5003	.4797	2.085	.5467	1.829	1.140	.8774	1.0705	20′
50′	.5032	.4823	2.074	.5505	1.816	1.142	.8760	1.0676	10′
29°00′	.5061	.4848	2.063	.5543	1.804	1.143	.8746	1.0647	61°00′
10′	.5091	.4874	2.052	.5581	1.792	1.145	.8732	1.0617	50′
20′	.5120	.4899	2.041	.5619	1.780	1.147	.8718	1.0588	40′
30′	.5149	.4924	2.031	.5658	1.767	1.149	.8704	1.0559	30′
40′	.5178	.4950	2.020	.5696	1.756	1.151	.8689	1.0530	20′
50′	.5207	.4975	2.010	.5735	1.744	1.153	.8675	1.0501	10′
30°00′	.5236	.5000	2.000	.5774	1.732	1.155	.8660	1.0472	60°00′
10′	.5265	.5025	1.990	.5812	1.720	1.157	.8646	1.0443	50′
20′	.5294	.5050	1.980	.5851	1.709	1.159	.8631	1.0414	40′
30′	.5323	.5075	1.970	.5890	1.698	1.161	.8616	1.0385	30′
40′	.5352	.5100	1.961	.5930	1.686	1.163	.8601	1.0356	20′
50′	.5381	.5125	1.951	.5969	1.675	1.165	.8587	1.0327	10′
31°00′	.5411	.5150	1.942	.6009	1.664	1.167	.8572	1.0297	59°00′
10′	.5440	.5175	1.932	.6048	1.653	1.169	.8557	1.0268	50′
20′	.5469	.5200	1.923	.6088	1.643	1.171	.8542	1.0239	40′
30′	.5498	.5225	1.914	.6128	1.632	1.173	.8526	1.0210	30′
40′	.5527	.5250	1.905	.6168	1.621	1.175	.8511	1.0181	20′
50′	.5556	.5275	1.896	.6208	1.611	1.177	.8496	1.0152	10′
32°00′	.5585	.5299	1.887	.6249	1.600	1.179	.8480	1.0123	58°00′
10′	.5614	.5324	1.878	.6289	1.590	1.181	.8465	1.0094	50′
20′	.5643	.5348	1.870	.6330	1.580	1.184	.8450	1.0065	40′
30′	.5672	.5373	1.861	.6371	1.570	1.186	.8434	1.0036	30′
40′	.5701	.5398	1.853	.6412	1.560	1.188	.8418	1.0007	20′
50′	.5730	.5422	1.844	.6453	1.550	1.190	.3403	.9977	10′
33°00′	.5760	.5446	1.836	.6494	1.540	1.192	.8387	.9948	57°00′
10′	.5789	.5471	1.828	.6536	1.530	1.195	.8371	.9919	50′
20′	.5818	.5495	1.820	.6577	1.520	1.197	.8355	.9890	40′
30′	.5847	.5519	1.812	.6619	1.511	1.199	.8339	.9861	30′
40′	.5876	.5544	1.804	.6661	1.501	1.202	.8323	.9832	20′
50′	.5905	.5568	1.796	.6703	1.492	1.204	.8307	.9803	10′
34°00′	.5934	.5592	1.788	.6745	1.483	1.206	.8290	.9774	56°00′
10′	.5963	.5616	1.781	.6787	1.473	1.209	.8274	.9745	50′
20′	.5992	.5640	1.773	.6830	1.464	1.211	.8258	.9716	40′
30′	.6021	.5664	1.766	.6873	1.455	1.213	.8241	.9687	30′
40′	.6050	.5688	1.758	.6916	1.446	1.216	.8225	.9657	20′
50′	.6080	.5712	1.751	.6959	1.437	1.218	.8208	.9628	10′
35°00′	.6109	.5736	1.743	.7002	1.428	1.221	.8192	.9599	55°00′
10′	.6138	.5760	1.736	.7046	1.419	1.223	.8175	.9570	50′
20′	.6167	.5783	1.729	.7089	1.411	1.226	.8158	.9541	40′
30′	.6196	.5807	1.722	.7133	1.402	1.228	.8141	.9512	30′
40′	.6225	.5831	1.715	.7177	1.393	1.231	.8124	.9483	20′
50′	.6254	.5854	1.708	.7221	1.385	1.233	.8107	.9454	10′
36°00′	.6283	.5878	1.701	.7265	1.376	1.236	.8090	.9425	54°00′
		cos θ	sec θ		tan θ	csc θ	sen θ	Radianes	Grados

Valores de las Funciones Trigonométricas

Grados	*Radianes*	*sen θ*	*csc θ*	*tan θ*	*cot θ*	*sec θ*	*cos θ*		
36°00′	.6283	.5878	1.701	.7265	1.376	1.236	.8090	.9425	54°00′
10′	.6312	.5901	1.695	.7310	1.368	1.239	.8073	.9396	50′
20′	.6341	.5925	1.688	.7355	1.360	1.241	.8056	.9367	40′
30′	.6370	.5948	1.681	.7400	1.351	1.244	.8039	.9338	30′
40′	.6400	.5972	1.675	.7445	1.343	1.247	.8021	.9308	20′
50′	.6429	.5995	1.668	.7490	1.335	1.249	.8004	9279	10′
37°00′	.6458	.6018	1.662	.7536	1.327	1.252	.7986	.9250	53°00′
10′	.6487	.6041	1.655	.7581	1.319	1.255	.7969	.9221	50′
20′	.6516	.6065	1.649	.7627	1.311	1.258	.7951	.9192	40′
30′	.6545	.6088	1.643	.7673	1.303	1.260	.7934	.9163	30′
40′	.6574	.6111	1.636	.7720	1.295	1.263	.7916	.9134	20′
50′	.6603	.6134	1.630	.7766	1.288	1.266	.7898	.9105	10′
38°00′	.6632	.6157	1.624	.7813	1.280	1.269	.7880	.9076	52°00′
10′	.6661	.6180	1.618	.7860	1.272	1.272	.7862	.9047	50′
20′	.6690	.6202	1.612	.7907	1.265	1.275	.7844	.9018	40′
30′	.6720	.6225	1.606	.7954	1.257	1.278	.7826	.8988	30′
40′	.6749	.6248	1.601	.8002	1.250	1.281	.7808	.8959	20′
50′	.6778	.6271	1.595	.8050	1.242	1.284	.7790	.8930	10′
39°00′	.6807	.6293	1.589	.8098	1.235	1.287	.7771	.8901	51°00′
10′	.6836	.6316	1.583	.8146	1.228	1.290	.7753	.8872	50′
20′	.6865	.6338	1.578	.8195	1.220	1.293	.7735	.8843	40′
30′	.6894	.6361	1.572	.8243	1.213	1.296	.7716	.8814	30′
40′	.6923	.6383	1.567	.8292	1.206	1.299	.7698	.8785	20′
50′	.6952	.6406	1.561	.8342	1.199	1.302	.7679	.8756	10′
40°00′	.6981	.6428	1.556	.8391	1.192	1.305	.7660	.8727	50°00′
10′	.7010	.6450	1.550	.8441	1.185	1.309	.7642	.8698	50′
20′	.7039	.6472	1.545	.8491	1.178	1.312	.7623	.8668	40′
30′	.7069	.6494	1.540	.8541	1.171	1.315	.7604	.8639	30′
40′	.7098	.6517	1.535	.8591	1.164	1.318	.7585	.8610	20′
50′	.7127	.6539	1.529	.8642	1.157	1.322	.7566	.8581	10′
41°00′	.7156	.6561	1.524	.8693	1.150	1.325	.7547	.8552	49°00′
10′	.7185	.6583	1.519	.8744	1.144	1.328	.7528	.8523	50′
20′	.7214	.6604	1.514	.8796	1.137	1.332	.7509	.8494	40′
30′	.7243	.6626	1.509	.8847	1.130	1.335	.7490	.8465	30′
40′	.7272	.6648	1.504	.8899	1.124	1.339	.7470	.8436	20′
50′	.7301	.6670	1.499	.8952	1.117	1.342	.7451	.8407	10′
42°00′	.7330	.6691	1.494	.9004	1.111	1.346	.7431	.8378	48°00′
10′	.7359	.6713	1.490	.9057	1.104	1.349	.7412	.8348	50′
20′	.7389	.6734	1.485	.9110	1.098	1.353	.7392	.8319	40′
30′	.7418	.6756	1.480	.9163	1.091	1.356	.7373	.8290	30′
40′	.7447	.6777	1.476	.9217	1.085	1.360	.7353	.8261	20′
50′	.7476	.6799	1.471	.9271	1.079	1.364	.7333	.8232	10′
43°00′	.7505	.6820	1.466	.9325	1.972	1.367	.7314	.8203	47°00′
10′	.7534	.6841	1.462	.9380	1.066	1.371	.7294	.8174	50′
20′	.7563	.6862	1.457	.9435	1.060	1.375	.7274	.8145	40′
30′	.7592	.6884	1.453	.9490	1.054	1.379	.7254	.8116	30′
40′	.7621	.6905	1.448	.9545	1.048	1.382	.7234	.8087	20′
50′	.7650	.6926	1.444	.9601	1.042	1.386	.7214	.8058	10′
44°00′	.7679	.6947	1.440	.9657	1.036	1.390	.7193	.8029	46°00′
10′	.7709	.6967	1.435	.9713	1.030	1.394	.7173	.7999	50′
20′	.7738	.6988	1.431	.9770	1.024	1.394	.7173	.7999	40′
30′	.7767	.7009	1.427	.9827	1.018	1.402	.7133	.7941	30′
40′	.7796	.7030	1.423	.9884	1.012	1.406	.7112	.7912	20′
50′	.7825	.7050	1.418	.9942	1.006	1.410	.7092	.7883	10′
45°00′	.7854	.7071	1.414	1.000	1.000	1.414	.7071	.7854	45°00′
		cos θ	*sec θ*	*cot θ*	*tan θ*	*csc θ*	*sen θ*	*Radianes*	*Grados*

N	0	1	2	3		5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3111	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5538	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

Logaritmos de números naturales

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7004	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7989
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8189	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8800	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9894	9899	9903	9908	9890
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

La edición, composición, diseño e impresión de esta obra fueron realizados
bajo la supervisión de GRUPO NORIEGA EDITORES.
Balderas 95, Col. Centro. México, D.F. C.P. 06040
2268480001208885DP9200IE

Obras afines:

ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA

Murray Gechtman

La importancia de contar con una base sólida que permita introducirse más en el estudio de la Matemática, se hace cada día más patente debido al avance constante de la tecnología. En consecuencia, el estudiante se debe preparar para poder participar en este campo donde la matemática es fundamental. Una herramienta esencial que permitirá al individuo superar los problemas propios de una actividad intelectual es el Cálculo. Para poder dominar esta materia no bastan el álgebra y la trigonometría elementales, sino un conocimiento más profundo de estos temas.

El presente libro está enfocado principalmente a preparar al estudiante que terminó el bachillerato, de modo que pueda cursar Cálculo en la escuela superior sin el temor a enfrentarse a ciertos temas que se requieren para esta materia.

ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA SIMPLIFICADAS

Zuckerman

Excelente texto para los cursos de Álgebra y Trigonometría a nivel bachillerato o primer año de licenciatura, y para quienes requieren de un buen dominio de los fundamentos de estas materias.

Mediante explicaciones precisas, breves y directas, facilita el aprendizaje del Álgebra y la Trigonometría, destacando los problemas relativos a situaciones de la vida real; además, explica cómo plantearlos y resolverlos mediante el lenguaje de las Matemáticas.

Asimismo, en el texto se ilustran las técnicas algebraicas y geométricas empleadas en Cálculo, para evitar confusiones en la identificación de conceptos algebraicos en los problemas de cálculo.

Actualmente, en todas las disciplinas de estudio es evidente la necesidad de tener conocimientos básicos de las matemáticas.

Desafortunadamente, también es evidente que el interés por las matemáticas no responde a dicha necesidad. Nuestro sentir es que, en gran parte, los responsables de tal desinterés somos las personas que de una u otra manera tenemos que ver con el proceso de enseñanza-aprendizaje. Éste fue el motivo principal para la realización de esta obra.

El aspecto didáctico con que se presenta el material es tan importante como el contenido mismo. Haciendo nuestra esta preocupación, el material del presente libro está organizado de acuerdo con el sistema de instrucción personalizada, por lo cual se dividió en pequeñas unidades que facilitan el aprendizaje. Cada unidad contiene una lista de objetivos específicos de aprendizaje, con la finalidad de que el estudiante sepa cuáles son las exigencias mínimas que debe cubrir.

En esta nueva edición, con la finalidad de lograr mayor claridad en la exposición del tema, hemos reestructurado el apartado de Álgebra y elaborado importantes modificaciones para el mejoramiento y la actualización de la obra. Cada unidad contiene una vasta cantidad tanto de ejemplos resueltos como de ejercicios, de tal manera que en todo el libro se presentan más de 680 ejemplos y 2600 ejercicios.

Esta obra pretende buscar un equilibrio entre lo formal y lo intuitivo, de tal forma que se prefirió, en algunos casos, ser menos riguroso de lo deseado, si se pensaba que esto produciría un mayor beneficio pedagógico. Sin embargo, se trató de ser formal y preciso en la mejor medida posible.

© Portada: Sergio Olguín

ÁREA: MATEMÁTICAS
ISBN-13 978-968-18-6759-1
9 789681 867591

GRUPO
NORIEGA EDITORES

limusa@noriegaeditores.com
www.noriega.com.mx